

Olvasható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pon-tosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-25-A

CzG

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5	-3	0	2	1	4	$x - 2$	$x^2 - 4x + 4$	egyik sem	!
---	----	----	---	---	---	---	---------	----------------	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A

CzG

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbf{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	tranzitív	egyik sem	?
---	------------------	----------	-----------------	-----------	-----------	---

dmnv1CSP-25-A

CzG

(3) Legyen $f : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?
---	--------------	----------------	--------------	-----------	---

dmnv1CSP-25-A

CzG

A vizsgázó neve=

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	egyik sem	?
---	---------------	---------------	---------------	-----------	---

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(6) Melyik lesz sajátértéke a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$	-2	0	1	-1	2	7	$\sqrt{17}$	egyik sem	?
---	--------------	------	-----	-----	------	-----	-----	-------------	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2	5	7	1	4	0	-5	más számérték	nincs értelmezve	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	---------------	------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

A vizsgázó neve=

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

! igen ☐ nem ☐ !

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 25\}$$

! igen ☐ nem ☐ !

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

! igen ☐ nem ☐ !

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbf{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

? $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ☐ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ☐ $\vec{a}, \vec{b}$ ☐ $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ ☐ egyik sem ☐ ?

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

? -11 ☐ -8 ☐ -7 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 8 ☐ 10 ☐ egyik sem ☐ ?

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

Olvasható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pon-tosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-25-B

CzG

(1) Igazak-e **szükségképpen** az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{7 \times 7}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A , és a szóbanforgó alterek az $\mathbf{R}^7$ vektortér alterei.

Ha A -nak van inverze, akkor a transzponáltjának is van inverze.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere egydimenziós, akkor A -nak nincs inverze.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere hétdimenziós.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

dmnv1CSP-25-B

CzG

(2) Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(2 - 6i)z = 16 + 12i$? (Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

!	-3 ☐	-2 ☐	-1 ☐	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	!
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B

CzG

(3) Legyen $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 9\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	szimmetrikus ☐	részbenrendezés ☐	egyik sem ☐	?
---	--	------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------	---

dmnv1CSP-25-B

CzG

A vizsgázó neve=

(4) Legyen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto -y$ és $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $x \mapsto (x, -x)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül? (Emlékeztető: $u(fg) := (uf)g$.)

?	f szürjektív	fg szürjektív	gf bijektív	egyik sem	?
---	----------------	-----------------	---------------	-----------	---

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(5) Legyen $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{\{0, 2\}, A \setminus \{0, 2\}\}, \\ \mathcal{D} &= \{\{-2, 1\}, \{-1, 2\}, \{0\}\} \text{ és} \\ \mathcal{E} &= \{P(\emptyset), A\}.\end{aligned}$$

A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	egyik sem	?
---	---------------	---------------	---------------	-----------	---

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

$$\left((A \wedge \neg A) \rightarrow (A \vee B) \right) \leftrightarrow \left((A \wedge B) \rightarrow (B \vee \neg B) \right)$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	29	5	10	13	0	1	25	más számérték	nincs értelmezve	!
---	----	---	----	----	---	---	----	---------------	------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$$

!	igen	nem	!
---	------	-----	---

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

A vizsgázó neve=

(9) Legyen $\vec{a} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{b} = (3, 0, 1, 1)$, $\vec{c} = (-4, 2, -1, -1)$ és $\vec{d} = (3, 0, 0, -2) \in \mathbf{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függetlenek az alábbi vektorrendszerek közül?

? ☐ $\vec{a}, \vec{b}$ ☐ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ☐ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ ☐ $\vec{0}, \vec{b}, \vec{d}$ ☐ egyik sem ☐ ?

Számolás, indoklás:

s számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

? ☐ -4 ☐ -3 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ egyik sem ☐ ?

Számolás, indoklás:

s számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

Oltható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadni! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet felkiáltójeles kis téglalap, ez esetben **pon-tosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A kérdőjeles kis téglalapok esetén **egy vagy több** körbe kell értelem szerűen $\times$ -et tennie. Az aláhúzott kis téglalapba a végeredményt (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírni. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-25-A

CzG

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5	-3	0	2	1	4	$x - 2$	$x^2 - 4x + 4$	egyik sem	!
---	----	----	---	---	---	---	---------	----------------	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A

CzG

MEGOLDÁS: Egyik sem. A maradék -2 , a hányados pedig $x^2 - 2x + 3$.

dmnv1CSP-25-A

CzG

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbf{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	transzitiv	egyik sem	?
---	------------------	----------	-----------------	------------	-----------	---

dmnv1CSP-25-A

CzG

MEGOLDÁS: Csak az antiszimmetria teljesül.

dmnv1CSP-25-A

CzG

(3) Legyen $f : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	☐	g szürjektív	☐	g injektív	☐	egyik sem	☐	?
---	--------------	-----------------------	----------------	-----------------------	--------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

A vizsgázó neve=

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	☐	$\mathcal{D}$	☐	$\mathcal{E}$	☐	egyik sem	☐	?
---	---------------	-----------------------	---------------	-----------------------	---------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Egyedül $\mathcal{C}$ osztályozás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

!	igen	☐	nem	$\oplus$	!
---	------	-----------------------	-----	----------	---

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Az első formula esetén a kvantorok szokásos tagadása után a de Morgan-szabály alkalmazható. A másodiknál azt érdemes vizsgálni, hogy az $\leftrightarrow$ bal-, illetve jobboldala mikor hamis. Így hamar látható, hogy ha $C = \mathbf{h}$, továbbá A és B közül az egyik igaz és a másik hamis, akkor a baloldal hamis de a jobboldal igaz.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(6) Melyik lesz sajátértéke a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$	☐	-2	☐	0	☐	1	☐	-1	☐	2	☐	7	☐	$\sqrt{17}$	☐	egyik sem	☐	?
---	--------------	-----------------------	------	-----------------------	-----	-----------------------	-----	-----------------------	------	-----------------------	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 0 és 7 . A karakterisztikus polinom: $\lambda^2 - 7\lambda$.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2	5	7	1	4	0	-5	más számérték	nincs értelmezve	!
---	---	---	---	---	---	---	----	---------------	------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 0, hiszen a (3×3) -as szorzatmátrix első oszlopa 0.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

A vizsgázó neve=

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 25\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

!	igen	$\oplus$	nem	$\circ$	!
!	igen	$\circ$	nem	$\oplus$	!
!	igen	$\circ$	nem	$\oplus$	!

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Az igen válasz esetén az egyetlen egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszerről tanultak alkalmazhatók. A másik két esetben a zérusvektor nem eleme a halmaznak!

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbf{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	$\vec{a}, \vec{b}$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$	egyik sem	?
---	-----------------------------	-----------------------------	--------------------	-----------------------------	-----------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Függők: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ és $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

?	-11	☐	-8	☐	-7	☐	0	☐	3	☐	5	☐	8	☐	10	☐	egyik sem	☐	?
---	-----	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $-11, 5$. Ugyanis $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & -9 & -11 \end{pmatrix}$.

dmnv1CSP-25-A _____ CzG

Olvasható név=

EHA_{kód}=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pon-tosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1CSP-25-B

CzG

(1) Igazak-e **szükségképpen** az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{7 \times 7}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A , és a szóbanforgó alterek az $\mathbf{R}^7$ vektortér alterei.

Ha A -nak van inverze, akkor a transzponáltjának is van inverze.

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

Ha $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere egydimenziós, akkor A -nak nincs inverze.

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere hétdimenziós.

!	igen $\bigcirc$	nem $\oplus$	!
---	-----------------	--------------	---

dmnv1CSP-25-B

CzG

(2) Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(2 - 6i)z = 16 + 12i$? (Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

!	-3 $\bigcirc$	-2 $\bigcirc$	-1 $\bigcirc$	0 $\bigcirc$	1 $\bigcirc$	2 $\bigcirc$	3 $\bigcirc$	4 $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	---------------	---------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B

CzG

MEGOLDÁS: 3. $z = -1 + 3i$.

dmnv1CSP-25-B

CzG

(3) Legyen $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 9\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus $\bigcirc$	szimmetrikus $\bigcirc$	részbenrendezés $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	-----------------------------	-------------------------	----------------------------	----------------------	---

MEGOLDÁS: Csak a szimmetria teljesül.

A vizsgázó neve=

(4) Legyen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto -y$ és $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $x \mapsto (x, -x)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül? (Emlékeztető: $u(fg) := (uf)g$.)

?	f szürjektív	$\circ$	fg szürjektív	$\circ$	gf bijektív	$\circ$	egyik sem	$\circ$	?
---	----------------	---------	-----------------	---------	---------------	---------	-----------	---------	---

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen.

(5) Legyen $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{\{0, 2\}, A \setminus \{0, 2\}\}, \\ \mathcal{D} &= \{\{-2, 1\}, \{-1, 2\}, \{0\}\} \text{ és} \\ \mathcal{E} &= \{P(\emptyset), A\}.\end{aligned}$$

A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\circ$	$\mathcal{D}$	$\circ$	$\mathcal{E}$	$\circ$	egyik sem	$\circ$	?
---	---------------	---------	---------------	---------	---------------	---------	-----------	---------	---

MEGOLDÁS: Igen, igen, nem.

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

!	igen	$\oplus$	nem	$\circ$	!
---	------	----------	-----	---------	---

$$\left((A \wedge \neg A) \rightarrow (A \vee B) \right) \leftrightarrow \left((A \wedge B) \rightarrow (B \vee \neg B) \right)$$

!	igen	$\oplus$	nem	$\circ$	!
---	------	----------	-----	---------	---

MEGOLDÁS: Az egyik formulánál az azonosan hamis $A \wedge \neg A$ és az azonosan igaz $B \vee \neg B$ formulának köszönhetően az $\leftrightarrow$ mindkét oldalán tautológia áll. A másik formula esetén a kvantorok szokásos tagadása után a de Morgan-szabály alkalmazható.

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	29	$\circ$	5	$\circ$	10	$\circ$	13	$\circ$	0	$\circ$	1	$\circ$	25	$\circ$	más számérték	$\circ$	nincs értelmezve	$\circ$	!
---	----	---------	---	---------	----	---------	----	---------	---	---------	---	---------	----	---------	---------------	---------	------------------	---------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

MEGOLDÁS: 0, hiszen a kérdéses (3×3) -as mátrix középső oszlopa (és sora is) nulla.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbf{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$$

!	igen ☐	nem ☒	!
!	igen ☒	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☒	!

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

A vizsgázó neve=

(9) Legyen $\vec{a} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{b} = (3, 0, 1, 1)$, $\vec{c} = (-4, 2, -1, -1)$ és $\vec{d} = (3, 0, 0, -2) \in \mathbf{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függetlenek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}$ ☐	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ☐	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ ☐	$\vec{0}, \vec{b}, \vec{d}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	--	---	---	---	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Függetlenek: $\vec{a}, \vec{b}$, valamint $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

?	-4 ☐	-3 ☐	0 ☐	3 ☐	5 ☐	6 ☐	7 ☐	8 ☐	egyik sem ☐	?
---	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG

MEGOLDÁS: $-4, 0$. Ugyanis $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

dmnv1CSP-25-B _____ CzG