

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(1) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\alpha : A \rightarrow A, \quad x \mapsto 5 - x, \text{ továbbá}$$

$$\beta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x - 2|.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szűr”=„szűrjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	α inj ☐	α szűr ☐	α bij ☐	β inj ☐	β szűr ☐	β bij ☐	?
---	------------------------------------	-------------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: igen, igen, igen, nem, nem, nem.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(2) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{0, 1, 2\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \Delta B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszeljük be az alábbi téglalapban!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\{1, 2\}$. Közvetlenül is könnyen adódik, de úgy is érvelhetünk, hogy a disztributivitás szerint $A \cap (\overline{A} \Delta B) = (A \cap \overline{A}) \Delta (A \cap B) = \emptyset \Delta (A \cap B) = A \cap B = \{1, 2\}$.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(3) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbf{Q}$	☐	$\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$	☐	$\mathbf{R}$	☐	egyik sem	☐	?
---	--------------	-----------------------	--------------------------------	-----------------------	--------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, igen, nem.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $C = \{\{0, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$	☐	$\{4, 5\}$	☐	$\{1, 3, 5\}$	☐	A	☐	$\{3\}$	☐	egyik sem	☐	!
---	-------------	-----------------------	------------	-----------------------	---------------	-----------------------	-----	-----------------------	---------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\{1, 3, 5\}$

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(5) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$A \rightarrow (\neg B)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? Más szóval: melyek a t.d.n.f. tagjai? (Természetesen pl. „ $(\neg A)$ ” helyett „ $\neg A$ ” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B$	☐	$A \wedge (\neg B)$	☐	$(\neg A) \wedge B$	☐	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	☐	egyik sem	☐	?
---	--------------	-----------------------	---------------------	-----------------------	---------------------	-----------------------	----------------------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, igen, igen.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(6) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \vee B(y))$ formula **negáltjával** az alábbi

$$F : (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

$$G : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))$$

$$H : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

formulák közül?

!	F	☐	G	☐	H	☐	egyik sem	☐	!
---	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: H .

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(7) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

!	0	☐	1	☐	-1	☐	2	☐	-2	☐	5	☐	-6	☐	12	☐	egyik sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 2.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(8) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	-1	☐	-2	☐	-3	☐	egyik sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 0, hiszen $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(9) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbf{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E}: (1, 2, 3), (-1, -2, -3), (2, 4, 6);$$

$$\mathcal{F}: (1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 3, 4);$$

$$\mathcal{G}: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1).$$

Melyek lineárisan függetlenek közülük?

?	$\mathcal{E}$	☐	$\mathcal{F}$	☐	$\mathcal{G}$	☐	egyik sem	☐	?
---	---------------	-----------------------	---------------	-----------------------	---------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\mathcal{G}$.

dmnv1j-02.C1-A _____ CzG

(10) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \dots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sora azonos, akkor a determináns értéke 0.

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

Ha $v_1 + \dots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vekt.rendsz. lin. független.

!	igen	☐	nem	$\oplus$	!
---	------	-----------------------	-----	----------	---

Ha A invertálható mátrix, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

