Akkor én most bölcsész vagyok?! Avagy: híd, amit matematikának hívunk

Csizmadia László

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Egyetemi tavasz
Szeged, SZTE

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

3 könyv, **100** ének: Pokol, Purgatórium, Paradicsom (**62**. ének)

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

3 könyv, **100** ének: Pokol, Purgatórium, Paradicsom (**62**. ének) ahová egykori szerelme, Beatrice „kíséri", kiemelkedő pontja a műnek.

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

3 könyv, **100** ének: Pokol, Purgatórium, Paradicsom (**62**. ének) ahová egykori szerelme, Beatrice „kíséri", kiemelkedő pontja a műnek.

- Kassák Lajos, A ló meghal a madarak kirepülnek (1922.)

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

3 könyv, **100** ének: Pokol, Purgatórium, Paradicsom (**62**. ének) ahová egykori szerelme, Beatrice „kíséri", kiemelkedő pontja a műnek.

- Kassák Lajos, A ló meghal a madarak kirepülnek (1922.)

Irodalom

- Dante, Isteni színjáték (1307-1321)

3 könyv, **100** ének: Pokol, Purgatórium, Paradicsom (**62**. ének) ahová egykori szerelme, Beatrice „kíséri", kiemelkedő pontja a műnek.

- Kassák Lajos, A ló meghal a madarak kirepülnek (1922.)

510 sor, **317**. sorban hangulati tetőpont: „mindenki tudta már nem lehet messze isten órája".

Zene

- Kodály Zoltán, Psalmus Hungaricus (magyar zsoltár) (1923.)

Zene

- Kodály Zoltán, Psalmus Hungaricus (magyar zsoltár) (1923.)

Zene

- Kodály Zoltán, Psalmus Hungaricus (magyar zsoltár) (1923.)

395 ütem, **245**-től indul
lényegi mondanivaló:
„Istenbe vessed bizalmad"

Zene

- Kodály Zoltán, Psalmus Hungaricus (magyar zsoltár) (1923.)

395 ütem, **245**-től indul
lényegi mondanivaló:
„Istenbe vessed bizalmad"

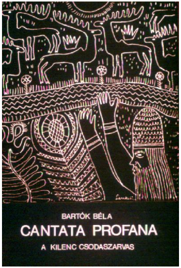
- Bartók Béla, Cantata Profana, A kilenc csodaszarvas (1930.)

Zene

- Kodály Zoltán, Psalmus Hungaricus (magyar zsoltár) (1923.)

395 ütem, **245**-től indul
lényegi mondanivaló:
„Istenbe vessed bizalmad"

- Bartók Béla, Cantata Profana, A kilenc csodaszarvas (1930.)

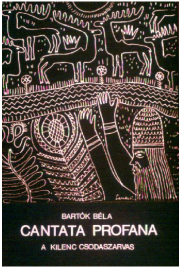


Zene

- Kodály Zoltán, Psalmus Hungaricus (magyar zsoltár) (1923.)

395 ütem, **245**-től indul
lényegi mondanivaló:
„Istenbe vessed bizalmad"

- Bartók Béla, Cantata Profana, A kilenc csodaszarvas (1930.)



$122 = 99 + 23$ sor,
melyekben pl. a **122** soros
rész **76**. sorában egy
érzelmi-zenei csúcspont.

Nyulak

Nyulak

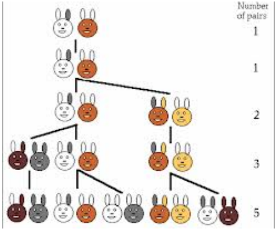
Hány pár nyúl lesz n hónap múlva, ha feltételezzük, hogy az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúl-pár van, az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé, minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül, és a nyulak örökké élnek?

Nyulak

Hány pár nyúl lesz n hónap múlva, ha feltételezzük, hogy az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúl-pár van, az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé, minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül, és a nyulak örökké élnek?

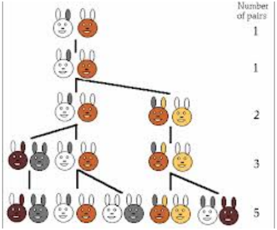
Nyulak

Hány pár nyúl lesz *n* hónap múlva, ha feltételezzük, hogy az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúl-pár van, az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé, minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül, és a nyulak örökké élnek?



Nyulak

Hány pár nyúl lesz n hónap múlva, ha feltételezzük, hogy az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúl-pár van, az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé, minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül, és a nyulak örökké élnek?



Fibonacci-sorozat: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Egy, a számtalan érdekes tulajdonság közül

$$F_1 := 1,\; F_2 := 1,\; F_n := F_{n-1} + F_{n-2}\,, (n > 2)$$

Egy, a számtalan érdekes tulajdonság közül

$$F_1 := 1,\ F_2 := 1,\ F_n := F_{n-1} + F_{n-2}\,, (n > 2)$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} : 1,\ 2,\ 1{,}5,\ 1{,}666,\ 1{,}6,\ 1{,}625,\ 1{,}615,\ 1{,}619, \ldots$$

Egy, a számtalan érdekes tulajdonság közül

$$F_1 := 1,\ \ F_2 := 1,\ \ F_n := F_{n-1} + F_{n-2}\,, (n > 2)$$

$\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$: 1, 2, 1,5, 1,666, 1,6, 1,625, 1,615, 1,619, ...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} =?$$

Egy, a számtalan érdekes tulajdonság közül

$$F_1 := 1,\ F_2 := 1,\ F_n := F_{n-1} + F_{n-2}\,, (n > 2)$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} : 1,\ 2,\ 1,5,\ 1,666,\ 1,6,\ 1,625,\ 1,615,\ 1,619, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} =$$

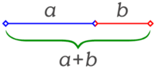
$$1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}} \rightsquigarrow\ x = 1 + \frac{1}{x} \rightsquigarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Nevezetes arány

Aranymetszés:

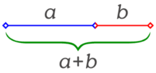
Nevezetes arány

Aranymetszés:



Nevezetes arány

Aranymetszés:

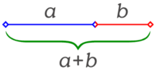


$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \rightsquigarrow \frac{a}{b} = \Phi$$

Nevezetes arány

Aranymetszés:



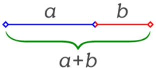
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \rightsquigarrow \frac{a}{b} = \Phi$$

$$\Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi} \rightsquigarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Nevezetes arány

Aranymetszés:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \rightsquigarrow \frac{a}{b} = \Phi$$

$$\Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi} \rightsquigarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Hogy is van ez akkor?

$$\text{Az aranyarány: } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$$

Hogy is van ez akkor?

$$\text{Az aranyarány: } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$$

Dante: $\frac{100}{62} = 1,619$

Kassák: $\frac{510}{317} = 1,608$

Kodály: $\frac{395}{245} = 1,612$

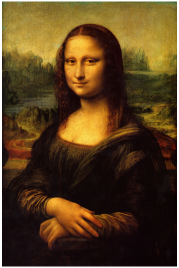
Bartók: $\frac{122}{76} = 1,605$

Képzőművészet, építészet

Leonardo da Vinci, La Gioconda (it., gondtalan) (1503-1519)

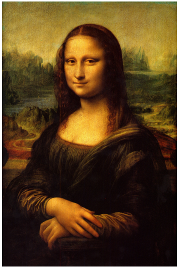
Képzőművészet, építészet

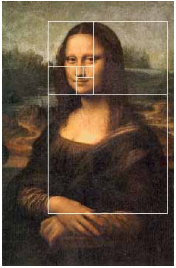
Leonardo da Vinci, La Gioconda (it., gondtalan) (1503-1519)



Képzőművészet, építészet

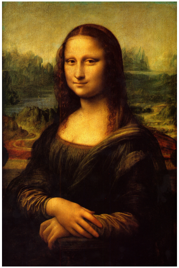
Leonardo da Vinci, La Gioconda (it., gondtalan) (1503-1519)

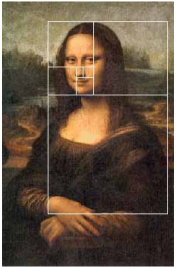




Képzőművészet, építészet

Leonardo da Vinci, La Gioconda (it., gondtalan) (1503-1519)

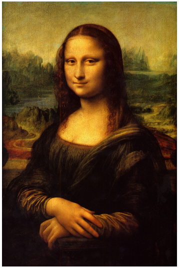


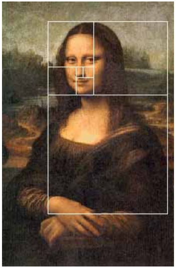


Athén, Parthenon (Kr.e. 448-438)

Képzőművészet, építészet

Leonardo da Vinci, La Gioconda (it., gondtalan) (1503-1519)

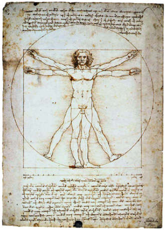




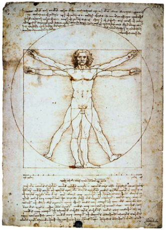
Athén, Parthenon (Kr.e. 448-438)

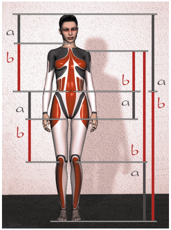
További hírességek

További hírességek



További hírességek





Beethoven, 1770-1827

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.)

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

zene

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

zene$\rightsquigarrow$ hangok

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

zene$\rightsquigarrow$ hangok$\rightsquigarrow$ frekvencia/hullámhossz (λ)

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

zene$\rightsquigarrow$ hangok$\rightsquigarrow$ frekvencia/hullámhossz (λ) felhangjai(harmonikusok):λ/n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad - \quad \text{Harmonikus sor}$$

Beethoven, 1770-1827

VII. szimfónia (1813.) „A mű erejét, nagyszerűségét, egészét a ritmus határozza meg. A ritmus, mely a zene legősibb eleme. „Kezdetben vala a ritmus."- mondta Wagner."

zene$\rightsquigarrow$ hangok$\rightsquigarrow$ frekvencia/hullámhossz (λ) felhangjai(harmonikusok):λ/n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad - \quad \text{Harmonikus sor}$$

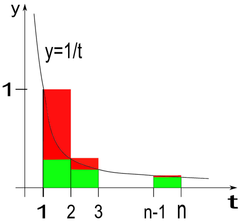
Végtelen sok nagyon kicsi szám összege vajon kicsi, vagy nagyon kicsi?

Becsüljünk

Legyen $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

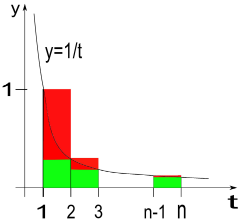
Becsüljünk

Legyen $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$



Becsüljünk

Legyen $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

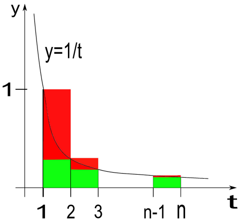


A zöld téglalapok segítségével:

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t}\, dt = \ln n$$

Becsüljünk

Legyen $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$



A zöld téglalapok segítségével:

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t}\, dt = \ln n$$

a piros téglalapok segítségével:

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{t}\, dt = \ln n$$

Becslésünk eredménye

$$\ln n + \frac{1}{n} < H_n < \ln n + 1$$

Becslésünk eredménye

$$\ln n + \frac{1}{n} < H_n < \ln n + 1$$

$n \to \infty \ \rightsquigarrow$ A harmonikus sor divergens. (Korlátlanul nagy az összeg.)

Ismerős

A mértani sorozat: q^n

Ismerős

A mértani sorozat: q^n általános vagy középiskola:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ismerős

A mértani sorozat: q^n általános vagy középiskola:

$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ nálunk:

$\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$

Ismerős

A mértani sorozat: q^n általános vagy középiskola:

$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ nálunk:

$\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Ismerős

A mértani sorozat: q^n általános vagy középiskola:

$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ nálunk:

$\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

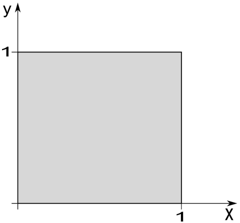
Például, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n = \dfrac{1}{1-xy}$.

Játsszunk

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}$$

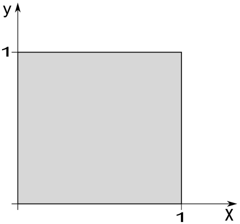
Játsszunk

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}$$



Játsszunk

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}$$

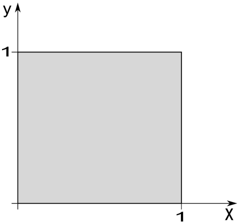


A mértani sor segít:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \rightsquigarrow$

Játsszunk

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}$$



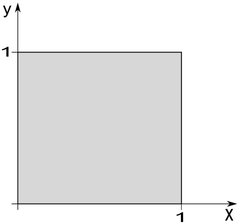
A mértani sor segít:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \rightsquigarrow$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Játsszunk

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}$$



A mértani sor segít:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \rightsquigarrow$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Vajon ez is nagyon nagy?

Meglepő és szép

Meglepő és szép

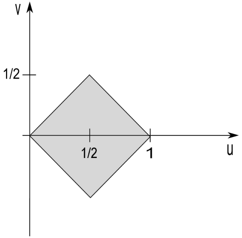
$$u = \frac{y+x}{2}, v = \frac{y-x}{2},$$

Meglepő és szép

$$u = \frac{y+x}{2}, v = \frac{y-x}{2},\ 1 - xy = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$

Meglepő és szép

$$u = \frac{y+x}{2}, v = \frac{y-x}{2},\ 1 - xy = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$



$$I =$$
$$4\int_0^{1/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du +$$
$$4\int_{1/2}^{1}\left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du$$

Eredmény

$$I = \frac{\pi^2}{6}$$

Eredmény

$$I = \frac{\pi^2}{6}$$

Ez aztán a meglepetés!

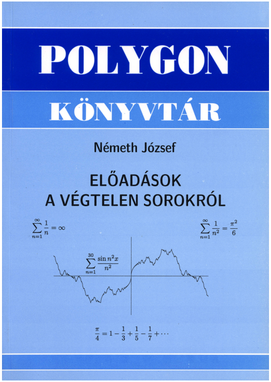
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1734., Leonhard Euler(1707. április 15.-1783. szeptember 18.)

Végtelen sorok

Végtelen sorok

Végtelen sorok



Köszönöm a figyelmet!