Érdekességek az elemi matematika köréből

Csizmadia László

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Kutatók éjszakája
Szeged, SZTE

Társasház

Egy társasházban 123 ember lakik. Életkoruk összege években mérve 3813.

Társasház

Egy társasházban 123 ember lakik. Életkoruk összege években mérve 3813.

Társasház

Egy társasházban 123 ember lakik. Életkoruk összege években mérve 3813.

Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a házból 100 lakos úgy, hogy életkoraik összege nem kevesebb, mint 3100.

Megoldás

Életkor szerint sorbarendezzük a lakosokat (pl.: Bőhm bácsi, Taki bácsi, Lenke néni, Magenheim doktor,...).

Megoldás

Életkor szerint sorbarendezzük a lakosokat (pl.: Bőhm bácsi, Taki bácsi, Lenke néni, Magenheim doktor,...).
Válasszuk ki a 100 legidősebbet. Közülük a legfiatalabb sem fiatalabb, mint a fönnmaradó 23 lakos bármelyike.

Megoldás

Életkor szerint sorbarendezzük a lakosokat (pl.: Bőhm bácsi, Taki bácsi, Lenke néni, Magenheim doktor,...).
Válasszuk ki a 100 legidősebbet. Közülük a legfiatalabb sem fiatalabb, mint a fönnmaradó 23 lakos bármelyike.

Állítás

A 100 *legidősebb lakos életkorának összege nem lehet kevesebb* 3100-*nál.*

Megoldás

Életkor szerint sorbarendezzük a lakosokat (pl.: Bőhm bácsi, Taki bácsi, Lenke néni, Magenheim doktor,...).
Válasszuk ki a 100 legidősebbet. Közülük a legfiatalabb sem fiatalabb, mint a fönnmaradó 23 lakos bármelyike.

Állítás

A 100 *legidősebb lakos életkorának összege nem lehet kevesebb* 3100*-nál.*

Bizonyítás

Indirekt tegyük fel, hogy az életkoruk összege kevesebb, mint 3100*. Ez azt jelenti, hogy közülük a legfiatalabb életkora kevesebb, mint* 31*. Ekkor a kimaradó* 23 *lakos életkora is kevesebb* 31*-nél (külön-külön), vagyis az életkoraik összege kevesebb, mint* $23 \cdot 31 = 713$*. Ezekből kapjuk, hogy a* 123 *lakos életkorának összege kevesebb, mint* $713 + 3100 = 3813$*, ami ellentmondásban van a feladat föltételével.*

Haj-jaj

Anatómia: az embereknek kevesebb, mint 200000 hajszála van.

Haj-jaj

Anatómia: az embereknek kevesebb, mint 200000 hajszála van.

Haj-jaj

Anatómia: az embereknek kevesebb, mint 200000 hajszála van.

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.
Csongrádban kb. 423751 (2007.01.01.) ember él.

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.
Csongrádban kb. 423751 (2007.01.01.) ember él.
Rendezzük hajszálaik száma szerint csoportokba őket:

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.
Csongrádban kb. 423751 (2007.01.01.) ember él.
Rendezzük hajszálaik száma szerint csoportokba őket: 200000 csoport.

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.
Csongrádban kb. 423751 (2007.01.01.) ember él.
Rendezzük hajszálaik száma szerint csoportokba őket: 200000 csoport.
Biztosan van legalább egy olyan csoport, ahová legalább két ember kerül.

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.
Csongrádban kb. 423751 (2007.01.01.) ember él.
Rendezzük hajszálaik száma szerint csoportokba őket: 200000 csoport.
Biztosan van legalább egy olyan csoport, ahová legalább két ember kerül.

Feladat és megoldása

Bizonyítsuk be, hogy Csongrád megyében él legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi hajszáluk van.
Csongrádban kb. 423751 (2007.01.01.) ember él.
Rendezzük hajszálaik száma szerint csoportokba őket: 200000 csoport.
Biztosan van legalább egy olyan csoport, ahová legalább két ember kerül.

Tanuló

Egy diáknak 9 feladatot kell megoldania egyetlen hét alatt.

Tanuló

Egy diáknak 9 feladatot kell megoldania egyetlen hét alatt.
Mutassuk meg, hogy legalább a hét egyik napján, legalább 2 feladatot meg kell oldania, ha a határidőt tartani akarja.

Tanuló

Egy diáknak 9 feladatot kell megoldania egyetlen hét alatt.
Mutassuk meg, hogy legalább a hét egyik napján, legalább 2 feladatot meg kell oldania, ha a határidőt tartani akarja.

Skatulya elv (Pigeonhole-, Dirichlet-principle)

Ha m testet osztunk szét n csoportba, és $m > n \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, akkor legalább $(k+1)$ test kerül az egyik csoportba.

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van,

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12 | (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b.

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k+1, b = 3l+1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k+1, b = 3l+1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3|b-a$$

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k+1, b = 3l+1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3|b-a$$

A 4 szám paritását vizsgálva

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12 | (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k + 1, b = 3l + 1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3 | b - a$$

A 4 szám paritását vizsgálva
legalább 3 szám azonos paritású

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k+1, b = 3l+1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3|b-a$$

A 4 szám paritását vizsgálva
legalább 3 szám azonos paritású $\Rightarrow$ legalább 3 különbség páros

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k + 1, b = 3l + 1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3|b - a$$

A 4 szám paritását vizsgálva
legalább 3 szám azonos paritású $\Rightarrow$ legalább 3 különbség páros
2 szám páros, 2 szám páratlan

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k+1, b = 3l+1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3|b-a$$

A 4 szám paritását vizsgálva
legalább 3 szám azonos paritású $\Rightarrow$ legalább 3 különbség páros
2 szám páros, 2 szám páratlan $\Rightarrow$ legalább 2 különbség páros

Számelméleti példa

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4 szám van, a 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportba rendezve a skatulya elv miatt legalább kettő ugyanabba a maradékosztályba esik: például az a és a b. Ekkor

$$a = 3k+1, b = 3l+1, k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$3|b-a$$

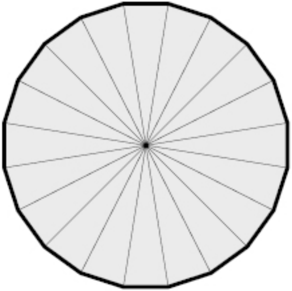
A 4 szám paritását vizsgálva
legalább 3 szám azonos paritású $\Rightarrow$ legalább 3 különbség páros
2 szám páros, 2 szám páratlan $\Rightarrow$ legalább 2 különbség páros
A szorzat osztható 3-mal és 4-gyal, azaz 12-vel.

Geometria

Egy szabályos húszszög csúcsai mind kékre vagy pirosra vannak festve. A piros csúcsok száma 9, a kékeké 11.

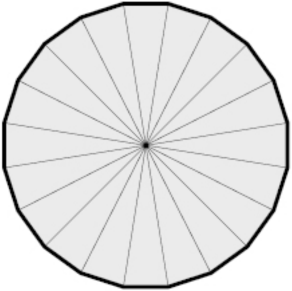
Geometria

Egy szabályos húszszög csúcsai mind kékre vagy pirosra vannak festve. A piros csúcsok száma 9, a kékeké 11.



Geometria

Egy szabályos húszszög csúcsai mind kékre vagy pirosra vannak festve. A piros csúcsok száma 9, a kékeké 11.



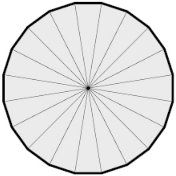
Bizonyítsuk be, hogy legalább 2 kék csúcs egy átló mentén, ellentétesen helyezkedik el.

Megoldás

A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok

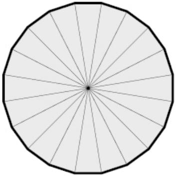
Megoldás

A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Megoldás

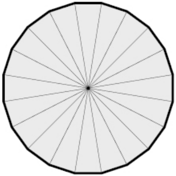
A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Világos:

Megoldás

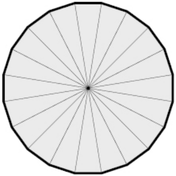
A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Világos:
egy átmérőn átellenes csúcsok vannak;

Megoldás

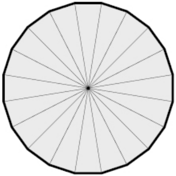
A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Világos:
egy átmérőn átellenes csúcsok vannak;
legföljebb 2 csúcs van egy átmérőn;

Megoldás

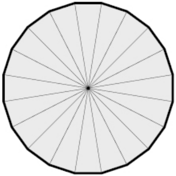
A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Világos:
egy átmérőn átellenes csúcsok vannak;
legföljebb 2 csúcs van egy átmérőn;
összesen 10 átmérő van.

Megoldás

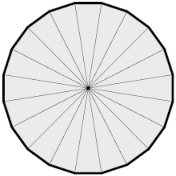
A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Világos:
egy átmérőn átellenes csúcsok vannak;
legföljebb 2 csúcs van egy átmérőn;
összesen 10 átmérő van.
Véve azon átmérőket, melyek legalább egyik vége piros, legföljebb 9 ilyet találunk.

Megoldás

A szabályos húszszög körülírt körén vannak a csúcsok , vegyük a csúcsokat tartalmazó átmérőit ennek a körnek.



Világos:
egy átmérőn átellenes csúcsok vannak;
legföljebb 2 csúcs van egy átmérőn;
összesen 10 átmérő van.
Véve azon átmérőket, melyek legalább egyik vége piros, legföljebb 9 ilyet találunk.
Van legalább 1 átmérő, amin nincs piros csúcs.

Számrejtvény

Keressük meg a kifejezés értékét, ha különböző betű különböző számjegyet jelöl, azonos betűk ugyanazt a számjegyet rejtik:

Számrejtvény

Keressük meg a kifejezés értékét, ha különböző betű különböző számjegyet jelöl, azonos betűk ugyanazt a számjegyet rejtik:

$$\frac{D \cdot I \cdot R \cdot I \cdot C \cdot H \cdot L \cdot E \cdot T}{P \cdot R \cdot I \cdot N \cdot C \cdot I \cdot P \cdot L \cdot E}$$

Az „elkent" irracionálisok

$$\alpha \in \mathbb{Q}^\star, \;\; m, n \in \mathbb{Z}$$

Az „elkent" irracionálisok

$$\alpha \in \mathbb{Q}^{\star},\;\; m, n \in \mathbb{Z}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén

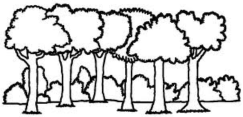
$$|n \cdot \alpha - m| < \varepsilon \; .$$

Az „elkent" irracionálisok

$$\alpha \in \mathbb{Q}^\star, \;\; m, n \in \mathbb{Z}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$|n \cdot \alpha - m| < \varepsilon \; .$$

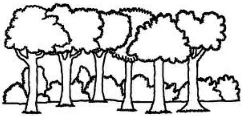


Az „elkent" irracionálisok

$$\alpha \in \mathbb{Q}^\star, \;\; m, n \in \mathbb{Z}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$|n \cdot \alpha - m| < \varepsilon \; .$$

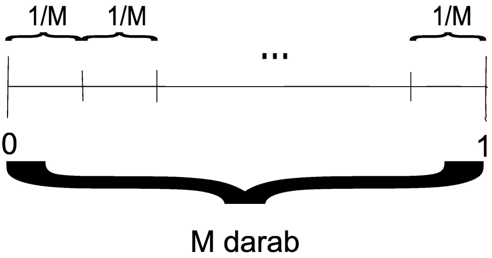


Megoldás - naná, hogy skatulya elvvel

Legyen $M > 1/\varepsilon$, és osszuk föl a $(0;1)$ intervallumot M egyenlő részre.

Megoldás - naná, hogy skatulya elvvel

Legyen $M > 1/\varepsilon$, és osszuk föl a $(0;1)$ intervallumot M egyenlő részre.



$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

Ezek mind különbözőek, és mind a $(0;1)$ eleme. $\Rightarrow$

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

Ezek mind különbözőek, és mind a $(0;1)$ eleme. $\Rightarrow$ skatulya elvből következik, hogy

$$\exists n_1, n_2 (n_1 \neq n_2) :$$

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

Ezek mind különbözőek, és mind a $(0;1)$ eleme. $\Rightarrow$ skatulya elvből következik, hogy

$\exists n_1, n_2 (n_1 \neq n_2)$: ugyanabba a részbe kerülnek

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

Ezek mind különbözőek, és mind a $(0;1)$ eleme. $\Rightarrow$ skatulya elvből következik, hogy

$$\exists n_1, n_2 (n_1 \neq n_2) : \text{ugyanabba a részbe kerülnek } |\{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\}| < \varepsilon \ .$$

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

Ezek mind különbözőek, és mind a $(0;1)$ eleme. $\Rightarrow$ skatulya elvből következik, hogy

$$\exists n_1, n_2 (n_1 \neq n_2) : \text{ugyanabba a részbe kerülnek } |\{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\}| < \varepsilon \ .$$

$\{n_1\alpha\} = n_1\alpha - [n_1\alpha]$

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{M \cdot \alpha\}, \{(M+1) \cdot \alpha\}$$

Ezek mind különbözőek, és mind a $(0;1)$ eleme. $\Rightarrow$ skatulya elvből következik, hogy

$$\exists n_1, n_2 (n_1 \neq n_2) : \text{ugyanabba a részbe kerülnek } |\{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\}| < \varepsilon \ .$$

$$\{n_1\alpha\} = n_1\alpha - [n_1\alpha] \Rightarrow |(n_1 - n_2)\alpha - ([n_1\alpha] + [n_2\alpha])| = |n \cdot \alpha - m| < \varepsilon \ .$$

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból,

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból, **megszámlálhatóan végtelen**,

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból, **megszámlálhatóan végtelen**, valós számokból még több,

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból, **megszámlálhatóan végtelen**, valós számokból még több, azaz irracionális számból több van, mint racionális számból.

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból, **megszámlálhatóan végtelen**, valós számokból még több, azaz irracionális számból több van, mint racionális számból.
Megmutatjuk, hogy a $(0;1)$ intervallum racionális számai sorozatba rendezhetőek, azaz van első, második, ...

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból, **megszámlálhatóan végtelen**, valós számokból még több, azaz irracionális számból több van, mint racionális számból.
Megmutatjuk, hogy a $(0;1)$ intervallum racionális számai sorozatba rendezhetőek, azaz van első, második, ...
Megmutatjuk, hogy a $(0;1)$-be eső valós számokat nem tudjuk sorozatba szedni.

Hát ez fura!

A racionális számokból ugyanannyi van, mint természetes számból, **megszámlálhatóan végtelen**, valós számokból még több, azaz irracionális számból több van, mint racionális számból.
Megmutatjuk, hogy a $(0;1)$ intervallum racionális számai sorozatba rendezhetőek, azaz van első, második, ...
Megmutatjuk, hogy a $(0;1)$-be eső valós számokat nem tudjuk sorozatba szedni.
Indirekt módon tegyük föl, hogy sorozatba rendezhetőek. Írjuk mindegyik számot tizedestört alakba úgy, hogy mindig a végtelen sok tizedesjegyű kifejtést választjuk, például $(0,5 = 0,4999...)$.

$$x_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots,\ \ x_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots,\ \ \ldots$$

$a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

$$x_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots,\ \ x_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots,\ \ \ldots$$

$a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

$$y = 0,b_1b_2b_3\ldots$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{nn} \neq 1; \\ 2, & \text{ha } a_{nn} = 1\ . \end{cases}$$

$$x_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots,\ \ x_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots,\ \ \ldots$$

$a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

$$y = 0,b_1b_2b_3\ldots$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{nn} \neq 1; \\ 2, & \text{ha } a_{nn} = 1\ . \end{cases}$$

Föltételezésünkkel ellentétben $y \in (0;1)$, azaz mégsem mindegyik számot soroltuk föl.

Búcsú

Tanulság: skatulyázni jó

Búcsú

Tanulság: skatulyázni jó de azért óvatosan

Búcsú

Tanulság: skatulyázni jó de azért óvatosan

Köszönöm a figyelmet!