

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-02.C3-B

CzG

(1) Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi az $(A - C)(A + B)$ mátrix determinánsa?

!	0 ☐	14 ☐	-12 ☐	1 ☐	-42 ☐	20 ☐	egyéb érték ☐	nincs is értelmezve ☐	!
---	-------------------------	--------------------------	---------------------------	-------------------------	---------------------------	--------------------------	-----------------------------------	---	---

dmnv1-02.C3-B

CzG

MEGOLDÁS: Nincs értelmezve.

dmnv1-02.C3-B

CzG

(2) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 9\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| = 2\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ (más írásmódban: $\beta := \alpha^{-1} \circ \alpha$). Az alábbi elem párok közül melyek elemei a β relációnak?

?	(4, 4) ☐	(4, 5) ☐	(4, 6) ☐	(4, 7) ☐	(4, 8) ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-02.C3-B

CzG

MEGOLDÁS: (4, 4), (4, 8).

dmnv1-02.C3-B

CzG

(3) Legyen $\alpha : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $x \mapsto (1 - x^2, 1 + x^2)$, és $\beta : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}_0$, $(x, y) \mapsto |x + y|$. Igazak-e az alábbiak:

„ α injektív leképezés.”

„ β szürjektív leképezés.”

„ $\alpha\beta : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$ szürjektív leképezés.”

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\oplus$	!

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

(4) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 \geq y^3\}$ és $B := \mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}$. $P(X)$ (most is) az X hatványhalmazát jelöli. Jelölje be a **megszámlálhatóan végtelen** halmazokat az alábbiak közül:

?	A $\bigcirc$	B $\bigcirc$	$P(A^2)$ $\bigcirc$	$A \cup \mathbf{R}$ $\bigcirc$	$A \cup B^2$ $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	----------------	----------------	---------------------	--------------------------------	-------------------------	----------------------	---

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, igen, nem, nem, igen.

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

(5) Legyen U tetszőleges nemüres halmaz. Igazak-e ekkor szükségképpen az alábbi kijelentések?

A $P(U)$ halmazon értelmezett $\{(X, Y) : X \subset Y\} \subseteq P(U)^2$ reláció tranzitív.

$|P(\emptyset) \times U| = |U|$.

$|P(U \times U)| \neq \aleph_0$.

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

(6) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$\left(\neg \left((\forall x)(x = y \rightarrow B(x, y)) \right) \right) \iff \left((\exists x)(x = y \wedge \neg B(x, y)) \right) \quad (1)$$

$$(\exists x)(x = y \rightarrow T(x, y)) \iff (\forall x) \left(\neg(x = y) \rightarrow T(x, y) \right) \quad (2)$$

$$(\forall x)(K(x, y) \rightarrow x = y) \iff (\exists x)(\neg K(x, y) \rightarrow \neg(x = y)) \quad (3)$$

!	(1) $\bigcirc$	(2) $\bigcirc$	(3) $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	----------------	----------------	----------------	----------------------	---

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, nem.

(1) igaz, hiszen így kell a kvantort, majd az implikációt tagadni. Tulajdonképpen ennyi is elegendő, hiszen a feladat megmondta, hogy csak egy jó választ kell beírni.

(2) nem, hiszen az egyelemű interpretáció és (azonosan) hamis T esetén a formula hamis.

(3) nem, amint azt az egynél több elemű interpretáción az azonosan igaz K mutatja.

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

(7) Tegyük fel, hogy a G formula az alábbi mondatot formalizálja:

„Ha senki sem fél, akkor néhányan túlélnek.”

azon a nyelven, amelyben mindössze két predikátumjel van: az $F(x)$ jelentése „ x fél”, a $T(x)$ jelentése pedig „ x túlél”. Az alábbi formulák közül melyik ekvivalens G **negáltjával**?

$$\begin{aligned} H : & (\forall x)(F(x) \rightarrow (\exists x)T(x)), \\ M : & (\forall y)(\neg F(y) \wedge \neg T(y)), \\ U : & (\exists y)F(y) \wedge (\forall z)\neg T(z). \end{aligned}$$

!	H	☐	M	☐	U	☐	egyik sem	☐	!
---	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-----	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

MEGOLDÁS: M .

G lehet pl. $\neg(\exists y)F(y) \rightarrow (\exists y)T(y)$. Vagy pedig $(\forall y)\neg F(y) \rightarrow (\exists y)T(y)$. Ennek tagadása a szokott módon $(\forall y)\neg F(y) \wedge (\forall y)\neg T(y)$, ami nyilván ekvivalens M -mel. Mivel a feladat megmondta, hogy csak egy jó válasz van, itt meg is állhatnánk.

H esetén: vegyünk egy olyan interpretációt, ahol $T(x)$ azonosan igaz. Ekkor H igaz, de M hamis.

U esetén: Ha F is és T is azonosan hamis, akkor U hamis, de M igaz.

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

(8) Az alábbi mátrixok közül az egyik invertálható. Jelölje X ezen mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adja meg X elemeinek az **összegét**! (Tehát egy kilenctagú összeget keresünk.)

!	0	☐	1	☐	2	☐	-1	☐	-2	☐	$-\frac{1}{3}$	☐	$\frac{1}{2}$	☐	3	☐	egyik sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	----------------	-----------------------	---------------	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

MEGOLDÁS: 3, hiszen csak a harmadik invertálható, és inverze önmaga.

dmnv1-02.C3-B _____ CzG

(9) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Az A -n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{0, 3, 4\}, \{1, 2\}\}$, illetve $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}\}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát jelölje α , illetve β . Jelölje $\mathcal{F}$ az $\alpha \cap \beta$ ekvivalenciához tartozó osztályozást. Adja meg konkrétan (azaz $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mintájára) az $\mathcal{F}$ osztályozást!

$\mathcal{F} =$

MEGOLDÁS: $\{\{0, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

(10) Legyen

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1, 2, -1), & \vec{b} &= (-3, 1, 2), \\ \vec{v}_1 &= (1, -2, -3), & \vec{v}_2 &= (4, 6, -4), & \vec{v}_3 &= (7, 0, -5).\end{aligned}$$

Mely $i \in \{1, 2, 3\}$ index(ek) esetén lesz az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ vektorrendszer lineárisan független?

?	1	☐	2	☐	3	☐	egyik sem	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

MEGOLDÁS: 1, 2. Több úton is gyorsan lehet számolni, a leggyorsabban elemi automorfizmusokkal. Az adott sorrendben a vektorainkat egy mátrixba elhelyezve az oszlopvektorokon végzünk elemi átalakításokat, amelyet követően az eredmény leolvasható:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & 7 & \boxed{-1} \\ 1 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 7 & -14 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 7 & -18 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$