

! nappali ☐	levelező ☐	!
---------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy körbe** kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több körbe** kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldatra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(1) A PC szaküzletben ötféle CD kapható (és mindegyikből van bőven). Hányféleképpen vásárolhatunk egyszerre négy CD-t? (Azonosakat is vehetünk. Mivel „egyszerre”, ezért a sorrend nem számít.)

!	5^4 ☐	4^5 ☐	$\binom{5}{4}$ ☐	$\binom{9}{4}$ ☐	$\binom{8}{4}$ ☐	$5! \cdot 4!$ ☐	$5! \cdot 9!$ ☐	egyik sem ☐	!
---	-----------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\binom{8}{4}$

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(2) A diofantoszi egyenletekről tanultak segítségével döntsük el, hogy hány elemű az

$$\{x \in \mathbf{Z} : (\exists y \in \mathbf{Z})(9x + 5y = 4) \text{ és } 31 \leq x \leq 41\}$$

halmaz?

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	5 ☐	6 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Három. Partikuláris megoldás: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$. Ezért az általános megoldás $x = 1 + 5t$, $y = -1 - 9t$.

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(3) Hányféleképpen rakhatók sorba a „BALLADA” szó betűi, ha a két mássalhangzó nem kerülhet egymás mellé? (Az „A” kivételével az összes előforduló betű mássalhangzó.)

!	$\binom{7}{2}$	$7! - 3!$	12	24	36	$\frac{7!}{2! \cdot 3!}$	60	120	egyik sem	!
---	----------------	-----------	----	----	----	--------------------------	----	-----	-----------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 12. A három „A” elhelyezése egyértelmű. Ezt követően a mássalhangzókat $\frac{4!}{2!} = 12$ -féleképpen helyezhetjük el.

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(4) Jelölje be a téglalapba az m paraméter azon értékeit, amelyek mellett az alábbi kongruencia-rendszernek van megoldása:

$$x \equiv 1 \pmod{12}$$

$$x \equiv 7 \pmod{m}$$

?	2	7	8	30	nincs ilyen m	?
---	---	---	---	----	-----------------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 2, 7, 30.

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(5) Legyen $k, \ell \in \mathbf{Z}$ és legyen p olyan prímszám, amelyik nem osztja a $k\ell$ szorzatot. Igazak-e ekkor **szükségképpen** az alábbi kijelentések?

$$k^p \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$k^p \equiv k \pmod{p}.$$

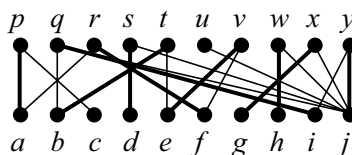
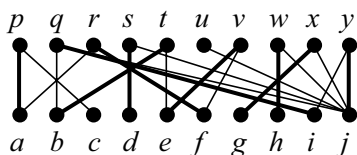
Ha $k \equiv 1 \pmod{p}$ és $\ell \equiv 1 \pmod{p}$ akkor $k\ell \equiv 1 \pmod{p}$.

A $kx \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia megoldható az $x \in \mathbf{Z}$ ismeretlenre.

!	igen	nem	!
!	igen	nem	!
!	igen	nem	!
!	igen	nem	!

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) Az $\{ap, bt, ds, ev, fr, gx, hw, iq, jy\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	bq	te	jy	ev	hw	egyik sem	?
---	------	------	------	------	------	-----------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: bq, te, hw . Az egyetlen alternáló út: $uj, jy, yi, iq, qb, bt, te, ev, vf, fr, ra, ap, pc$. (Érdekes fentről lefelé haladni, mert úgy nincs elágazási lehetőség.)

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(7) Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül?

Ha egy csoportban a művelet asszociatív, akkor Abel-csoportnak nevezzük.

Monoidban minden elemnek legalább egy inverze van.

!	igen	nem	!
!	igen	nem	!

Ha G tízelemű csoport és S részcsoportha G -nek, akkor $|S| \neq 4$.

!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!
---	---------------	-------------	---

Két test direkt szorzata szintén test.

!	igen $\circ$	nem $\oplus$	!
---	--------------	--------------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(8) Legyen $S = \{7k : k \in \mathbf{Z}\}$. Ez részcsoportha a $(\mathbf{Z}; +)$ csoportnak. A téglalapban felsorolt elemek közül jelölje be azokat, amelyek benne vannak a $3 \in \mathbf{Z}$ elem S részcsoporth szerinti mellékosztályában.

?	$-4 \circ$	$12 \circ$	$2 \circ$	$3 \circ$	$10 \circ$	$11 \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	------------	------------	-----------	-----------	------------	------------	-------------------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $-4, 3, 10$.

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(9) A művelet táblázattal megadott alábbi három grupoid közül melyek izomorfak a $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ monoiddal? (Itt $\cdot$ az egész számok szokásos szorzását jelöli.)

A				B				C			
*	0	1	2	*	a	b	c	*	p	q	r
0	0	1	2	a	a	b	c	p	p	p	p
1	1	0	2	b	b	c	a	q	p	q	r
2	2	2	2	c	c	a	b	r	p	r	q

?	$A \circ$	$B \circ$	$C \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	-----------	-----------	-------------------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: A és C . Érdemes a $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ művelet táblázatát is felírni. Az A esetén a $\{-1, 0, 1\} \rightarrow A, -1 \mapsto 1, 0 \mapsto 2, 1 \mapsto 0$ leképezés izomorfizmus. (Más nem is jöhetne szóba, hiszen az egységelem képe szükségképpen egységelem, a zéruselem képe pedig zéruselem.) A B esetében nincs zéruselem. Az A esethez hasonlóan a $\{-1, 0, 1\} \rightarrow C, -1 \mapsto r, 0 \mapsto p, 1 \mapsto q$ leképezés izomorfizmus. .

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

(10) Tekintsük az $(A; *)$, $(B; *)$ és $(C; *)$ grupoidokat, amelyeket művelet táblázattal az előző feladatban adtunk meg. Legyen $\Theta \subseteq A^2$ egy tetszőleges olyan kongruencia, amelyre $(0, 1) \in \Theta$. Θ_C jelöli a C osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát. Melyek igazak szükségképpen az alábbi állítások közül:

?	$(1, 2) \in \Theta \circ$	$\Theta_{\{\{p\}, \{q, r\}\}}$ kongruencia $\circ$	$c \in [b] \circ$	$b \in [c] \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	---------------------------	--	-------------------	-------------------	-------------------	---

dmnv2-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, igen, igen.

dmnv2-01.C1-A _____ CzG