

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-01.C1-D

CzG

(1) A téglalapban felsoroltak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 > y^2\}$ reláció?

?	reflexív ☐	transzitiv ☐	antiszimmetrikus ☐	egyik sem ☐	?
---	--------------------------------	----------------------------------	--	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-D

CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, igen.

dmnv1-01.C1-D

CzG

(2) Az alábbi mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

közül jelöljön meg legfeljebb egyet (**de ne többet!**), amelyeknek a determinánsa **nem** nulla. (Útmutatás: az ötletes vizsgáló ki sem számolja a determinánsokat!)

!	A ☐	B ☐	C ☐	nincs ilyen ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-01.C1-D

CzG

MEGOLDÁS: B . Vandermonde-determináns!

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(3) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x+y \geq 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : |x| = y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A, (x, y) \mapsto y$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f szürjektív	☐	f injektív	☐	g szürjektív	☐	egyik sem	☐	?
---	----------------	-----------------------	--------------	-----------------------	----------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, nem. Ugyanis: $y = (-y, y)f$. $(1, 0)f = (2, 0)f$. $(x, y)g = (x, |x|)g = |x| \geq 0$.

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(4) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \vee \neg A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg A)$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(x, y))$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

$$((\exists x)B(x) \vee (\exists y)C(y)) \rightarrow (\exists x)(B(x) \vee C(x))$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

$$(\forall x)(\forall y)B(x, y) \rightarrow (\forall x)B(x, x)$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(6) Legyen $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ és $B = \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	B	☐	A	☐	$A \times B$	☐	$B \times \mathbf{N}$	☐	egyik sem	☐	?
---	-----	-----------------------	-----	-----------------------	--------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, nem, igen.

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(7) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	☐	egyik sem	☐	!
---	--	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	--	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(8) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	3	☐	5	☐	$-\frac{1}{4}$	☐	-1	☐	1	☐	-3	☐	0	☐	$-\frac{3}{2}$	☐	az előzőek egyike sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	----------------	-----------------------	----	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	---	-----------------------	----------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: 0, ugyanis $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(9) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbf{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbf{R}^6$ -beli

$$(2, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 1), (-2, x, -2, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	1	☐	2	☐	3	☐	egyik sem	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: Csakis $x = 1$ esetén.

dmnv1-01.C1-D _____ CzG

(10) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

$$EAB = AEB$$

Ha A is és B is invertálható, akkor $\det(AB) \neq 0$

$$AB = BA$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
!	igen	☐	nem	$\oplus$	!

dmnv1-01.C1-D _____ CzG