

A HINTÁZÁS LINEÁRIS, LÉPCSŐSFÜGGVÉNY-EGYÜTTTHATÓS MODELLJÉNEK PERIODIKUS MEGOLDÁSAIRÓL

Csizmadia László^{1*}, Hatvani László^{2†}

¹Természet- és Műszaki Alaptudományi Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Pallasz Athéné Egyetem, Magyarország
²

Kulcsszavak:

másodrendű lineáris differenciálegyenletek, lépcsősfüggvény-együtthatók, periodikus együtthatók, impulzív hatások, periodikus megoldások, parametrikus rezonancia, hintázás.

Keywords:

Cikktörténet:

Received

Revised

Accepted

Összefoglalás

Az alábbi egyenletet vizsgáljuk.

$$x'' + a^2(t)x = 0,$$
$$a(t) := \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{l - \varepsilon}} & \text{if } 2kT \leq t < (2k + 1)T, \\ \sqrt{\frac{g}{l + \varepsilon}} & \text{if } (2k + 1)T \leq t < (2k + 2)T, \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

ahol g és l jelöli rendre a gravitációs konstanst és az inga hosszát. Az $\varepsilon > 0$ paraméter méri a hintázás intenzitását. Bevezetjük a közeledő és távolodó megoldás fogalmát. Szükséges és elegendő feltételt adunk a T és az ε paraméterek segítségével a $2T$ -periodikus és a $4T$ -periodiku megoldások létezésére.

Abstract

1. Bevezetés

Amint az tudott [1, 3, 17], a matematikai inga kis lengéseit leírja az alábbi lineáris differenciálegyenlet

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0, \quad (1)$$

ahol x jelöli a rúd és a függőlegesen lefelé mutató irány közötti irányított szöget, melyet úgy irányítunk, hogy az óramutató járásával ellentétes irány a pozitív; g és l rendre a gravitációs konstans, illetve a rúd hossza. Az egyenlet összes megoldása periodikus ugyanazzal a $2\pi\sqrt{l/g}$ periódussal, és az $x = x' = 0$ egyensúlyi helyzet stabil. Úgy tekintünk a hintára, annak modelljére, mint egy változó hosszúságú ingára [13]. A hintázóról föltesszük, hogy célja: az egyensúlyi helyzet destabilizálása egymást követő föl-le mozgással. Ennek eredményeként a tömegközéppontjának távolsága az inga/hinta fölfüggesztési pontjától az időben periodikusan változik, amit leír a következő egyenlet

$$\begin{cases} x'' + a^2(t)x = 0, \\ a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l - \varepsilon}} & \text{if } 2kT \leq t < (2k + 1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l + \varepsilon}} & \text{if } (2k + 1)T \leq t < (2k + 2)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \end{cases} \quad (2)$$

*Kapcsolattartó szerző.

E-mail cím:

†The second author was supported by the Hungarian Scientific Research (OTKA K75517) and Analysis and Stochastic Research Group of the Hungarian Academy of Sciences

Ez egy periodikus együtthatós lineáris egyenlet (Hill-egyenlet [11, 15]), melyben az együttható intervallumonként konstans függvény (Meissner-egyenlet [16, 18]). A feladat abban áll, hogy adjuk meg a paramétertartományon (T, ε) az instabil zónákat az (2) egyenletre vonatkozóan (*parametrikus rezonancia*). A Floque Elméletet használva bizonyítható [1, 2, 17], hogy a stabilitási tartományok egymástól különvált komponensek és ezen ún. Arnold-nyelveket határoló két görbe $T = f(\varepsilon)$, $T = g(\varepsilon)$ olyan pontokból áll, melyek megfelelnek az (2) egyenlet $2T$ -periodikus, illetve $4T$ -periodikus megoldásainak.

Ebben a dolgozatban [3] megmutatjuk, hogy a hintázás ezen problémáját elemi geometriai módszerekkel is tárgyalhatjuk. Föltételeket adunk arra, hogy az (2) egyenlet $t \mapsto (x(t; x_0, x'_0), x'(t; x_0, x'_0))$ trajektóriája kiindulva az (x, x') fázissík $P(x_0, x'_0)$ pontjából visszatérjen az L egyenes egy pontjába, mely L az origó $(0, 0)$ és P pontok között halad úgy, hogy $(x(2T; x_0, x'_0), x'(2T; x_0, x'_0)) \in L$. Egy ilyen megoldás vagy távolodik az origótól, vagy közeledik ahhoz, vagy $2T$ vagy $4T$ periodikus.

2. A módszer

Az (2) egyenletet a [6] cikkben látott módon kezelhetjük, mely módszer továbbfejlesztve a [7] dolgozatban megtalálható. Röviden szólva arról van szó, hogy adva két pozitív számsorozatot $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ úgy, hogy $(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty)$, továbbá $t_0 := 0$, tekintsük a következő egyenletet

$$x'' + a^2(t)x = 0, \quad a(t) := a_k \text{ if } t_{k-1} \leq t < t_k \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

Az $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ megoldása (3) egyenletnek, ha folytonosan differenciálható a $[0, \infty)$ intervallumon, továbbá kétszer differenciálható és egyben megoldása az egyenletnek minden $[t_{k-1}, t_k)$ intervallumon valamely $k \in \mathbb{N}$ értékre. Bevezetve az új állapotváltozót $y := x'/a_k$ (3) egyenlet 2-dimenziós rendszerként tekinthető

$$x' = a_k y, \quad y' = -a_k x \quad (t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

Garantálendő, hogy az (4) rendszer ekvivalens az (3) egyenlettel, elegendő előírni, hogy legyen $x(t_k) = x(t_k - 0)$, $x'(t_k) = x'(t_k - 0)$ ($k \in \mathbb{N}$), ahol $f(t - 0)$ jelöli az f függvény bal oldali határértékét a t -edik időpontban. Ennek azonnal következménye, hogy egy további „összefüggőségi” feltételt kapunk a (4) megoldásaira. Nevezetesen, az alábbi. Az első egyenlőséget mint kezdeti feltételt előírjuk a $[t_k, t_{k+1})$ intervallumon. A másodikról ezek alapján láthatjuk, hogy $a_{k+1}y(t_k) = a_k y(t_k - 0)$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ami egy újabb feltétel a $[t_k, t_{k+1})$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy az (3) ekvivalens egy impulzív első rendű differenciálegyenlet-rendszerrel

$$\begin{cases} x' = a_k y, & y' = -a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (5)$$

Adva az x_0, y_0 kezdeti értékeket, könnyen konstruálhatjuk a (5) megoldását a $[0, \infty)$ intervallumon. Megoldjuk a (4) egyenletet ezzel a kezdeti feltételekkel az első részen: $[t_0, t_1)$, és így kapjuk a megoldást $(x_1, y_1) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ezután definiáljuk a következőket: $x_2(t_1) := x_1(t_1 - 0)$, $y_2(t_1) := (a_1/a_2)y_1(t_1 - 0)$ és megoldjuk a (4) egyenletet ezekkel a kezdeti feltételekkel a $[t_1, t_2)$ szakaszon, és ezt folytatjuk tovább. Így eljutunk a (5) megoldásához a $[t_0, \infty)$ félegyenesen a következő definíció segítségével

$$(x(t), y(t)) := (x_k(t), y_k(t)) \quad \text{if } t_{k-1} \leq t < t_k, \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

Mivel $(x^2(t) + y^2(t))' \equiv 0$ az $[t_{k-1}, t_k)$ intervallumon ($k \in \mathbb{N}$), ezért azt mondhatjuk, hogy a trajektória darabjai az origó körüli körökön vannak, és, hogy a $t = t_k$ időpillanatban a trajektória egy ugrást végez az y -tengellyel párhuzamosan.

Köszönhetően a speciális formának, az impulzív (5) rendszer reprezentálható mint diszkrét dinamikus rendszer az (x, y) síkon. Polárkoordinátákat bevezetve r, φ a szokásos formulákkal

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (r > 0, -\infty < \varphi < \infty). \quad (7)$$

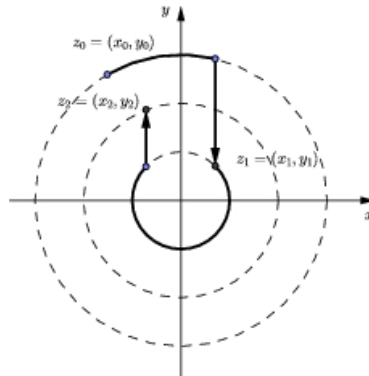
Tudjuk, hogy $r'(t) \equiv 0$ bármely megoldás mentén minden $[t_{k-1}, t_k]$ intervallumon. Így

$$x'(t) = -r(t)\varphi'(t) \sin \varphi(t) = a_k y(t) = a_k r(t) \sin \varphi(t) \quad (t_{k-1} \leq t < t_k),$$

kapjuk tehát, hogy

$$\varphi'(t) = -a_k \quad (t_{k-1} \leq t < t_k). \quad (8)$$

Vagyis, a folytonos komponensek origó körüli egyenletes forgatások a_k szögsebességgel, míg az impulzív lépések kontrakciók vagy dilatációk az y -tengellyel párhuzamos irányban, lásd az 1-es ábrát 1. Tekintsük a polárkoordinátákban megadott rendszert. Jelölje (r_R, φ_R) , and $(r_C, \varphi_C) =$



1. ábra. A dinamika

$(\rho(r, \varphi; \kappa), \phi(\varphi; \kappa))$ az (r, φ) fázispont képét rendre a rotáció, illetve a kontrakció-dilatáció során. Ekkor $r_R(r, \varphi) = r$, $\varphi_R(r, \varphi) = \varphi - \theta$; továbbá,

$$\begin{aligned} \rho(r, \varphi; \kappa) &= \sqrt{x^2 + \kappa^2 y^2} = r \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi} = f(\varphi; \kappa) r, \\ f(\varphi, \kappa) &:= \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi}, \quad (\kappa > 0, -\infty < \varphi < \infty). \end{aligned}$$

Könnyű látni, hogy $\tan \phi(\varphi; \kappa) = \kappa y/x = \kappa \tan \varphi$ ($x \neq 0$), so

$$\phi(\varphi; \kappa) := \begin{cases} \arctan(\kappa \tan \varphi) + \left\lceil \frac{\varphi + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right\rceil \pi & \text{if } \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \varphi & \text{if } \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ahol $[x]$ jelöli az $x \in \mathbb{R}$ egészrészét. Így a (5) rendszer polárkoordinátákban a következő alakot ölti

$$\begin{cases} r_{k+1} = f\left(\varphi_k - a_{k+1}(t_{k+1} - t_k); \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right) r_k, \\ \varphi_{k+1} = \phi\left(\varphi_k - a_{k+1}(t_{k+1} - t_k); \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right), \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Az alábbi lemma összefoglalja az f és a ϕ függvények alapvető tulajdonságait. A lemma bizonyítás a [7] dolgozatban megtalálható.

2.1. Lemma. 1. Minden $\kappa > 0$ esetén $f(\cdot; \kappa) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ páros és π -periodikus; továbbá,

$$f\left(\phi(\varphi; \kappa); \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{f(\varphi; \kappa)} \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

2. Minden $\kappa > 0$ esetén $\phi(\cdot; \kappa)$ és $\phi(\cdot + \pi/2; \kappa) - \pi/2$ páratlan, $\phi(\cdot + k\pi; \kappa) = \phi(\cdot; \kappa) + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); továbbá,

$$\phi\left(\phi(\varphi; \kappa); \frac{1}{\kappa}\right) = \varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

3. Ha $0 < \kappa < 1$, akkor bármely $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\begin{aligned} \phi(\varphi; \kappa) < \varphi & \text{ if } 2k\frac{\pi}{2} < \varphi < (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \phi(\varphi; \kappa) > \varphi & \text{ if } (2k+1)\frac{\pi}{2} < \varphi < 2(k+1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Ha $\kappa > 1$, akkor a $\phi(\varphi; \kappa)$ és φ közötti egyenlőtlenségek értelme megfordul.

3. Eredmények

Transzformáljuk az (2) egyenletet egy olyan egyenletté, amely explicite tartalmazza az rezgés periódusát mint paramétert. Bevezetjük a $\tau = (\pi/T)t$ változót mint dimenziótlan időt és az új függő változót $z(\tau) = x((T/\pi)\tau)$. Ekkor az (2) a következő alakot ölti

$$\ddot{z} + A^2(\tau)z = 0, \quad (\dot{}) = \frac{d}{d\tau}(), \quad (10)$$

ahol

$$A(\tau) = \frac{T}{\pi}a\left(\frac{T}{\pi}\tau\right) = \begin{cases} \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} & \text{if } 2k\pi \leq \tau < (2k+1)\pi, \\ \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} & \text{if } (2k+1)\pi \leq \tau < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\}).$$

A kényelem kedvéért használjuk az időre továbbra is a t -t a τ helyett, és az x , x' -t a z , $\dot{z}$ helyett. Bevezetve a $\lambda := T/\pi$ paramétert, (10) a következőbe megy át

$$\begin{aligned} x'' + \lambda^2 Q(t)x &= 0, \\ Q(t) &= \begin{cases} a_1^2 = a_1^2(\varepsilon) := \frac{g}{l-\varepsilon} & \text{if } 2k\pi \leq t < (2k+1)\pi, \\ a_2^2 = a_2^2(\varepsilon) := \frac{g}{l+\varepsilon} & \text{if } (2k+1)\pi \leq t < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned} \quad (11)$$

Legyenek

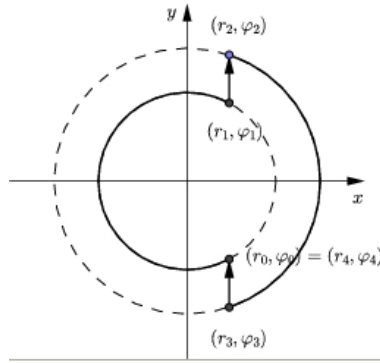
$$\begin{aligned} t_k &:= k\pi, & a_{2k+1} &:= \lambda a_1, & a_{2k+2} &:= \lambda a_2 \quad (k \in \mathbb{Z}_+), \\ D &:= \frac{a_1}{a_2}, & d &:= \frac{a_2}{a_1} \end{aligned} \quad (12)$$

így (11) a (3)-nek felel meg.

Miután (7) polárkoordinátázás megtörtént, tekintsük a fázissíkon a mozgást. Induljon a trajektória az r_0, φ_0 pontból a $t_0 = 0$ pillanatban. Az első öt olyan állapot, amit figyelnünk kell a következő

$$\begin{aligned} r_0 &:= r(0), & \varphi_0 &\equiv \varphi(0) \pmod{2\pi}, & -\pi &\leq \varphi_0 < \pi; \\ r_1 &:= r(\pi - 0) (= r_0), & \varphi_1 &:= \varphi(\pi - 0); \\ r_2 &:= r(\pi) = f(\varphi_1; D) r_1, & \varphi_2 &:= \varphi(\pi) = \phi(\varphi_1; D); \\ r_3 &:= r(2\pi - 0) (= r_2), & \varphi_3 &:= \varphi(2\pi - 0); \\ r_4 &:= r(2\pi) = f(\varphi_3; d) r_3, & \varphi_4 &:= \varphi(2\pi) = \phi(\varphi_3; d), \end{aligned} \quad (13)$$

(az indexelés eltér a (9)-belitől!, lásd 2 ábra).



2. ábra. A dinamika eső négy lépése

3.1. Definíció. A mozgást leíró egyenletrendszer egy megoldását 2π periódusú szögperiodikusnak (illetve 4π periódusúnak) hívunk, ha

$$\varphi_4 \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi} \quad (\text{illetve, ha } \varphi_4 \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi}).$$

3.2. Definíció. A mozgást leíró egyenletrendszer 2π vagy 4π periódusú szögperiodikus megoldását közeledőnek (illetőleg távolodónak) hívunk, ha

$$r_4 < r_0 \quad (\text{illetőleg, ha } r_4 > r_0).$$

Továbbá, a mozgást leíró egyenletrendszer egy megoldása 2π -periodikus (illetve 4π -periodikus) pontosan akkor, ha szögperiodikus és $r_4 = r_0$.

3.1. Lemma. 1. A rendszer egy szögperiodikus megoldása közeledő (illetőleg távolodó) pontosan akkor, ha

$$f(\varphi_1; D) < f(\varphi_0; D) \quad (\text{illetve, ha } f(\varphi_1; D) > f(\varphi_0; D)).$$

2. A rendszer egy 2π vagy 4π periódusú szögperiodikus megoldása ugyanazzal a periódussal periodikus akkor és csak akkor, ha

$$f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D).$$

A bizonyítás megtalálható a [3] dolgozatban.

Ezek után kimondhatjuk fő eredményünket, megfogalmazva ezzel az (2) egyenlet periodikus megoldásai létezésének feltételét.

3.2. Tétel. Bármely $\varepsilon > 0$ estén léteznek a $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatok úgy, hogy az (2) egyenletnek a $T = T_k(\varepsilon)$ (illetve $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$) értékekkel $2T_k(\varepsilon)$ -periodikus (illetve $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodikus) megoldásai vannak. Továbbá,

$$0 < \tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2 < T_1 \leq T_2 < \tilde{T}_3 \leq \tilde{T}_4 < \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty, \quad (14)$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+2) \left(\frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+1) \left(\frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

érvényes minden $p \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

A bizonyítás megtalálható a [3] cikkben.

Hivatkozások

- [1] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] Butikov, E. I. Parametric resonance in a linear oscillator at square-wave modulation. *Eur. J. Phys.* **26** (2005), 157–174.
- [3] Csizmadia, L.; Hatvani, L. On the linear model of seinging with square wave coefficient by an elementary geometric method. *Acta Sci. Math.* **81** (2015), 483–502.
- [4] Curry, S. M. How chidren swing. *Amer. J. Phys.* **44** (1976), 924–926.
- [5] Csörgő, S.; Hatvani, L. Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients. *J. Differential Equations* **248**(2010), no. 1, 21–49.
- [6] Hatvani, L. On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* **4** (1998), 321–330.
- [7] Hatvani, L. An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem. *Acta Sci. Math.* **79**(2013), no. 1–2, 87–105.
- [8] Hatvani, L. On the parametrically excited pendulum equation with a square wave coefficient (in preparation).
- [9] Haupt, O. Über eine Methode zum Bewise von Oszillationstheoremen. *Math. Ann.* **76**(1914), 67–104.
- [10] Haupt, O. Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. *Math. Ann.* **79**(1917), 278–285.
- [11] Hill, G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon. *Acta Mathematica* **8**(1886), 1–36.
- [12] Hochstadt, H. A special Hill's equation with discontinuous coefficients. *Amer. Math. Monthly* **70**(1963), 18–26.
- [13] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. *Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [14] Lyapunov, A. M. The general problem of the stability of motion. Lyapunov centenary issue. *Internat. J. Control* **55**(1992), no. 3, 521–790.
- [15] Magnus, W.; Winkler, S. *Hill's equation*. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [16] Meissner, E. Über Schüttel-schwingungen in Systemen mit Periodisch Veränderlicher Elastizität. *Schweizer Bauzeitung* **72**(1918), no. 10, 95–98.
- [17] D. R. Merkin, *Introduction to the Theory of Stability*. Springer-Verlag, 1997.
- [18] Seyranian, A. P.; Seyranian, A. A. Breakup of resonance zones for Meissner's equation with small damping. *Moscow University Mechanics Bulletin* (2003), No. 5, 53–59.