

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-02.C3-A

CzG

(1) Melyik tautológia az alábbi formulák közül?

$$\left((\forall x)(D(x, y) \rightarrow x = y) \right) \iff \left((\exists x)(\neg D(x, y) \rightarrow \neg(x = y)) \right) \quad (1)$$

$$\neg \left((\forall x)(T(x, y) \rightarrow x = y) \right) \iff (\exists x)(T(x, y) \wedge \neg(x = y)) \quad (2)$$

$$(\exists x)(T(x, y) \rightarrow B(x, y)) \iff (\forall x)(\neg(T(x, y) \rightarrow B(x, y))) \quad (3)$$

!	(1) ☐	(2) ☐	(3) ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-02.C3-A

CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, nem.

(2) Igen, hiszen így kell a kvantort, majd az implikációt tagadni. Tulajdonképpen ennyi is elegendő, hiszen a feladat megmondta, hogy csak egy jó választ kell beírni.

(1) nem, ld. pl. egyelemű interpretáció és azonosan hamis D predikátum esete.

(3) sem: ld. pl. azonosan hamis B és azonosan hamis T predikátum esete.

dmnv1-02.C3-A

CzG

(2) Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Az A -n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$, illetve $\mathcal{D} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát jelölje α , illetve β . Jelölje $\mathcal{F}$ az $\alpha \cap \beta$ ekvivalenciához tartozó osztályozást. Adja meg konkrétan (azaz $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mintájára) az $\mathcal{F}$ osztályozást!

$\mathcal{F} =$

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(3) Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi az AB^2C mátrix determinánsa? (A hatványozás itt is ismételt szorzást jelent.)

!	0	○	12	○	-12	○	1	○	-42	○	20	○	egyéb valós szám	○	nincs is értelmezve	○	!
---	---	---	----	---	-----	---	---	---	-----	---	----	---	------------------	---	---------------------	---	---

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nincs értelmezve.

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(4) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 8\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, és legyen $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ (más írásmóddal: $\beta := \alpha^{-1} \circ \alpha$). Az alábbi elempárok közül melyek elemei β -nak?

?	(4, 4)	○	(3, 5)	○	(1, 7)	○	(0, 8)	○	egyik sem	○	?
---	--------	---	--------	---	--------	---	--------	---	-----------	---	---

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Mindegyik. Indoklás: mivel $\alpha = \alpha^{-1}$ a „legfeljebb 5 távolságra vannak” reláció, $\beta = A^2$.

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(5) Legyen H egy olyan formula, amelyik az alábbi mondatot formalizálja:

„Ha mindenki látta a filmet, akkor néhány késnek az óráról”.

A predikátumjelek jelentése a következő. $L(z)$: „ z látta a filmet”, $K(z)$: „ z késik az óráról”. Az alábbi formulák közül az egyik ekvivalens a H **negáltjával**. Melyik az?

$$\begin{aligned} U : & \quad (\forall x)\neg L(x) \rightarrow (\exists x)\neg K(x), \\ V : & \quad (\forall y)L(y) \wedge (\forall y)\neg K(y), \\ W : & \quad (\exists y)L(y) \wedge (\forall z)\neg K(z). \end{aligned}$$

!	U	○	V	○	W	○	egyik sem	○	!
---	-----	---	-----	---	-----	---	-----------	---	---

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: V . Hiszen ha formalizáljuk a mondatot majd a szokott módon tagadjuk, V -t kapjuk. Mivel a feladat megmondja, hogy egy jó megoldás van, a többi formulát csak ellenőrzésként vizsgáljuk.

U esetén legyen L is és K is azonosan igaz; ekkor U igaz, de V hamis. Ezért U nem ekvivalens V -vel. W esetén: ha K azonosan hamis, L pedig mindkét logikai értéket felveszi, akkor W igaz, de V hamis. Ezért W sem ekvivalens V -vel.

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(6) Legyen A tetszőleges nemüres halmaz. Igazak-e ekkor szükségképpen az alábbi kijelentések?

$$|P(A)| \neq \aleph_0.$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

$$|P(\emptyset) \times A| = |A|.$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

Az $A \rightarrow P(A)$, $x \mapsto A \setminus \{x\}$ leképezés injektív.

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: (a) ha A véges, akkor $P(A)$ is véges; ha pedig végtelen, akkor $|\mathbf{N}| = \aleph_0 \leq |A| < |P(A)|$.
 (b) $|P(\emptyset)| = 1$ miatt. (c) a leképezést φ -vel jelölve $\varphi \circ \varphi$ az identikus leképezés, ami injektív, ezért az első tényező, azaz φ is injektív. (De közvetlenül számolással is kijön.)

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(7) Legyen $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$, és $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

„ $\varphi\psi$ szürjektív.”

„ φ injektív.”

„ ψ szürjektív.”

!	igen	☐	nem	☒	!
!	igen	☒	nem	☐	!
!	igen	☒	nem	☐	!

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(8) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbf{Q}^2 : x \leq y\}$ és $B := \{2^n : n \in \mathbf{N}\}$. $P(X)$ (most is) az X hatványhalmazát jelöli. Jelölje be a **megszámlálhatóan végtelen** halmazokat az alábbiak közül:

?	$P(B)$	☐	$\mathbf{N} \setminus B$	☐	$B \times \mathbf{R}$	☐	$A \cup B$	☐	egyik sem	☐	?
---	--------	-----------------------	--------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, nem, igen.

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(9) Legyen

$$\vec{a} = (-1, 2, 1), \quad \vec{b} = (-3, 1, 2), \\ \vec{v}_1 = (7, 1, -4), \quad \vec{v}_2 = (1, 3, -2), \quad \vec{v}_3 = (-5, 0, 3).$$

Mely $i \in \{1, 2, 3\}$ index(ek) esetén lesz az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ vektorrendszer lineárisan függő?

?	1	☐	2	☐	3	☐	egyik sem	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 1, 3. Több úton is gyorsan lehet számolni, a leggyorsabban elemi automorfizmusokkal. Az adott sorrendben a vektorainkat egy mátrixba (soroknak) elhelyezve az oszlopvektorokon végzünk elemi átalakításokat, amelyet követően az eredmény leolvasható:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ -3 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \\ -1 & 7 & -2 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 10 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

(10) Az alábbi három mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

közül pontosan egy invertálható. Jelölje X ezen mátrix inverzét. Adja meg X elemeinek az **összegét!** (Tehát egy négytagú összeget keresünk.)

!	$-\frac{5}{4}$	$\circ$	1	$\circ$	0	$\circ$	$\frac{3}{4}$	$\circ$	-2	$\circ$	$-\frac{1}{4}$	$\circ$	$\frac{1}{2}$	$\circ$	$-\frac{1}{2}$	$\circ$	egyik sem	$\circ$	!
---	----------------	---------	---	---------	---	---------	---------------	---------	----	---------	----------------	---------	---------------	---------	----------------	---------	-----------	---------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-02.C3-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\frac{1}{2}$, hiszen csak a harmadik invertálható, és inverze

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

dmnv1-02.C3-A _____ CzG