

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldatra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-01.C1-B

CzG

(1) A PC szaküzletben hatféle CD kapható (és mindegyikből van bőven). Hányféleképpen vásárolhatunk egyszerre három CD-t? (Azonosakat is vehetünk. Mivel „egyszerre”, ezért a sorrend nem számít.)

!	$\left(\frac{9}{3}\right)$ ☐	$6! \cdot 3!$ ☐	$3! \cdot 9!$ ☐	6^3 ☐	3^6 ☐	$\left(\frac{6}{3}\right)$ ☐	$\left(\frac{8}{3}\right)$ ☐	egyik sem ☐	!
---	--	-------------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	--	--	---------------------------------	---

dmnv2-01.C1-B

CzG

MEGOLDÁS: $\left(\frac{8}{3}\right)$

dmnv2-01.C1-B

CzG

(2) A diofantoszi egyenletekről tanultak segítségével döntsük el, hogy hány elemű az

$$\{x \in \mathbf{Z} : (\exists y \in \mathbf{Z})(5x + 9y = 4) \text{ és } 31 \leq x \leq 41\}$$

halmaz?

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	5 ☐	6 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv2-01.C1-B

CzG

MEGOLDÁS: Egy: $x = 35$. Partikuláris megoldás: $x_0 = -1$, $y_0 = 1$. Ezért az általános megoldás $x = -1 + 9t$, $y = 1 - 5t$.

dmnv2-01.C1-B

CzG

(3) Hányféleképpen rakhatók sorba a „BALLADA” szó betűi úgy, hogy a két L betű egymás mellett legyen?

!	$\left(\frac{7}{2}\right)$	$7! - 6!$	12	20	36	$\frac{6!}{3!}$	60	144	egyik sem	!
---	----------------------------	-----------	----	----	----	-----------------	----	-----	-----------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: $\frac{6!}{3!} = 120$. Hiszen „LL” egyetlen betűnek tekinthető és az ismétléses permutációra vonatkozó képlet alkalmazandó.

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(4) Jelölje be a téglalapba az m paraméter azon értékeit, amelyek mellett az alábbi kongruencia-rendszernek van megoldása:

$$x \equiv 2 \pmod{20}$$

$$x \equiv 7 \pmod{m}$$

?	2	10	15	30	nincs ilyen m	?
---	---	----	----	----	-----------------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: 15.

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(5) Legyen $k, \ell \in \mathbf{Z}$ és legyen p olyan prímszám, amelyik nem osztja a $k\ell$ szorzatot. Igazak-e ekkor **szükségképpen** az alábbi kijelentések?

$$k^p \equiv k \pmod{p}.$$

$$k^p \equiv 1 \pmod{p}.$$

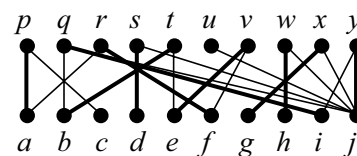
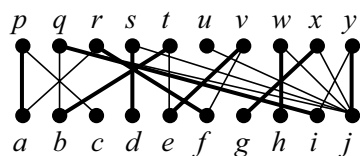
A $kx \equiv 1 \pmod{p}$ kongruenciának nincs megoldása.

ha $k \equiv 1 \pmod{p}$ és $\ell \equiv 1 \pmod{p}$ akkor $k\ell \equiv 1 \pmod{p}$.

!	igen $\oplus$	nem	!
!	igen	nem $\oplus$	!
!	igen	nem $\oplus$	!
!	igen $\oplus$	nem	!

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) Az $\{ap, bt, ds, ev, fr, gx, hw, iq, jy\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	hw	iy	bq	jy	ev	egyik sem	?
---	------	------	------	------	------	-----------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: hw, iy, bq . Az egyetlen alternáló út: $uj, jy, yi, iq, qb, bt, te, ev, vf, fr, ra, ap, pc$. (Érdemes fentről lefelé haladni, mert úgy nincs elágazási lehetőség.)

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(7) Melyek a **szükségképpen** igazak az alábbi kijelentések közül?

Minden csoport egyúttal kancellatív félcsoport.

Monoidban minden elemnek legfeljebb egy inverze van.

!	igen $\oplus$	nem	!
!	igen $\oplus$	nem	!

Ha G tízelemű csoport és S részcsoportja G -nek, akkor $|S| \neq 5$.

!	igen ☐	nem ☒	!
---	----------------------------	--------------------------------------	---

Két test direkt szorzata gyűrű.

!	igen ☒	nem ☐	!
---	---------------------------------------	---------------------------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(8) Legyen $S = \{6k : k \in \mathbf{Z}\}$. Ez részcsoportja a $(\mathbf{Z}; +)$ csoportnak. A téglalapban felsorolt elemek közül jelölje be azokat, amelyek benne vannak a $2 \in \mathbf{Z}$ elem S részcsoport szerinti mellékosztályában.

?	-4 ☐	12 ☐	2 ☐	3 ☐	10 ☐	14 ☐	egyik sem ☐	?
---	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: -4, 2, 14.

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(9) A művelet táblázattal megadott alábbi három grupoid közül melyek izomorfak a $(\mathbf{Z}_3; +)$ csoporttal?

A					B					C				
*	0	1	2		*	a	b	c		*	p	q	r	
0	0	1	2		a	a	b	c		p	p	p	p	
1	1	0	2		b	b	c	a		q	p	q	r	
2	2	2	2		c	c	a	b		r	p	r	q	

?	A ☐	B ☐	C ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: B . Vegyük észre, hogy A -ban és C -ben van zéruselem, tehát nem csoportok. Érdemes a $(\mathbf{Z}_3; +)$ művelet táblázatát is felírni. A $\mathbf{Z}_3 \rightarrow A$, $0 \mapsto a$, $1 \mapsto b$, $2 \mapsto c$ leképezés izomorfizmus.

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

(10) Tekintsük az $(A; *)$, $(B; *)$ és $(C; *)$ grupoidokat, amelyeket művelet táblázattal az előző feladatban adtunk meg. Legyen $\Theta \subseteq B^2$ egy tetszőleges olyan kongruencia, amelyre $(a, b) \in \Theta$. Θ_C jelöli a C osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát. Melyek igazak szükségképpen az alábbi állítások közül:

?	$(a, c) \in \Theta$ ☐	$\Theta_{\{\{0\}, \{1, 2\}\}}$ kongruencia ☐	$c \in [b]$ ☐	$p \in [q]$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---	--	-----------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen, nem.

dmnv2-01.C1-B _____ CzG