

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-03.C2-A

CzG

(1) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$((\exists x)B(x) \wedge (\exists x)C(x)) \iff (\exists x)(B(x) \wedge C(x)) \quad (1)$$

$$((\forall x)B(x) \wedge (\forall x)C(x)) \iff (\forall x)(B(x) \wedge C(x)) \quad (2)$$

$$\neg(\forall x)(B(x) \vee x = y) \iff (\exists x)(\neg B(x, y) \vee \neg(x = y)) \quad (3)$$

!	(1) ☐	(2) ☐	(3) ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-03.C2-A

CzG

MEGOLDÁS: (2). Indoklás: könnyen látható, hogy (2) igaz, hiszen kb. mondjuk csak annyit fejez ki, hogy a „mindenki tanult és mindenki ötöst kap” kijelentés ekvivalens azzal, hogy „mindenki tanult és ötöst kap”. Mivel a feladat megmondta, hogy csak egy jó válasz van, a többi formulát csak a tanulás kedvéért elemezzük. (1) azért nem tautológia, mert — **persze máshol** — van olyan modell, amelyben „van, aki tanult és van, aki ötöst kap”, de nincs olyan, aki „tanult és ötöst kap”. A de Morgan-szabály szerint (3) tautológia lenne, ha a jobboldali konjunkció helyett diszjunkció állna. Ezért csak az a kérdés, hogy

$$(\exists x)(\neg B(x, y) \wedge \neg(x = y)) \iff (\exists x)(\neg B(x, y) \vee \neg(x = y))$$

tautológia-e. Látható, hogy nem az, hiszen ha olyan interpretációt választunk, amely legalább kételemű és B az azonosan igaz predikátum, akkor minden egyes y esetén az $\iff$ előtti rész hamis, az $\iff$ utáni rész pedig igaz.

dmnv1-03.C2-A

CzG

(2) Legyen $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, és tekintsük az A halmazon értelmezett alábbi relációkat:

$$\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x(x+1)| < |y(y+1)|\},$$

$$\beta = \{(x, y) \in A^2 : |x(x+1)| = |y(y+1)|\},$$

$$\gamma = \{(x, y) \in A^2 : |x(x+1)| \leq |y(y+1)|\}.$$

Ezek közül melyik ekvivalenciareláció?

!	α	β	γ	egyik sem	!
---	----------	---------	----------	-----------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: β . α nem reflexív, γ pedig nem szimmetrikus.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(3) Melyik az $\vec{u} \times \vec{v}$ vektoriális szorzat a téglalapban megadottak közül, ha

$$\vec{u} = (1, 3, 2), \vec{v} = (1, 2, 3)?$$

!	$(5, -1, -1)$	$\vec{0}$	$(3, 1, 2)$	$(6, -1, 3)$	$(-5, 1, 1)$	$(-4, -1, 5)$	egyik sem	!
---	---------------	-----------	-------------	--------------	--------------	---------------	-----------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $(5, -1, -1)$.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(4) A $p \in \mathbf{R}$ paraméter mely értéke(i) mellett lineárisan függő az

$$(-1, 2, 0, 1), (-3, 0, 1, 2), (-1, -4, p, 0)$$

vektorrendszer?

?	1	-1	az előzőek egyike sem	?
---	---	----	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 1.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(5) A téglalapban felsorolt számok közül melyik az $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$ egyenlet megoldása?

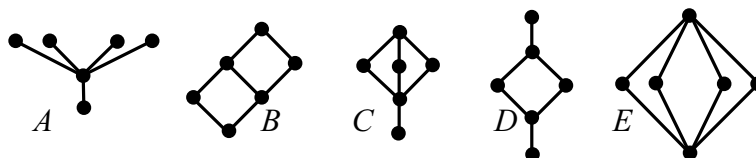
!	0	1	2	3	-1	-2	-3	27	az előzőek egyike sem	!
---	---	---	---	---	----	----	----	----	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 1.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(6) Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legnagyobb eleme?



?	A	☐	B	☐	C	☐	D	☐	E	☐	egyiknek sincs	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	----------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: B, C, D, E.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(7) Legyen

$$\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, \quad x \mapsto x + 7,$$

$$\beta : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leq 3 \\ x - 3, & \text{ha } x > 3 \end{cases}.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

?	α szürjektív	☐	β injektív	☐	α injektív	☐	az előzőek egyike sem	☐	?
---	---------------------	-----------------------	------------------	-----------------------	-------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(8) Az $\mathbf{R}^5$ vektortérben hánydimenziós alteret alkotnak a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai?

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	egyik sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 3. A Gauss-elimináció mindössze egy lépés; két „lépcsőfokot” kapunk, és ezért három szabad ismeretlen van.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(9) Legyen $S = \mathbf{Q} \times \mathbf{N}$. Létezik-e $S \rightarrow X$ bijektív leképezés, ha X az alábbi halmazok egyikét jelöli? Amelyik esetén igen, oda tegyen $\times$ -et a karikába! (Útmutatás: vajon milyen témakörhöz kapcsolódik a feladat?)

?	$\mathbf{N} \times \mathbf{Q}$	☐	$\mathbf{R}$	☐	$\mathbf{N}$	☐	az előzőek egyike sem	☐	?
---	--------------------------------	-----------------------	--------------	-----------------------	--------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

(10) Tekintsük az $\mathbf{R}^2$ vektortér alábbi két bázisát:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : & \quad (1, 0), (0, 1), \quad \text{illetve} \\ \mathcal{F} : & \quad (1, 2), (1, 3). \end{aligned}$$

Melyik az $\mathcal{E}$ bázisról a $\mathcal{F}$ bázisra való áttérés mátrixa az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	☐	egyik sem	☐	!
---	--	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, azaz az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ inverze.

dmnv1-03.C2-A _____ CzG