

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-03.C2-B

CzG

(1) Az $\mathbb{R}^4$ vektortérben hánydimenziós alteret alkotnak a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai?

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-03.C2-B

CzG

MEGOLDÁS: 2. A Gauss-elimináció mindössze egy lépés; két „lépcsőfokot” kapunk, és ezért kettő szabad ismeretlen van.

dmnv1-03.C2-B

CzG

(2) Melyik az $\vec{u} \times \vec{v}$ vektoriális szorzat a téglalapban megadottak közül, ha

$$\vec{u} = (1, 3, 2), \quad \vec{v} = (2, 2, 3)?$$

!	$\vec{0}$ ☐	$(3, 1, 2)$ ☐	$(6, 6, 6)$ ☐	$(-5, 1, 1)$ ☐	$(5, 1, -4)$ ☐	$(-4, -1, 5)$ ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-03.C2-B

CzG

MEGOLDÁS: $(5, 1, -4)$.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(3) Létezik-e $\mathbf{Q} \rightarrow X$ bijektív leképezés, ha X az alábbi halmazok egyikét jelöli? Amelyik esetén igen, oda tegyen $\times$ -et a karikába! (Útmutatás: vajon milyen témakörhöz kapcsolódik a feladat?)

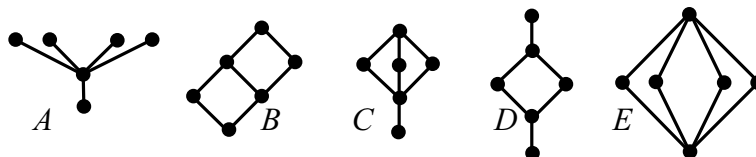
?	$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$	az előzőek egyike sem	?
---	--------------------------------	------------------------------	--------------------------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(4) Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?



?	A	B	C	D	E	egyiknek sincs	?
---	---	---	---	---	---	----------------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Mindegyiknek.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(5) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$((\exists x)T(x) \wedge (\exists x)S(x)) \iff (\exists x)(T(x) \wedge S(x)) \quad (1)$$

$$\neg(\forall x)(T(x) \vee x = y) \iff (\exists x)(\neg T(x, y) \vee \neg(x = y)) \quad (2)$$

$$((\forall x)T(x) \wedge (\forall x)S(x)) \iff (\forall x)(T(x) \wedge S(x)) \quad (3)$$

!	(1)	(2)	(3)	egyik sem	!
---	-----	-----	-----	-----------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: (3). Indoklás: könnyen látható, hogy (3) igaz, hiszen kb. mondjuk csak annyit fejez ki, hogy a „mindenki tanult és mindenki ötöst kap” kijelentés ekvivalens azzal, hogy „mindenki tanult és ötöst kap”. Mivel a feladat megmondta, hogy csak egy jó válasz van, a többi formulát csak a tanulás kedvéért elemezzük. (1) azért nem tautológia, mert — persze máshol — van olyan modell, amelyben „van, aki tanult és van, aki ötöst kap”, de nincs olyan, aki „tanult és ötöst kap”.

A de Morgan-szabály szerint (2) tautológia lenne, ha a jobboldali konjunkció helyett diszjunkció állna. Ezért csak az a kérdés, hogy

$$(\exists x)(\neg T(x, y) \wedge \neg(x = y)) \iff (\exists x)(\neg T(x, y) \vee \neg(x = y))$$

tautológia-e. Látható, hogy nem az, hiszen ha olyan interpretációt választunk, amely legalább kételemű és T az azonosan igaz predikátum, akkor minden egyes y esetén az $\iff$ előtti rész hamis, az $\iff$ utáni rész pedig igaz.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(6) Legyen

$$\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 10, & \text{ha } x \leq 10 \\ x - 10, & \text{ha } x > 10 \end{cases},$$

$$\beta : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, \quad x \mapsto x + 3.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

?	α injektív	☐	α szürjektív	☐	β szürjektív	☐	az előzőek egyike sem	☐	?
---	-------------------	-----------------------	---------------------	-----------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, nem.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(7) A $p \in \mathbf{R}$ paraméter mely értéke(i) mellett lineárisan függő az

$$(1, -2, 0, 1), (0, 3, 2, 1), (1, -8, p, -1)$$

vektorrendszer?

?	4	☐	-4	☐	az előzőek egyike sem	☐	?
---	---	-----------------------	----	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: -4.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(8) A téglalapban felsorolt számok közül melyik az $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = -1$ egyenlet megoldása?

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	-1	☐	-2	☐	-3	☐	27	☐	az előzőek egyike sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: -3.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, és tekintsük az A halmazon értelmezett alábbi relációkat:

$$\begin{aligned}\alpha &= \{(x, y) \in A^2 : x^3 = y^3\}, \\ \beta &= \{(x, y) \in A^2 : |x(x-1)| < |y(y-1)|\}, \\ \gamma &= \{(x, y) \in A^2 : x^2 \leq y^2\}.\end{aligned}$$

Ezek közül melyik részbenrendezés?

!	α	☐	β	☐	γ	☐	egyik sem	☐	!
---	----------	-----------------------	---------	-----------------------	----------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: α . Megjegyezzük, hogy α az egyenlőségreláció, β nem reflexív, továbbá $(-1, 1), (1, -1) \in \gamma$ miatt γ nem antiszimmetrikus.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

(10) Tekintsük az $\mathbf{R}^2$ vektortér alábbi két bázisát:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} : & \quad (1, 0), (0, 1), \quad \text{illetve} \\ \mathcal{F} : & \quad (5, 1), (4, 1).\end{aligned}$$

Melyik az $\mathcal{E}$ bázisról a $\mathcal{F}$ bázisra való áttérés mátrixa az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	☐	egyik sem	☐	!
---	--	-----------------------	--	-----------------------	---	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG

MEGOLDÁS: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, azaz az $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ inverze.

dmnv1-03.C2-B _____ CzG