

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

- (1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ☐	egyik sem ☐	!
---	--	--	--	--	--	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

- (2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ☐	1 ☐	$\frac{1}{4}$ ☐	$-\frac{1}{2}$ ☐	-1 ☐	9 ☐	-4 ☐	$\frac{3}{2}$ ☐	az előzőek egyike sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------------------	---	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: -1 , ugyanis $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbf{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbf{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0	☐	1	☐	2	☐	egyik sem	☐	?
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: Csakis $x = 2$ esetén.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	transzitív	☐	antiszimmetrikus	☐	dichotom	☐	egyik sem	☐	?
---	------------	-----------------------	------------------	-----------------------	----------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6 , a 2007 utolsó számjegye 7 , a 130 utolsó számjegye pedig 0 .) (Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	8	☐	9	☐	d nem egész szám	☐	az előzőek egyike sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:

s számolás, indoklás.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: 0, hiszen Vandermonde-determináns lévén $(3-1)(6-1)(6-3)$.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow A))$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

!	igen	☐	nem	$\oplus$	!
---	------	-----------------------	-----	----------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.

$$BEA = AEB.$$

Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

!	igen	☐	nem	$\oplus$	!
---	------	-----------------------	-----	----------	---

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y)) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$$

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(x, y))$$

!	igen	☐	nem	$\oplus$	!
---	------	-----------------------	-----	----------	---

!	igen	$\oplus$	nem	☐	!
---	------	----------	-----	-----------------------	---

$$(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)B(y, x)$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív $\bigcirc$	g szürjektív $\bigcirc$	g injektív $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	-------------------------	---------------------------	-------------------------	----------------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A $\bigcirc$	$\mathbf{R}$ $\bigcirc$	$A \times \mathbf{Z}$ $\bigcirc$	$\mathbf{N}$ $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	----------------	-------------------------	----------------------------------	-------------------------	----------------------	---

dmnv1-01.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen, igen.

dmnv1-01.C1-C _____ CzG