

Oltható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemsszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-28/A

CzG

(1) Az alábbi három mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

közül pontosan egy invertálható. Jelölje X ezen mátrix inverzét. Adja meg X elemeinek az **összegét!** (Tehát egy négytagú összeg értékét keressük.)

!	0	○	1	○	2	○	-1	○	-2	○	$-\frac{1}{2}$	○	$\frac{1}{2}$	○	-3	○	egyik sem	○	!
---	---	---	---	---	---	---	----	---	----	---	----------------	---	---------------	---	----	---	-----------	---	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A

CzG

(2) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Az A -n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$, illetve $\mathcal{D} = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát jelölje α , illetve β . Jelölje $\mathcal{F}$ az $\alpha \cap \beta$ ekvivalenciához tartozó osztályozást. Adja meg konkrétan (azaz $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mintájára) az $\mathcal{F}$ osztályozást!

 $\mathcal{F} =$

dmnv1CSP-28/A

CzG

A vizsgázó neve=

(3) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$(\forall x)(B(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\exists x)(\neg B(x, y) \rightarrow \neg(x = y)) \quad (1)$$

$$(\exists x)(B(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\forall x)(\neg(B(x, y) \rightarrow x = y)) \quad (2)$$

$$\neg((\forall x)(B(x, y) \rightarrow x = y)) \iff (\exists x)(B(x, y) \wedge \neg(x = y)) \quad (3)$$

!	(1) ☐	(2) ☐	(3) ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(4) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(4 - 3i)z = 1 - 7i$. Mennyi z valós része az alábbiak közül?

!	-7 ☐	-5 ☐	-2 ☐	0 ☐	1 ☐	2 ☐	5 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(5) Legyen $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}, x \mapsto (x^2 + 1, 2x^2 + 2)$, és $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak? (Emlékeztető: $u(\varphi\psi) := (u\varphi)\psi$.)

„ φ injektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

„ $\varphi\psi$ szürjektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

„ ψ szürjektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(6) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbf{Q}^2 : x \leq y\}$ és $B := \{\text{prímszámok}\}$. $P(X)$ (most is) az X hatványhalmazát jelöli. Jelölje be a **megszámlálhatóan végtelen** halmazokat az alábbiak közül:

?	$A \times B$ ☐	$P(B)$ ☐	$\mathbf{N} \setminus B$ ☐	$B \times \mathbf{R}$ ☐	$A \cup B$ ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	------------------------------	--	---	----------------------------------	---------------------------------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(7) Legyen H egy olyan formula, amelyik az alábbi mondatot formalizálja:

„Ha mindenki jelest kap, akkor néhányan fokozzák a teljesítményüket”.

A predikátumjelek jelentése a következő. $J(x)$: „ x jelest kap”, $F(x)$: „ x fokozza a teljesítményét”. Az alábbi formulák közül az egyik ekvivalens a H **negáltjával**. Melyik az? (Útmutatás: célszerű H -t felírnia.)

$$K : (\forall x)\neg J(x) \rightarrow (\exists x)\neg F(x),$$

$$L : (\forall y)J(y) \wedge (\forall y)\neg F(y),$$

$$M : (\exists y)J(y) \wedge (\forall z)\neg F(z).$$

!	K ☐	L ☐	M ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

A vizsgázó neve=

(8) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 8\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma := A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

? tranzitív ☐ antiszimmetrikus ☐ dichotom ☐ egyik sem ☐ ?

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(9) Hány **különböző** valós sajátértéke van az $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixnak?

! 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ $\aleph_0$ ☐ kontinuum sok ☐ egyik sem ☐ !

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(10) Legyen

$$\vec{a} = (-1, 2, 1), \quad \vec{b} = (-3, 1, 2), \\ \vec{v}_1 = (7, 1, -4), \quad \vec{v}_2 = (-10, 0, 6), \quad \vec{v}_3 = (1, 3, -2).$$

Mely $i \in \{1, 2, 3\}$ index(ek) esetén lesz az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ vektorrendszer lineárisan függő?

? 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ egyik sem ☐ ?

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

Olvasható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pon-tosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(1) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(5 - 3i)z = 2 - 8i$. Mennyi z képzetes része az alábbiak közül? (Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

!	-8	○	-5	○	-2	○	-1	○	0	○	2	○	5	○	8	○	egyik sem	○	!
---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------	---	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(2) Legyen A tetszőleges nemüres halmaz. Igazak-e ekkor szükségképpen az alábbi kijelentések? (Itt P a hatványhalmaz képzését jelöli, azaz $P(B) := \{X : X \subseteq B\}$.)

Az $\{(X, Y) : X \subset Y\} \subseteq P(A)^2$ reláció tranzitív.

$|P(\emptyset) \times A| = |A|$.

$|P(A \times A)| \neq \aleph_0$.

!	igen	○	nem	○	!
!	igen	○	nem	○	!
!	igen	○	nem	○	!

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Az A -n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{0, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 5\}\}$, illetve $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 5\}, \{1\}, \{3, 4\}\}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát jelölje α , illetve β . Jelölje $\mathcal{F}$ az $\alpha \cap \beta$ ekvivalenciához tartozó osztályozást. Adja meg konkrétan (azaz $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mintájára) az $\mathcal{F}$ osztályozást!

$\mathcal{F} =$

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

A vizsgázó neve=

- (4) Hány **különböző** valós sajátértéke van az $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak?

!	0	1	2	3	4	5	$\aleph_0$	kontinuum sok	egyik sem	!
---	---	---	---	---	---	---	------------	---------------	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

- (5) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$(\exists x)(x = y \rightarrow K(x, y)) \iff (\forall x)(\neg(x = y) \rightarrow K(x, y)) \quad (1)$$

$$\neg((\forall x)(x = y \rightarrow K(x, y))) \iff (\exists x)(x = y \wedge \neg K(x, y)) \quad (2)$$

$$(\forall x)(K(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\exists x)(\neg K(x, y) \rightarrow \neg(x = y)) \quad (3)$$

!	(1)	(2)	(3)	egyik sem	!
---	-----	-----	-----	-----------	---

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

- (6) Legyen $\alpha : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $x \mapsto (x^2 + 1, 2x^2 + 2)$, és $\beta : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}_0$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. Igazak-e az alábbiak:

„ β szürjektív.”

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

„ α injektív.”

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

„ $\alpha\beta$ szürjektív.”

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

- (7) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 15\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| \geq 2\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált β reláció?

?	antiszimmetrikus	dichotom	reflexív	egyik sem	?
---	------------------	----------	----------	-----------	---

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

A vizsgázó neve=

- (8) Az alábbi mátrixok közül az egyik invertálható. Jelölje X ezen mátrix inverzét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adja meg X elemeinek az **összegét!** (Tehát egy kilenctagú összeget keresünk.)

!	0	1	2	-1	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	3	egyik sem	!
---	---	---	---	----	----	----------------	---------------	---	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B

CzG

- (9) Tegyük fel, hogy a G formula az alábbi mondatot formalizálja:

„Ha senki sem tétlen, akkor néhányan sikeresek.”

azon a nyelven, amelyben mindössze két predikátumjel van: a $T(x)$ jelentése „ x tétlen”, az $S(x)$ jelentése pedig „ x sikeres”. Az alábbi formulák közül melyik ekvivalens G **negáltjával**? (Útmutatás: célszerű G -t felírnia, majd negálni a tanult módon.)

$$\begin{aligned} U : & \quad (\forall y)(\neg T(y) \wedge \neg S(y)), \\ H : & \quad (\forall x)(T(x) \rightarrow (\exists x)S(x)), \\ M : & \quad (\exists y)T(y) \wedge (\forall z)\neg S(z). \end{aligned}$$

!	H	M	U	egyik sem	!
---	-----	-----	-----	-----------	---

dmnv1CSP-28/B

CzG

- (10) Legyen

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1, 2, -1), & \vec{b} &= (-3, 1, 2), \\ \vec{v}_1 &= (7, 0, -5), & \vec{v}_2 &= (2, 3, -2), & \vec{v}_3 &= (1, -2, -3). \end{aligned}$$

Mely $i \in \{1, 2, 3\}$ index(ek) esetén lesz az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ vektorrendszer lineárisan független?

?	1	2	3	egyik sem	?
---	---	---	---	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B

CzG

Oltható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemsszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-28/A

CzG

(1) Az alábbi három mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

közül pontosan egy invertálható. Jelölje X ezen mátrix inverzét. Adja meg X elemeinek az **összegét!** (Tehát egy négytagú összeg értékét keressük.)

!	0	○	1	○	2	○	-1	○	-2	○	$-\frac{1}{2}$	○	$\frac{1}{2}$	○	-3	○	egyik sem	○	!
---	---	---	---	---	---	---	----	---	----	---	----------------	---	---------------	---	----	---	-----------	---	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A

CzG

MEGOLDÁS: 1, hiszen csak a harmadik invertálható, és inverze

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

dmnv1CSP-28/A

CzG

(2) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Az A -n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$, illetve $\mathcal{D} = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát jelölje α , illetve β . Jelölje $\mathcal{F}$ az $\alpha \cap \beta$ ekvivalenciához tartozó osztályozást. Adja meg konkrétan (azaz $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mintájára) az $\mathcal{F}$ osztályozást!

$\mathcal{F} =$

MEGOLDÁS: $\{\{0, 2\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$.

A vizsgázó neve=

(3) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$(\forall x)(B(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\exists x)(\neg B(x, y) \rightarrow \neg(x = y)) \quad (1)$$

$$(\exists x)(B(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\forall x)(\neg(B(x, y) \rightarrow x = y)) \quad (2)$$

$$\neg((\forall x)(B(x, y) \rightarrow x = y)) \iff (\exists x)(B(x, y) \wedge \neg(x = y)) \quad (3)$$

!	(1) ☐	(2) ☐	(3) ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen.

(3) Igen, hiszen így kell a kvantort, majd az implikációt tagadni. Tulajdonképpen ennyi is elegendő, hiszen a feladat megmondta, hogy csak egy jó választ kell beírni.

(1) nem, ld. pl. egyelemű interpretáció és azonosan hamis B predikátum esete.

(2) sem: tekintsünk egy legalább kételemű interpretációt és azonosan hamis B predikátumot.

(4) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(4 - 3i)z = 1 - 7i$. Mennyi z valós része az alábbiak közül?

!	-7 ☐	-5 ☐	-2 ☐	0 ☐	1 ☐	2 ☐	5 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

MEGOLDÁS: 1, hiszen $(4 - 3i)\underbrace{(1 - i)}_z = 1 - 7i$.

(5) Legyen $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $x \mapsto (x^2 + 1, 2x^2 + 2)$, és $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak? (Emlékeztető: $u(\varphi\psi) := (u\varphi)\psi$.)

„ φ injektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

„ $\varphi\psi$ szürjektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

„ ψ szürjektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

MEGOLDÁS: Igen. Nem, pl. pozitív számnak nincs őse. Igen.

(6) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbf{Q}^2 : x \leq y\}$ és $B := \{\text{prímszámok}\}$. $P(X)$ (most is) az X hatványhalmazát jelöli. Jelölje be a **megszámlálhatóan végtelen** halmazokat az alábbiak közül:

?	$A \times B$	$P(B)$	$\mathbf{N} \setminus B$	$B \times \mathbf{R}$	$A \cup B$	egyik sem	?
---	--------------	--------	--------------------------	-----------------------	------------	-----------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen, nem, igen, nem.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(7) Legyen H egy olyan formula, amelyik az alábbi mondatot formalizálja:

„Ha mindenki jelest kap, akkor néhányan fokozzák a teljesítményüket”.

A predikátumjelek jelentése a következő. $J(x)$: „ x jelest kap”, $F(x)$: „ x fokozza a teljesítményét”. Az alábbi formulák közül az egyik ekvivalens a H **negáltjával**. Melyik az? (Útmutatás: célszerű H -t felírnia.)

$$\begin{aligned} K : & (\forall x) \neg J(x) \rightarrow (\exists x) \neg F(x), \\ L : & (\forall y) J(y) \wedge (\forall y) \neg F(y), \\ M : & (\exists y) J(y) \wedge (\forall z) \neg F(z). \end{aligned}$$

!	K	L	M	egyik sem	!
---	-----	-----	-----	-----------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

MEGOLDÁS: L . Hiszen ha formalizáljuk a mondatot majd a szokott módon tagadjuk, L -et kapjuk. Mivel a feladat megmondja, hogy egy jó megoldás van, a többi formulát csak ellenőrzésként vizsgáljuk.

K esetén legyen J azonosan igaz; ekkor $K = \mathbf{i}$, de pl. azonosan igaz F mellett L hamis. M esetén: ha F azonosan hamis, de J mindkét logikai értéket felveszi, akkor M igaz, de L hamis.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

A vizsgázó neve=

(8) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 8\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma := A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

?	transzitiv	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem	?
---	------------	------------------	----------	-----------	---

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, igen, nem, nem. Indoklás: mivel $\alpha = \alpha^{-1}$ a „legfeljebb 5 távolságra vannak” reláció, $\beta = A^2$ és $\gamma = \emptyset$.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

(9) Hány **különböző** valós sajátértéke van az $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixnak?

!	0	1	2	3	4	5	$\aleph_0$	kontinuum sok	egyik sem	!
---	---	---	---	---	---	---	------------	---------------	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A _____ CzG

MEGOLDÁS: Kettő.

dmnv1CSP-28/A

CzG

(10) Legyen

$$\vec{a} = (-1, 2, 1), \quad \vec{b} = (-3, 1, 2), \\ \vec{v}_1 = (7, 1, -4), \quad \vec{v}_2 = (-10, 0, 6), \quad \vec{v}_3 = (1, 3, -2).$$

Mely $i \in \{1, 2, 3\}$ index(ek) esetén lesz az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ vektorrendszer lineárisan függő?

?	1	☐	2	☐	3	☐	egyik sem	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/A

CzG

MEGOLDÁS: 1, 2. Több úton is gyorsan lehet számolni, a leggyorsabban elemi automorfizmusokkal. Az adott sorrendben a vektorainkat egy mátrixba elhelyezve az oszlopvektorokon végzünk elemi átalakításokat, amelyet követően az eredmény leolvasható:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ -3 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \\ -10 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \\ -4 & -12 & 6 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

dmnv1CSP-28/A

CzG

Oltható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pon-tosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(1) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(5 - 3i)z = 2 - 8i$. Mennyi z képzetes része az alábbiak közül? (Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

!	-8	○	-5	○	-2	○	-1	○	0	○	2	○	5	○	8	○	egyik sem	○	!
---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------	---	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: -1 , hiszen $(5 - 3i)\underbrace{(1 - i)}_z = 2 - 8i$.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(2) Legyen A tetszőleges nemüres halmaz. Igazak-e ekkor szükségképpen az alábbi kijelentések? (Itt P a hatványhalmaz képzését jelöli, azaz $P(B) := \{X : X \subseteq B\}$.)

Az $\{(X, Y) : X \subset Y\} \subseteq P(A)^2$ reláció tranzitív.

!	igen	○	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

$|P(\emptyset) \times A| = |A|$.

!	igen	○	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

$|P(A \times A)| \neq \aleph_0$.

!	igen	○	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen. Igen, hiszen $|P(\emptyset)| = 1$. Igen, hiszen ha A véges, akkor $P(A \times A)$ is véges; ha pedig végtelen, akkor $\aleph_0 \leq |A \times A| < |P(A \times A)|$.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Az A -n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{0, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 5\}\}$, illetve $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 5\}, \{1\}, \{3, 4\}\}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát jelölje α , illetve β . Jelölje $\mathcal{F}$ az $\alpha \cap \beta$ ekvivalenciához tartozó osztályozást. Adja meg konkrétan (azaz $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mintájára) az $\mathcal{F}$ osztályozást!

$\mathcal{F} =$

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: $\{\{0, 2\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

A vizsgázó neve=

(4) Hány **különböző** valós sajátértéke van az $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak?

! 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ $\aleph_0$ ☐ kontinuum sok ☐ egyik sem ☐ !

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: Három.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(5) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$(\exists x)(x = y \rightarrow K(x, y)) \iff (\forall x)(\neg(x = y) \rightarrow K(x, y)) \quad (1)$$

$$\neg((\forall x)(x = y \rightarrow K(x, y))) \iff (\exists x)(x = y \wedge \neg K(x, y)) \quad (2)$$

$$(\forall x)(K(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\exists x)(\neg K(x, y) \rightarrow \neg(x = y)) \quad (3)$$

! (1) ☐ (2) ☐ (3) ☐ egyik sem ☐ !

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, nem.

(2) igaz, hiszen így kell a kvantort, majd az implikációt tagadni. Tulajdonképpen ennyi is elegendő, hiszen a feladat megmondta, hogy csak egy jó választ kell beírni.

(1) nem, hiszen az egyelemű interpretáció és (azonosan) hamis K esetén a formula hamis.

(3) nem, amint azt az egynél több elemű interpretáción az azonosan igaz K mutatja.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(6) Legyen $\alpha : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, x \mapsto (x^2 + 1, 2x^2 + 2)$, és $\beta : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}_0, (x, y) \mapsto |x - y|$. Igazak-e az alábbiak:

„ β szűrjektív.”

! igen ☐ nem ☐ !

„ α injektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

„ $\alpha\beta$ szürjektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

dmnv1CSP-28/B

CzG

MEGOLDÁS: Igen. Igen. Nem, pl. a 0-nak nincs őse.

dmnv1CSP-28/B

CzG

(7) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 15\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| \geq 2\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált β reláció?

?	antiszimmetrikus ☐	dichotom ☐	reflexív ☐	egyik sem ☐	?
---	--	--------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	---

dmnv1CSP-28/B

CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, igen, nem. Indoklás: mivel $\alpha = \alpha^{-1}$ a „legalább 2 távolságra vannak” reláció, ezért bármely $x, y \in A$ esetén van olyan $z \in A$, hogy z „elég távol” van x -től is és y -től is, azaz $(x, z) \in \alpha^{-1}$ és $(z, y) \in \alpha$, azaz $(x, y) \in \beta$. Ezért $\beta = A^2$.

dmnv1CSP-28/B

CzG

A vizsgázó neve=

(8) Az alábbi mátrixok közül az egyik invertálható. Jelölje X ezen mátrix inverzét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adja meg X elemeinek az **összegét!** (Tehát egy kilenctagú összeget keresünk.)

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	-1 ☐	-2 ☐	$-\frac{1}{3}$ ☐	$\frac{1}{2}$ ☐	3 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B

CzG

MEGOLDÁS: 3, hiszen csak a harmadik invertálható, és inverze önmaga.

dmnv1CSP-28/B

CzG

(9) Tegyük fel, hogy a G formula az alábbi mondatot formalizálja:

„Ha senki sem tétlen, akkor néhányan sikeresek.”

azon a nyelven, amelyben mindössze két predikátumjel van: a $T(x)$ jelentése „ x tétlen”, az $S(x)$ jelentése pedig „ x sikeres”. Az alábbi formulák közül melyik ekvivalens G **negáltjával**? (Útmutatás: célszerű G -t felírni, majd negálni a tanult módon.)

$$\begin{aligned} U : & \quad (\forall y)(\neg T(y) \wedge \neg S(y)), \\ H : & \quad (\forall x)(T(x) \rightarrow (\exists x)S(x)), \\ M : & \quad (\exists y)T(y) \wedge (\forall z)\neg S(z). \end{aligned}$$

!	H	☐	M	☐	U	☐	egyik sem	☐	!
---	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: U .

G lehet pl. $\neg(\exists y)T(y) \rightarrow (\exists y)S(y)$. Ennek tagadása a szokott módon $\neg(\exists y)T(y) \wedge \neg(\exists y)S(y)$, azaz $(\forall y)\neg T(y) \wedge (\forall y)\neg S(y)$, ami nyilván ekvivalens U -val.

H esetén: vegyünk egy olyan interpretációt, ahol $S(x)$ azonosan igaz. Ekkor H igaz, de U hamis.

M esetén: Ha T is és S is azonosan hamis, akkor M hamis, de U igaz.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

(10) Legyen

$$\vec{a} = (1, 2, -1), \quad \vec{b} = (-3, 1, 2), \\ \vec{v}_1 = (7, 0, -5), \quad \vec{v}_2 = (2, 3, -2), \quad \vec{v}_3 = (1, -2, -3).$$

Mely $i \in \{1, 2, 3\}$ index(ek) esetén lesz az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ vektorrendszer lineárisan független?

?	1	☐	2	☐	3	☐	egyik sem	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-28/B _____ CzG

MEGOLDÁS: 2, 3. Több úton is gyorsan lehet számolni, a leggyorsabban elemi automorfizmusokkal. Az adott sorrendben a vektorainkat egy mátrixba elhelyezve az oszlopvektorokon végzünk elemi átalakításokat, amelyet követően az eredmény leolvasható:

$$\begin{pmatrix} \textcolor{black}{1} & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ -3 & 7 & \textcolor{black}{-1} \\ 7 & -14 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -18 & 2 \end{pmatrix}$$

dmnv1CSP-28/B _____ CzG