

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvény táblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-01.C1-B

CzG

(1) Az alábbi mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 13 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

közül jelöljön meg legfeljebb egyet (**de ne többet!**), amelyeknek a determinánsa **nem** nulla. (Útmutatás: az ötletes vizsgáló ki sem számolja a determinánsokat!)

!	A ☐	B ☐	C ☐	nincs ilyen ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------------------	---

dmnv1-01.C1-B

CzG

MEGOLDÁS: C. Vandermonde-determináns!

dmnv1-01.C1-B

CzG

(2) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbf{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbf{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 3, 0), (4, 0, 2, 0), (x, 4, 8, 0)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	1 ☐	2 ☐	0 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-B

CzG

MEGOLDÁS: Csakis $x = 2$ esetén.

dmnv1-01.C1-B

CzG

(3) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(\forall x)(\forall y)B(x, y) \rightarrow (\forall x)B(x, x)$$

!	igen $\oplus$	nem ☐	!
---	---------------	---------------------------	---

$$\left((\exists x)B(x) \vee (\exists y)C(y) \right) \rightarrow (\exists x)(B(x) \vee C(x))$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(x, y))$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(4) Legyen $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ és $B = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 \in \mathbf{N}_0\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	$B \times \mathbf{N} \bigcirc$	$A \cup \mathbf{N} \bigcirc$	$B \bigcirc$	$A \times B \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------------------------	------------------------------	--------------	-----------------------	----------------------	---

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen, nem.

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(5) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 > y^2 + 1\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik az alábbi téglalapban felsoroltak közül?

?	transzítív $\bigcirc$	antiszimmetrikus $\bigcirc$	reflexív $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	-----------------------	-----------------------------	---------------------	----------------------	---

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, igen, nem.

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

$$(A \vee \neg A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg A)$$

!	igen $\oplus$	nem $\bigcirc$	!
---	---------------	----------------	---

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(7) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	3 $\bigcirc$	5 $\bigcirc$	$-\frac{1}{13}$ $\bigcirc$	-1 $\bigcirc$	1 $\bigcirc$	-3 $\bigcirc$	-5 $\bigcirc$	$-\frac{3}{2}$ $\bigcirc$	az előzőek egyike sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	----------------------------	---------------	--------------	---------------	---------------	---------------------------	----------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: 1, ugyanis $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(8) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
---	--	---	--	---	--	-------------------	---

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(9) Jelölje $P(A)$ az $A = \{0, 1, 2\}$ halmaz összes részhalmazának halmazát. Legyen továbbá $\beta = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \cap Y = \emptyset\}$. Tekintsük az

$$f : A \rightarrow \beta, x \mapsto (\{x\}, A \setminus \{x\}), \text{ illetve a } g : \beta \rightarrow P(A), (X, Y) \mapsto X \cup Y$$

leképezést. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív $\circ$	g injektív $\circ$	g szürjektív $\circ$	egyik sem $\circ$	?
---	----------------------	----------------------	------------------------	-------------------	---

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen. . Mivel $(X, Y)g = (Y, X)g$ (és $X \neq Y$ is lehetséges), g nem injektív. De g szürjektív, hiszen $X \in P(A)$ esetén $(X, \emptyset) \in \beta$ és $(X, \emptyset)g = X$.

dmnv1-01.C1-B _____ CzG

(10) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

$$EAB = AEB$$

Ha $\det(AB) = -1$, akkor A invertálható

Ha A is és B is invertálható, akkor $\det(AB) \neq 0$

!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!
!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!
!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!

dmnv1-01.C1-B _____ CzG