

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv1-01.C1-A

CzG

(1) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow \neg A))$$

!	igen ☐	nem ☐	⊕	!
!	igen ☐	nem ☐	⊕	!
!	igen ☐	nem ☐	⊕	!

dmnv1-01.C1-A

CzG

(2) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat (amelyek persze egyúttal halmazok is), valamint az

$$f : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x), \quad \text{illetve a} \quad g : A \rightarrow \alpha, x \mapsto (x, -x)$$

leképezést. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ☐	g injektív ☐	g szürjektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-A

CzG

MEGOLDÁS: Igen, igen, igen.

dmnv1-01.C1-A

CzG

(3) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -17 utolsó számjegye -7 , a 136 utolsó számjegye pedig 6 .)

!	0	1	2	3	4	8	9	d nem egész szám	az előzőek egyike sem	!
---	---	---	---	---	---	---	---	--------------------	-----------------------	---

(Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

Számolás, indoklás:									
számolás, indoklás.									

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 0, hiszen Vandermonde-determináns lévén $d = (3 - 1)(6 - 1)(6 - 3) = 30$.

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(4) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	9	4	$\frac{3}{2}$	az előzőek egyike sem	!
---	---	---	---------------	----------------	------	---	---	---------------	-----------------------	---

Számolás, indoklás:									
számolás, indoklás.									

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: -1 , ugyanis $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(5) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbf{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbf{R}^5$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (-1, 2, -1, -2, x)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	1 ☐	-1 ☐	2 ☐	-2 ☐	0 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	--------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $x = -2$.

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(6) Legyen B az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete. Mennyi a B mátrix elemeinek összege az alábbiak közül? (Azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$?)

!	0 ☐	9 ☐	8 ☐	12 ☐	4 ☐	-5 ☐	-25 ☐	25 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ miatt az eredmény 12.

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(7) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	$A \cup \mathbf{R}$ ☐	$A \cup \mathbf{Z}$ ☐	$A \times \mathbf{Z}$ ☐	$\mathbf{Z} \times A \times \mathbf{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---	---	---	---	---------------------------------	---

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, igen, igen.

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y) \right) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$$

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(x, y))$$

$$(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)B(y, x)$$

!	igen ☐	nem ☐	$\oplus$	!
---	----------------------------	---------------------------	----------	---

!	igen ☐	nem ☐	$\oplus$	!
---	----------------------------	---------------------------	----------	---

!	igen ☐	nem ☐	$\oplus$	!
---	----------------------------	---------------------------	----------	---

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(9) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 25$, akkor A invertálható.

$BEA = AEB$.

Ha $\det(BAB) = 1$, akkor A invertálható.

!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!
!	igen $\circ$	nem $\oplus$	!
!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

(10) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik?

?	reflexív $\circ$	antiszimmetrikus $\circ$	transzitiv $\circ$	egyik sem $\circ$	?
---	------------------	--------------------------	--------------------	-------------------	---

dmnv1-01.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen.

dmnv1-01.C1-A _____ CzG