Matematika a konyhában. Mértékről és integrálról elemi(bb) módon.

Csizmadia László
cslaci@math.u-szeged.hu
www.math.u-szeged.hu

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Kutatók éjszakája

Kell egy mennyiség!

Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok

Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg:

Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933), Augsburg (955)

Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933), Augsburg (955)
Az első területszerzés: 1091. Szent László

Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933), Augsburg (955)
Az első területszerzés: 1091. Szent László

Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933), Augsburg (955)
Az első területszerzés: 1091. Szent László

Terület

Terület

Természetes elvrásaink:

Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám

Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzék meg

Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzék meg

Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzék meg

- egy bennfoglalt rész területe nemnagyobb, mint az ezt tartalmazó rész területe

Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzék meg

- egy bennfoglalt rész területe nemnagyobb, mint az ezt tartalmazó rész területe
- az egységnyi oldalú négyzet területe 1

Gyermekkori emlékek

Gyermekkori emlékek

Gyermekkori emlékek

Gyermekkori emlékek

$$T = a \cdot b$$

A kerek asztal

A kerek asztal

A kerek asztal

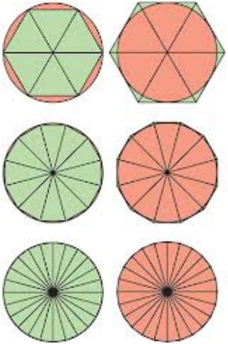
Vajon mekkora ennek az asztalnak a területe?

A kerek asztal

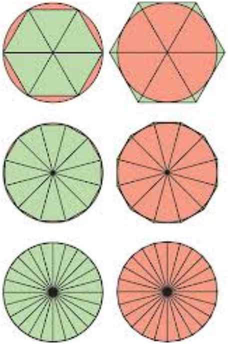
Vajon mekkora ennek az asztalnak a területe? Arkhimédész módszere:

Végtelen közel

Végtelen közel



Végtelen közel



Kívülről is, belülről **tetszőlegesen közel** kerülünk a kör területéhez a köré-, illetve beleírt sokszögek területeinek segítségével, ha az oldalszámot **elegendően nagyra** választjuk.

Számsorozat határértéke

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele,

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolszöget, tizenhatszöget, ...,

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolszöget, tizenhatszöget, $\ldots$, n-szöget írunk kívül is, belül is:

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolszöget, tizenhatszöget, ..., n-szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolszöget, tizenhatszöget, $\ldots$, n-szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

$$T_b = n \cdot r^2 \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \leq T_{\text{kör}}$$

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolszöget, tizenhatszöget, ...,n-szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

$$T_b = n \cdot r^2 \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \leq T_{\text{kör}}$$

$$n \to \infty \Rightarrow n \cdot \tan \frac{360}{2n} \to \pi$$

Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az r sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolszöget, tizenhatszöget, ..., n-szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

$$T_b = n \cdot r^2 \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \leq T_{\text{kör}}$$

$$n \to \infty \Rightarrow n \cdot \tan \frac{360}{2n} \to \pi$$

$$n \to \infty \Rightarrow n \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \to \pi$$

Egy antik probléma

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével?

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik:

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfújjuk úgy, hogy végül köréírt legyen belőle

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfújjuk úgy, hogy végül köréírt legyen belőle lényeges a FOLYTONOSSÁG

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfújjuk úgy, hogy végül köréírt legyen belőle lényeges a FOLYTONOSSÁG Euklideszi módon NEM szerkeszthető ilyen négyzet

Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfújjuk úgy, hogy végül köréírt legyen belőle lényeges a FOLYTONOSSÁG Euklideszi módon NEM szerkeszthető ilyen négyzet

a π irracionális, és transzcendens szám

Palacsintaproblémák

Palacsintaproblémák

Palacsintaproblémák

Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?

Palacsintaproblémák

Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?
Az előző „fölfújjuk" a kört gondolattal azonosan: igen, lehetséges.

Palacsintaproblémák

Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?
Az előző „fölfújjuk" a kört gondolattal azonosan: igen, lehetséges.
Lényeges, hogy a kés mozgatása **folytonos**

Palacsintaproblémák

Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?
Az előző „fölfújjuk" a kört gondolattal azonosan: igen, lehetséges.
Lényeges, hogy a kés mozgatása **folytonos** azaz **elegendően kicsi** mozdításra **kellően kicsi** szelet jön létre.

Több palacsinta

Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?

Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?

Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?

Válasz: igen.

Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?

Válasz: igen. Bizonyítása: Chinn-Steenrod, Bevezetés a topológiába,Gondolat Kiadó, p.107-112.

Főétel

Főétel

Mekkora a területe egy rántotthúsnak?

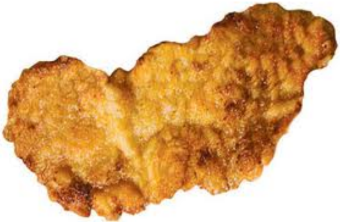
Főétel

Mekkora a területe egy rántotthúsnak? rántás előtt

Főétel

Mekkora a területe egy rántotthúsnak? rántás előtt

rántás (1920.06.04.) után



Függvénygrafikon alatti terület

Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.

Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk. Arkhimédész módszerét lemásolva bele is és köré is ismert területű téglalapokat írunk

Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.
Arkhimédész módszerét lemásolva bele is és köré is ismert területű téglalapokat írunk
Riemann-integrál

Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.
Arkhimédész módszerét lemásolva bele is és köré is ismert területű téglalapokat írunk
Riemann-integrál
`http://demonstrations.wolfram.com/RiemannVersusLebesgue/`

Újra a határérték!!!

Újra a határérték!!!

Mekkora az $y = 1/x$ grafikonja alé eső terület, ha $1 \leq x \leq 2$?

Újra a határérték!!!

Mekkora az $y = 1/x$ grafikonja alé eső terület, ha $1 \leq x \leq 2$? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

Újra a határérték!!!

Mekkora az $y = 1/x$ grafikonja alé eső terület, ha $1 \leq x \leq 2$? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \ldots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz} \quad q = \sqrt[n]{2})$$

Újra a határérték!!!

Mekkora az $y = 1/x$ grafikonja alé eső terület, ha $1 \leq x \leq 2$? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \ldots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz} \quad q = \sqrt[n]{2})$$

Két szomszédos osztáspont távolsága: $x_{i+1} - x_i = q^i \cdot (q-1)$, és így a téglalapok területösszege

Újra a határérték!!!

Mekkora az $y = 1/x$ grafikonja alé eső terület, ha $1 \leq x \leq 2$? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \ldots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz} \quad q = \sqrt[n]{2})$$

Két szomszédos osztáspont távolsága: $x_{i+1} - x_i = q^i \cdot (q-1)$, és így a téglalapok területösszege

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^i} \cdot q^i \cdot (q - i) = n \cdot (q - 1) = n \cdot (\sqrt[n]{2}) - 1$$

Újra a határérték!!!

Mekkora az $y = 1/x$ grafikonja alé eső terület, ha $1 \leq x \leq 2$? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

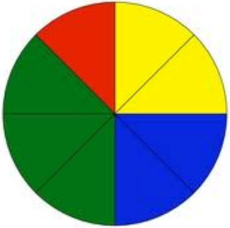
$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \ldots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz} \quad q = \sqrt[n]{2})$$

Két szomszédos osztáspont távolsága: $x_{i+1} - x_i = q^i \cdot (q - 1)$, és így a téglalapok területösszege

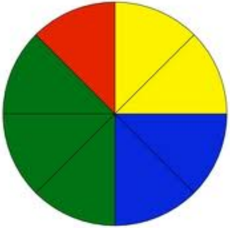
$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^i} \cdot q^i \cdot (q - i) = n \cdot (q - 1) = n \cdot (\sqrt[n]{2}) - 1$$

Vagyis ismét számsorozat határértékének kiszámítása a feladat.

Ez is terület

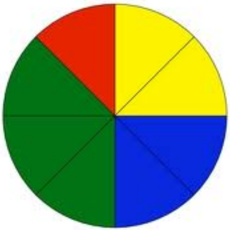


Ez is terület



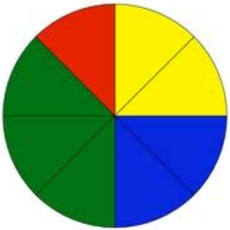
Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?

Ez is terület



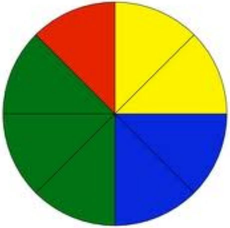
Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?
Arányba kell állítani az egész körlap és a kívánt rész területei mérőszámát:

Ez is terület



Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?
Arányba kell állítani az egész körlap és a kívánt rész területei mérőszámát:
Piros: 1/8-ad **valószínűséggel**, (zöld: 3/8),

Ez is terület



Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?
Arányba kell állítani az egész körlap és a kívánt rész területei mérőszámát: Piros: 1/8-ad **valószínűséggel**, (zöld: 3/8), föltételezzük, hogy a körlap semelyik része nincs kitüntetve a többihez képest!!!

Ez is terület?

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?
Számhalmazok „területét" kellene összehasonlítani.

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón? Számhalmazok „területét" kellene összehasonlítani. „Mérjük" a számhalmazokat az elemeik számával!

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?
Számhalmazok „területét" kellene összehasonlítani. „Mérjük" a számhalmazokat az elemeik számával!
Az „összterület" az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón? Számhalmazok „területét" kellene összehasonlítani. „Mérjük" a számhalmazokat az elemeik számával!

Az „összterület" az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

$$\binom{90}{5}$$

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón? Számhalmazok „területét" kellene összehasonlítani. „Mérjük" a számhalmazokat az elemeik számával!
Az „összterület" az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

$$\binom{90}{5}$$

a várva-várt esemény „területe" pedig 1,

Ez is terület?

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón? Számhalmazok „területét" kellene összehasonlítani. „Mérjük" a számhalmazokat az elemeik számával!

Az „összterület" az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

$$\binom{90}{5}$$

a várva-várt esemény „területe" pedig 1, így az esély igen csekély:

$$1/\binom{90}{5} = 0,0000000227$$

Feketeleves

Feketeleves

Baj van!

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0,1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0,1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret)

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0, 1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0, 1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0,1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;
rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ($\leq$ keresett méret)

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0, 1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;
rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ($\leq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amyelyek közül válaszuk a legnagyobbat

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0,1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;
rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ($\leq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amyelyek közül válaszuk a legnagyobbat Jordan-féle belső mérték

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0, 1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;
rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ($\leq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amyelyek közül válaszuk a legnagyobbat Jordan-féle belső mérték
Ha a kétféle mérték egyenlő, akkor az lesz a keresett érték (Jordan-mérték).

Feketeleves

Baj van!
Mekkora a $(0, 1)$-be eső racionális számok halmazának „területe"?
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ($\geq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;
rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ($\leq$ keresett méret) ez sok-sok szám, amyelyek közül válaszuk a legnagyobbat Jordan-féle belső mérték
Ha a kétféle mérték egyenlő, akkor az lesz a keresett érték (Jordan-mérték). A függvénygrafikon alatti területet (Rieman-integrál) ugyanilyen módon kaptuk. Üres halmaz Jordan-mértéke 0.

Lássuk hát!

$$H = \{x|\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Lássuk hát!

$$H = \{x|\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke:

Lássuk hát!

$$H = \{x|\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Lássuk hát!

$$H = \{x|\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke:

Lássuk hát!

$$H = \{x |\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1
Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján!

Lássuk hát!

$$H = \{x|\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján! Minden racionális szám között van irracionális, azaz a H halmazt belülről nem tudjuk lefedni **VÉGES SOK** olyan intervallummal, hogy azok CSAK racionális számot tartalmazzanak

Lássuk hát!

$$H = \{x|\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1
Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján! Minden racionális szám között van irracionális, azaz a H halmazt belülről nem tudjuk lefedni **VÉGES SOK** olyan intervallummal, hogy azok CSAK racionális számot tartalmazzanak a belső-mérték 0, vagyis nem tudjuk megadni a választ. Hacsak...!

Lássuk hát!

$$H = \{x | \, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján! Minden racionális szám között van irracionális, azaz a H halmazt belülről nem tudjuk lefedni **VÉGES SOK** olyan intervallummal, hogy azok CSAK racionális számot tartalmazzanak a belső-mérték 0, vagyis nem tudjuk megadni a választ. Hacsak...! Jövőre is lesz Kutatók éjszakája.

Köszönöm a figyelmet!