Differenciálegyenletek a mindennapokban

Csizmadia László

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Kutatók éjszakája
Szeged, SZTE

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

$$T_0(1 + \frac{p}{100})$$

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

$$T_0(1 + \frac{p}{100})$$

Amennyiben havonta tőkésítik a kamatot, úgy egy év alatt több pénz gyűlik össze, hiszen

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

$$T_0(1+\frac{p}{100})$$

Amennyiben havonta tőkésítik a kamatot, úgy egy év alatt több pénz gyűlik össze, hiszen

- 1. hónap végén: $T_0(1+\frac{q}{12})$, $q = p/100$;

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

$$T_0(1 + \frac{p}{100})$$

Amennyiben havonta tőkésítik a kamatot, úgy egy év alatt több pénz gyűlik össze, hiszen

- 1. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})$, $q = p/100$;
- 2. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})^2$;

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

$$T_0(1 + \frac{p}{100})$$

Amennyiben havonta tőkésítik a kamatot, úgy egy év alatt több pénz gyűlik össze, hiszen

- 1. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12}), \; q = p/100;$
- 2. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})^2;$

$\vdots$

- 12. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})^{12}.$

Pénz, pénz, pénz

Valaki T_0 forintot (például 1 forintot) p%-os éves kamatra elhelyez a bankban. Mennyi pénze lesz egy év múlva?

$$T_0(1 + \frac{p}{100})$$

Amennyiben havonta tőkésítik a kamatot, úgy egy év alatt több pénz gyűlik össze, hiszen

- 1. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})$, $q = p/100$;
- 2. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})^2$;

$\vdots$

- 12. hónap végén: $T_0(1 + \frac{q}{12})^{12}$.

Például $T_0 = 1, p = 7$ esetén az első esetben az számlán lévő összeg $1,07$, míg a második esetben $1,0723$.

Vágyálom

Osszuk az egy évet n egyenlő részre és írjuk jóvá ezen időszakonként a kamatot, mert ekkor

Vágyálom

Osszuk az egy évet n egyenlő részre és írjuk jóvá ezen időszakonként a kamatot, mert ekkor

Vágyálom

Osszuk az egy évet n egyenlő részre és írjuk jóvá ezen időszakonként a kamatot, mert ekkor

Az év végén, azaz az n. időszak végén a pénzösszeg: $T_0(1 + \frac{q}{n})^n$.

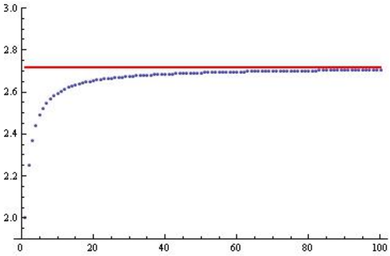
Még, még még!

Még, még még!

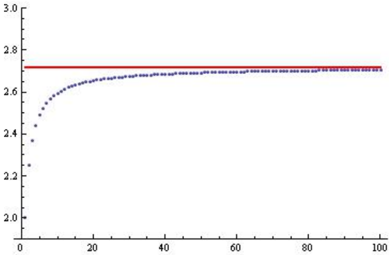
Minden határon túl sűrítjük azon idők számát, amikor kamatjóváírás történik, azaz

$$n \to \infty \Rightarrow T_0(1+\frac{q}{n})^n \to \infty \text{ ?}$$

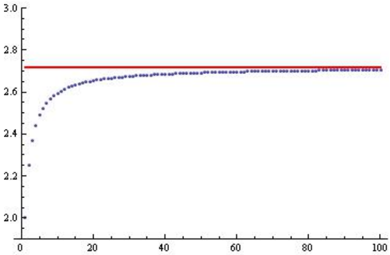
A valóság



A valóság

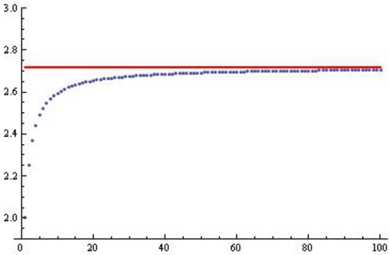


A valóság



$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

A valóság



$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t), \ \Delta t = h$

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t), \ \Delta t = h$
- A tőke nagyságának változási sebessége: $\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h}$

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t), \; \Delta t = h$
- A tőke nagyságának változási sebessége: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{T(t+h) - T(t)}{h}$

Derivált $\rightsquigarrow$ sebesség

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t), \ \Delta t = h$
- A tőke nagyságának változási sebessége: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{T(t+h) - T(t)}{h}$

Derivált $\rightsquigarrow$ sebesség $T'(t) = \frac{dT(t)}{dt}$

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t), \; \Delta t = h$
- A tőke nagyságának változási sebessége: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{T(t+h) - T(t)}{h}$

Derivált $\rightsquigarrow$ sebesség $T'(t) = \frac{dT(t)}{dt}$ így a feladatunk megoldani az alábbi kezdeti érték feladatot:

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t), \ \Delta t = h$
- A tőke nagyságának változási sebessége: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{T(t+h) - T(t)}{h}$

Derivált $\rightsquigarrow$ sebesség $T'(t) = \frac{dT(t)}{dt}$ így a feladatunk megoldani az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$T' = p \cdot T, \ \ T(0) = T_0$$

A változás sebessége

Folytonos tőkésítés mellett

- $T(t)$: a tőke nagysága a t. időpillanatban
- $\Delta T = T(t+h) - T(t),\ \Delta t = h$
- A tőke nagyságának változási sebessége: $\lim_{h\to 0} \dfrac{T(t+h) - T(t)}{h}$

Derivált $\rightsquigarrow$ sebesség $T'(t) = \frac{dT(t)}{dt}$ így a feladatunk megoldani az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$T' = p \cdot T,\ \ T(0) = T_0$$

Megoldás:

$$T(t) = T_0 e^{pt}\ .$$

Forró nyomon

Egy nyári napon valaki talált egy holttestet. A helyszínen rögzített adatok szerint:

Forró nyomon

Egy nyári napon valaki talált egy holttestet. A helyszínen rögzített adatok szerint:

- $T_h = 25^\circ C$ - a holttest hőmérséklete
- $T_k = 23^\circ C$ - a levegő hőmérséklete

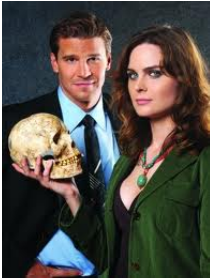
Vajon mióta halott az illető?

Forró nyomon

Egy nyári napon valaki talált egy holttestet. A helyszínen rögzített adatok szerint:

- $T_h = 25^\circ C$ - a holttest hőmérséklete
- $T_k = 23^\circ C$ - a levegő hőmérséklete

Vajon mióta halott az illető?



A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra."

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel."

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel." Azaz:

$$T' = \lambda(T - T_k) \ .$$

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel." Azaz:

$$T' = \lambda(T - T_k) \ .$$

Ennek megoldása: $T(t) = T_k + ce^{\lambda t}$.

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel." Azaz:

$$T' = \lambda(T - T_k) \ .$$

Ennek megoldása: $T(t) = T_k + ce^{\lambda t}$. A kezdeti értékek figyelembevételével:

$$t = 0 \text{ (a halál beálta) } T_h = 36^\circ C \Rightarrow c = 13 \ .$$

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel." Azaz:

$$T' = \lambda(T - T_k) \ .$$

Ennek megoldása: $T(t) = T_k + ce^{\lambda t}$. A kezdeti értékek figyelembevételével:

$$t = 0 \text{ (a halál beálta) } T_h = 36^\circ C \Rightarrow c = 13 \ .$$

4 óra múlva $T_h = 30^\circ C \Rightarrow e^\lambda = \sqrt[4]{7/13} = 0,8566.$

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel." Azaz:

$$T' = \lambda(T - T_k) \ .$$

Ennek megoldása: $T(t) = T_k + ce^{\lambda t}$. A kezdeti értékek figyelembevételével:

$$t = 0 \text{ (a halál beálta) } T_h = 36^\circ C \Rightarrow c = 13 \ .$$

4 óra múlva $T_h = 30^\circ C \Rightarrow e^\lambda = \sqrt[4]{7/13} = 0,8566$. Tehát a test hőmérséklete az idő függvényeként:

$$T(t) = 23^\circ C + 13 \cdot (0,8566)^t \ .$$

A nyomozás

Bones: „A hulla 4 óra alatt hül $36^\circ C$-ról $30^\circ C$-ra." Both: „Newton lehülési törvénye: T' arányos a $(T - T_k)$ értékkel." Azaz:

$$T' = \lambda(T - T_k) \ .$$

Ennek megoldása: $T(t) = T_k + ce^{\lambda t}$. A kezdeti értékek figyelembevételével:

$$t = 0 \text{ (a halál beálta) } T_h = 36^\circ C \Rightarrow c = 13 \ .$$

4 óra múlva $T_h = 30^\circ C \Rightarrow e^\lambda = \sqrt[4]{7/13} = 0,8566$. Tehát a test hőmérséklete az idő függvényeként:

$$T(t) = 23^\circ C + 13 \cdot (0,8566)^t \ .$$

Jelenleg $T_h = 25^\circ C$, ezért kb. $t = 12,09$ órával ezelőtt hunyt el.

Egy furcsa pár

Anna és Béla egy furcsa pár. Béla nehéz természetű: amikor Anna szereti őt, akkor ő kezdi kevésbé szeretni Annát. Anna normális: ha Béla szereti őt, akkor ő is egyre jobban kedveli, ugyanakkor barátságtalanná válik, ha Béla nem szereti. Milyen jövőt jósolunk kettejük kapcsolatának?

Jósoljunk

- $t = 0$ találkozásuk pillanata
- $a(t)$ Anna Béla iránti szeretete a t. időpillanatban
- $b(t)$ Béla Anna iránti szeretete a t. időpillanatban

Jósoljunk

- $t = 0$ találkozásuk pillanata
- $a(t)$ Anna Béla iránti szeretete a t. időpillanatban
- $b(t)$ Béla Anna iránti szeretete a t. időpillanatban

a és b is legalább kétszer differenciálható függvények

Jósoljunk

- $t = 0$ találkozásuk pillanata
- $a(t)$ Anna Béla iránti szeretete a t. időpillanatban
- $b(t)$ Béla Anna iránti szeretete a t. időpillanatban

a és b is legalább kétszer differenciálható függvények
$a'(t)$ $b(t)$-vel arányos, azaz $a' = A \cdot b$,

Jósoljunk

- $t = 0$ találkozásuk pillanata
- $a(t)$ Anna Béla iránti szeretete a t. időpillanatban
- $b(t)$ Béla Anna iránti szeretete a t. időpillanatban

a és b is legalább kétszer differenciálható függvények
$a'(t)$ $b(t)$-vel arányos, azaz $a' = A \cdot b$,
$b'(t)$ $-a(t)$-vel arányos, azaz $b' = -B \cdot a$, ahol A, B konstansok, legyen mindkettő 1.

Jósoljunk

- $t = 0$ találkozásuk pillanata
- $a(t)$ Anna Béla iránti szeretete a t. időpillanatban
- $b(t)$ Béla Anna iránti szeretete a t. időpillanatban

a és b is legalább kétszer differenciálható függvények
$a'(t)$ $b(t)$-vel arányos, azaz $a' = A \cdot b$,
$b'(t)$ $-a(t)$-vel arányos, azaz $b' = -B \cdot a$, ahol A, B konstansok, legyen mindkettő 1.
Kezdeti érték feltételek: $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a' & = & b \\ b' & = & -a \\ a(0) & = & a_0 \\ b(0) & = & b_0 \end{cases}$$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a' & = & b \\ b' & = & -a \\ a(0) & = & a_0 \\ b(0) & = & b_0 \end{cases}$$

Ennek megoldása: $a(t) = a_0 \cos t + b_0 \sin t$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a' & = & b \\ b' & = & -a \\ a(0) & = & a_0 \\ b(0) & = & b_0 \end{cases}$$

Ennek megoldása: $a(t) = a_0 \cos t + b_0 \sin t$
$b(t) = b_0 \cos t - a_0 \sin t$

A megoldandó egyenletrendszer:

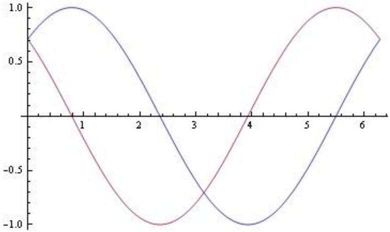
$$\begin{cases} a' & = & b \\ b' & = & -a \\ a(0) & = & a_0 \\ b(0) & = & b_0 \end{cases}$$

Ennek megoldása: $a(t) = a_0 \cos t + b_0 \sin t$
$b(t) = b_0 \cos t - a_0 \sin t$
$a_0 = b_0 = 1/\sqrt{2}$ esetén $a(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$, $b(t) = \cos(t + \frac{\pi}{4})$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a' & = & b \\ b' & = & -a \\ a(0) & = & a_0 \\ b(0) & = & b_0 \end{cases}$$

Ennek megoldása: $a(t) = a_0 \cos t + b_0 \sin t$
$b(t) = b_0 \cos t - a_0 \sin t$
$a_0 = b_0 = 1/\sqrt{2}$ esetén $a(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$, $b(t) = \cos(t + \frac{\pi}{4})$



$$\begin{cases} a' &= 2a + b \\ b' &= -a \\ a(0) &= a_0 \\ b(0) &= b_0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
a' &= 2a + b \\
b' &= -a \\
a(0) &= a_0 \\
b(0) &= b_0
\end{cases}
$$

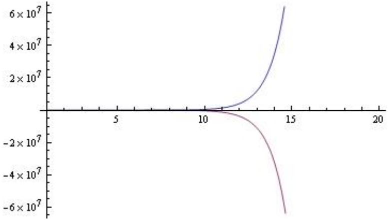
$a_0 = b_0 = 1$ választással a megoldások:
$a(t) = (1 + 2t)e^t$,

$$\begin{cases} a' &= 2a+b \\ b' &= -a \\ a(0) &= a_0 \\ b(0) &= b_0 \end{cases}$$

$a_0 = b_0 = 1$ választással a megoldások:
$a(t) = (1+2t)e^t$, illetve $b(t) = (1-2t)e^t$

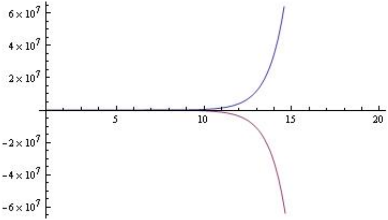
$$\begin{cases} a' &= 2a + b \\ b' &= -a \\ a(0) &= a_0 \\ b(0) &= b_0 \end{cases}$$

$a_0 = b_0 = 1$ választással a megoldások:
$a(t) = (1 + 2t)e^t$, illetve $b(t) = (1 - 2t)e^t$



$$\begin{cases} a' &= 2a + b \\ b' &= -a \\ a(0) &= a_0 \\ b(0) &= b_0 \end{cases}$$

$a_0 = b_0 = 1$ választással a megoldások:
$a(t) = (1 + 2t)e^t$, illetve $b(t) = (1 - 2t)e^t$



Ez a kapcsolat nem működőképes.

Newton

Másodrendű differenciálegyenlet

Newton

Másodrendű differenciálegyenlet fizika

Newton

Másodrendű differenciálegyenlet fizika Newton II. axiómája

$$\sum F = m \cdot a$$

Newton

Másodrendű differenciálegyenlet fizika Newton II. axiómája

$$\sum F = m \cdot a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow \sum F = ms''$$

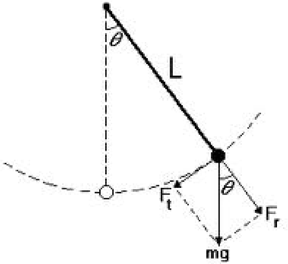
Newton

Másodrendű differenciálegyenlet fizika Newton II. axiómája

$$\sum F = m \cdot a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow \sum F = ms''$$

Egy szép példa



Matematikai inga

Mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Matematikai inga

Mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

g - gravitációs állandó, l - az inga hossza.

Matematikai inga

Mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

g - gravitációs állandó, l - az inga hossza.
Amennyiben a közegellenállás fékezi (súrlódás), és annak nagysága a sebességgel arányos.

Matematikai inga

Mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

g - gravitációs állandó, l - az inga hossza.
Amennyiben a közegellenállás fékezi (súrlódás), és annak nagysága a sebességgel arányos. A mozgásegyenlet:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - kl\dot{\varphi}$$

Matematikai inga

Mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

g - gravitációs állandó, l - az inga hossza.
Amennyiben a közegellenállás fékezi (súrlódás), és annak nagysága a sebességgel arányos. A mozgásegyenlet:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - kl\dot{\varphi}$$

http://illustrations.marin.ntnu.no//structures/dynamics/pendulum/index.html

Búcsú

Az inga mindennapjaink sokrétűen használt tárgya:

Búcsú

Az inga mindennapjaink sokrétűen használt tárgya:

Köszönöm a figyelmet!