

Racionális törtfüggvények integrálása. Parciális törtekre bontás.

Matematika 2.

4. előadás

SZTE Mérnöki Kar
Szeged, 2025. március 4.

Definíció. A **polinom** olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek függvénydefiníciója felírható

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (*)$$

alakban, valamely n nemnegatív egész számra és $a_0, a_1, \dots, a_n$ valós számokra.

Példák.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 5x - 1 &= 3x^2 + 5x + (-1) \\ q(x) &= x^4 - 7x^2 + 6x + 8 &= 1x^4 + 0x^3 + (-7)x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

Megjegyzés. Egy polinom értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$ halmaz.

Definíció. A **polinom** olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek függvénydefiníciója felírható

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (*)$$

alakban, valamely n nemnegatív egész számra és $a_0, a_1, \dots, a_n$ valós számokra.

Példák.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 5x - 1 &= 3x^2 + 5x + (-1) \\ q(x) &= x^4 - 7x^2 + 6x + 8 &= 1x^4 + 0x^3 + (-7)x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

Definíció. A fenti (*) definícióban szereplő $a_0, \dots, a_n$ számokat a polinom **együtthatóinak** nevezzük.

Például az $r(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8$ polinomban az x^3 együtthatója 5, az x^2 együtthatója -6 .

Definíció. A **polinom** olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek függvénydefiníciója felírható

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (*)$$

alakban, valamely n nemnegatív egész számra és $a_0, a_1, \dots, a_n$ valós számokra.

Példák.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 5x - 1 &= 3x^2 + 5x + (-1) \\ q(x) &= x^4 - 7x^2 + 6x + 8 &= 1x^4 + 0x^3 + (-7)x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

Definíció. A fenti (*) definícióban szereplő $a_0, \dots, a_n$ számokat a polinom **együtthatóinak** nevezzük.

Például az $r(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8$ polinomban az x^3 együtthatója 5, az x^2 együtthatója -6 .

Def. Egy $f(x)$ polinom **fokszáma** (vagy **foka**) a legnagyobb olyan kitevő, amely megjelenik egy x -hatvány kitevőjeként a (*) alak egy nemnulla együtthatós tagjában. És az ezen legnagyobb kitevőhöz tartozó x -hatvány együtthatója a polinom **főegyütthatója**.

Definíció. A **polinom** olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek függvénydefiníciója felírható

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (*)$$

alakban, valamely n nemnegatív egész számra és $a_0, a_1, \dots, a_n$ valós számokra.

Példák.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 5x - 1 &= 3x^2 + 5x + (-1) \\ q(x) &= x^4 - 7x^2 + 6x + 8 &= 1x^4 + 0x^3 + (-7)x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

Definíció. A fenti $(*)$ definícióban szereplő $a_0, \dots, a_n$ számokat a polinom **együtthatóinak** nevezzük.

Például az $r(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8$ polinomban az x^3 együtthatója 5, az x^2 együtthatója -6 .

Def. Egy $f(x)$ polinom **fokszáma** (vagy **foka**) a legnagyobb olyan kitevő, amely megjelenik egy x -hatvány kitevőjeként a $(*)$ alak egy nemnulla együtthatós tagjában. És az ezen legnagyobb kitevőhöz tartozó x -hatvány együtthatója a polinom **főegyütthatója**.

Például, a fenti $p(x)$ példapolinom másodfokú (azaz a fokszáma 2) és a főegyütthatója 3. A $q(x)$ polinom pedig negyedfokú (azaz a fokszáma 4) és főegyütthatója 1.

Definíció. A **polinom** olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek függvénydefiníciója felírható

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (*)$$

alakban, valamely n nemnegatív egész számra és $a_0, a_1, \dots, a_n$ valós számokra.

Példák.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 5x - 1 &= 3x^2 + 5x + (-1) \\ q(x) &= x^4 - 7x^2 + 6x + 8 &= 1x^4 + 0x^3 + (-7)x^3 + 6x + 8 \end{aligned}$$

Definíció. A fenti $(*)$ definícióban szereplő $a_0, \dots, a_n$ számokat a polinom **együtthatóinak** nevezzük.

Például az $r(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8$ polinomban az x^3 együtthatója 5, az x^2 együtthatója -6 .

Def. Egy $f(x)$ polinom **fokszáma** (vagy **foka**) a legnagyobb olyan kitevő, amely megjelenik egy x -hatvány kitevőjeként a $(*)$ alak egy nemnulla együtthatós tagjában. És az ezen legnagyobb kitevőhöz tartozó x -hatvány együtthatója a polinom **főegyütthatója**.

Például, a fenti $p(x)$ példapolinom másodfokú (azaz a fokszáma 2) és a főegyütthatója 3. A $q(x)$ polinom pedig negyedfokú (azaz a fokszáma 4) és főegyütthatója 1.

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Egy $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomot **gyöknélkülinek** nevezünk, ha nincs valós gyöke, azaz ha a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns negatív. (Például az $x^2 - 6x + 10$ polinom ilyen.)

Példák erre a tételre.

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3)$$

$$10x^3 + 3x^2 - 31x + 6 = (2x - 3)(x + 2)(5x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = (x - \sqrt{2} + 1)(x + \sqrt{2} + 1)$$

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Egy $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomot **gyöknélkülinek** nevezünk, ha nincs valós gyöke, azaz ha a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns negatív. (Például az $x^2 - 6x + 10$ polinom ilyen.)

Példák erre a tételre.

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3)$$

$$10x^3 + 3x^2 - 31x + 6 = (2x - 3)(x + 2)(5x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = (x - \sqrt{2} + 1)(x + \sqrt{2} + 1)$$

Kiegészítés. Ha a polinom főegyütthatója 1, akkor úgy is szorzattá alakítható (a tételnek megfelelő módon), hogy minden szorzótényező főegyütthatója is 1 legyen. (A fenti 1. és 3. példa ezt is illusztrálja.)

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Egy $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomot **gyöknélkülinek** nevezünk, ha nincs valós gyöke, azaz ha a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns negatív. (Például az $x^2 - 6x + 10$ polinom ilyen.)

Példák erre a tételre.

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3)$$

$$10x^3 + 3x^2 - 31x + 6 = (2x - 3)(x + 2)(5x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = (x - \sqrt{2} + 1)(x + \sqrt{2} + 1)$$

Kiegészítés. Ha a polinom főegyütthatója 1, akkor úgy is szorzattá alakítható (a tételnek megfelelő módon), hogy minden szorzótényező főegyütthatója is 1 legyen. (A fenti 1. és 3. példa ezt is illusztrálja.)

Megjegyzés. Ha a polinom elsőfokú, vagy gyöknélküli másodfokú, akkor a szorzattá alakítás egy tényezőtől fog állni (azaz „nem csinálunk semmit”):

$$3x + 7 = 3x + 7$$

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 10$$

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Egy $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomot **gyöknélkülinek** nevezünk, ha nincs valós gyöke, azaz ha a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns negatív. (Például az $x^2 - 6x + 10$ polinom ilyen.)

Példák erre a tételre.

$$\begin{aligned}x^4 - 4x^3 + 27 &= (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3) \\10x^3 + 3x^2 - 31x + 6 &= (2x - 3)(x + 2)(5x - 1) \\x^2 + 2x - 1 &= (x - \sqrt{2} + 1)(x + \sqrt{2} + 1)\end{aligned}$$

Hogy hogyan **találunk** egy ilyen szorzattá alakítást, az egy más kérdés . . . Erről majd egy későbbi dián beszélünk. Ezen a ponton számunkra az az érdekes, hogy ilyen szorzattá alakítás mindig **létezik**.

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

A tétel szerinti szorzattá alakítás „azonos” tényezőit összevonhatjuk:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3) = (x - 3)^2(x^2 + 2x + 3).$$

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

A tétel szerinti szorzattá alakítás „azonos” tényezőit összevonhatjuk:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3) = (x - 3)^2(x^2 + 2x + 3).$$

Azért van az „azonos” szó itt idézőjelben, mert összevonás szempontjából pl. az $x + 5$ és a $3x + 15$ tényezők is összevonhatók:

$$\dots (x + 5)(3x + 15) \dots = \dots 3(x + 5)^2 \dots$$

Tehát az „azonos” itt azt jelenti, hogy „egyik skalárszorosa (=számszorosa) a másiknak”.

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyök nélküli másodfokú polinomok.

A tétel szerinti szorzattá alakítás „azonos” tényezőit összevonhatjuk:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)(x - 3)(x^2 + 2x + 3) = (x - 3)^2(x^2 + 2x + 3).$$

Azért van az „azonos” szó itt idézőjelben, mert összevonás szempontjából pl. az $x + 5$ és a $3x + 15$ tényezők is összevonhatók:

$$\dots (x + 5)(3x + 15) \dots = \dots 3(x + 5)^2 \dots$$

Tehát az „azonos” itt azt jelenti, hogy „egyik skalárszorosa (=számszorosa) a másiknak”.

Ha egy $p(x)$ polinom algebra alaptétele szerinti szorzattá alakítására a fenti összevonásokat addig csináljuk, amíg lehet, akkor a polinom (egy) **irreducibilis szorzat alakját** kapjuk.

Például a $p(x) = 8x^7 - 28x^6 + 54x^5 - 381x^4 + 912x^3 - 990x^2 + 3850x - 6125$ polinomra $p(x) = (2x - 5)(2x - 5)(2x - 5)(x^2 + 2x + 7)(x^2 + 2x + 7) = (2x - 5)^3(x^2 + 2x + 7)^2$ az irreducibilis szorzat alak.

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Az algebra alaptételének egy következménye 1.

Tetszőleges (nem konstans) $p(x)$ polinom felírható

$$p(x) = C \cdot (m_1x + d_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (m_sx + d_s)^{k_s} \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (a_tx^2 + b_tx + c_t)^{\ell_t}$$

alakban, ahol $C, m_i, d_i, a_j, b_j, c_j$ konstansok (valós számok) minden $i = 1, \dots, s$ és $j = 1, \dots, t$ esetén; a $k_1, \dots, k_s, \ell_1, \dots, \ell_t$ kitevők pozitív egész számok; továbbá az $a_jx^2 + b_jx + c_j$ másodfokú polinomok gyöknélküliek; és a tételben szereplő „hatványalap” polinomok között egyik sem skalárszorosa a másiknak. A fenti alakot nevezzük a $p(x)$ polinom (egy) **irreducibilis szorzat alakjának**.

Példa.

$$4x^5 - 18x^4 + 20x^3 + 28x^2 - 64x + 30 = 2(x - 1)^2(2x + 3)(x^2 - 4x + 5)$$

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Az előző következményből a szorzótényezők főegyütthatóinak kiemelése után adódik a következő:

Az algebra alaptételének egy következménye 2.

Ha $p(x)$ egy olyan polinom, amelynek a **főegyütthatója 1**, akkor $p(x)$ felírható

$$p(x) = (x+d_1)^{k_1}(x+d_2)^{k_2}\dots(x+d_k)^{k_s}(x^2+b_1x+c_1)^{\ell_1}(x^2+b_2x+c_2)^{\ell_2}\dots(x^2+b_tx+c_t)^{\ell_t}$$

alakban, ahol d_i, b_j, c_j konstansok (valós számok) minden $i = 1, \dots, s$ és $j = 1, \dots, t$ esetén; a $k_1, \dots, k_s, \ell_1, \dots, \ell_t$ kitevők pozitív egész számok; továbbá az $x^2 + b_jx + c_j$ másodfokú polinomok gyöknélküliek; és a tételben szereplő „hatványalap” polinomok **különbözők**. A fenti alakot nevezzük a $p(x)$ polinom **szép irreducibilis szorzat alakjának**. (Vegyük észre, hogy az előző tételbeli C konstans értéke 1, valamint az m_i és a_j együtthatóké is.)

Példa.

$$x^5 - 6x^3 + 28x^2 - 39x + 36 = (x + 4)(x^2 - 2x + 3)^2.$$

Az algebra alaptétele. Minden (nem konstans) polinom szorzattá alakítható úgy, hogy a szorzat tényezői elsőfokú polinomok ill. gyöknélküli másodfokú polinomok.

Most azt tárgyaljuk, hogy **hogyan** tudunk szorzattá alakítani egy $p(x)$ polinomot:

- Ha $p(x)$ elsőfokú polinom, akkor nincs teendő.
- Ha $p(x)$ másodfokú polinom, akkor a középiskolában tanult módon tudjuk szorzattá alakítani. (Mindjárt átismételjük.)
- Ha $p(x)$ harmad- vagy negyedfokú polinom, akkor van „megoldóképlet” a szorzattá alakításra, de ez csak a matematikusoknak tananyag. (Így mi csak speciális polinokat tudunk szorzattá alakítani. Ha találunk szép gyököt, vagy működik az $y = x^2$ helyettesítés, stb.)
- Ha $p(x)$ ötöd- vagy magasabbfokú polinom, akkor nem létezik(!) „megoldóképlet” sem $p(x)$ gyökeinek megtalálására, sem a szorzattá alakítására. (Csak speciális polinomokkal boldogulhatunk, mint az előző esetben.)

Másodfokú polinomok szorzattá alakítása (ismétlés).

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$ egy másodfokú polinom (ahol $a \neq 0$). Jelölje $D = b^2 - 4ac$ a diszkriminánsát (a megoldóképletben a gyök alatt szereplő kifejezést).

- (i) Ha $D < 0$, akkor $p(x)$ -nek nincs valós gyöke. Ekkor nincs teendő, hiszen $p(x)$ egy gyöknélküli másodfokú polinom, az irreducibilis szorzat alakja „saját maga”.
- (ii) Ha $D > 0$, akkor $p(x)$ -nek két különböző valós gyöke van; legyenek ezek x_1 és x_2 (melyeket a másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a gyöktényezős alak adja a keresett szorzattá alakítást:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- (iii) Ha $D = 0$, akkor $p(x)$ -nek egy valós gyöke van; legyen ez x_1 (pl. másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a gyöktényezős alak a következő:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

A (iii) eset voltaképpen a (ii) eset $x_1 = x_2$ esetének is tekinthető.

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$ egy **másodfokú polinom** (ahol $a \neq 0$). Jelölje $D = b^2 - 4ac$ a diszkriminánsát (a megoldóképletben a gyök alatt szereplő kifejezést).

- (i) Ha $D < 0$, akkor $p(x)$ -nek nincs valós gyöke. Ekkor nincs teendő, hiszen $p(x)$ egy gyöknélküli másodfokú polinom, az irreducibilis szorzat alakja „saját maga”.
- (ii) Ha $D > 0$, akkor $p(x)$ -nek két különböző valós gyöke van; legyenek ezek x_1 és x_2 (melyeket a másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a **gyöktényezős alak** adja a keresett szorzattá alakítást:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- (iii) Ha $D = 0$, akkor $p(x)$ -nek egy valós gyöke van; legyen ez x_1 (pl. másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a **gyöktényezős alak** a következő:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Példa (i)-re:

$$2x^2 + 3x + 5 = 2x^2 + 3x + 5,$$

mert $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$.

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$ egy **másodfokú polinom** (ahol $a \neq 0$). Jelölje $D = b^2 - 4ac$ a diszkriminánsát (a megoldóképletben a gyök alatt szereplő kifejezést).

- (i) Ha $D < 0$, akkor $p(x)$ -nek nincs valós gyöke. Ekkor nincs teendő, hiszen $p(x)$ egy gyöknélküli másodfokú polinom, az irreducibilis szorzat alakja „saját maga”.
- (ii) Ha $D > 0$, akkor $p(x)$ -nek két különböző valós gyöke van; legyenek ezek x_1 és x_2 (melyeket a másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a **gyöktényezős alak** adja a keresett szorzattá alakítást:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- (iii) Ha $D = 0$, akkor $p(x)$ -nek egy valós gyöke van; legyen ez x_1 (pl. másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a **gyöktényezős alak** a következő:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Példa (ii)-re:

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x - 1/2)(x + 3),$$

mert $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$, és a megoldóképlet szerint $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$, azaz $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -3$.

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$ egy **másodfokú polinom** (ahol $a \neq 0$). Jelölje $D = b^2 - 4ac$ a diszkriminánsát (a megoldóképletben a gyök alatt szereplő kifejezést).

- (i) Ha $D < 0$, akkor $p(x)$ -nek nincs valós gyöke. Ekkor nincs teendő, hiszen $p(x)$ egy gyöknélküli másodfokú polinom, az irreducibilis szorzat alakja „saját maga”.
- (ii) Ha $D > 0$, akkor $p(x)$ -nek két különböző valós gyöke van; legyenek ezek x_1 és x_2 (melyeket a másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a **gyöktényezős alak** adja a keresett szorzattá alakítást:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- (iii) Ha $D = 0$, akkor $p(x)$ -nek egy valós gyöke van; legyen ez x_1 (pl. másodfokú megoldóképlettel tudunk kiszámolni). Ebben az esetben a **gyöktényezős alak** a következő:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Példa (iii)-ra:

$$2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2,$$

mert $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$, és a megoldóképlet szerint $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4}$, azaz $x_1 = 1$.

Definíció. A két polinom hányadosaként definiált függvényeket **racionális törtfüggvényeknek** nevezzük.

Példák. $\frac{x^2 - 5x + 8}{2x + 3}, \quad \frac{3x + 5}{2x^3 - x^2 + 6x - 1}, \quad \frac{1}{x^4 + 2}, \quad \frac{x - 2}{x + 7}$

Definíció. A két polinom hányadosaként definiált függvényeket **racionális törtfüggvényeknek** nevezzük.

Példák. $\frac{x^2 - 5x + 8}{2x + 3}, \quad \frac{3x + 5}{2x^3 - x^2 + 6x - 1}, \quad \frac{1}{x^4 + 2}, \quad \frac{x - 2}{x + 7}$

Megjegyzés. Egy racionális törtfüggvény értelmezési tartománya azon x -ek halmaza, amelyekre a nevező nem nulla.

Definíció. A két polinom hányadosaként definiált függvényeket **racionális törtfüggvényeknek** nevezzük.

Példák. $\frac{x^2 - 5x + 8}{2x + 3}$, $\frac{3x + 5}{2x^3 - x^2 + 6x - 1}$, $\frac{1}{x^4 + 2}$, $\frac{x - 2}{x + 7}$

Megjegyzés. Egy racionális törtfüggvény értelmezési tartománya azon x -ek halmaza, amelyekre a nevező nem nulla.

A mai előadáson a racionális törtfüggvények integrálásával foglalkozunk. Ehhez megismerkedünk a **parciális törtekre bontással**, melynek segítségével meg tudjuk határozni a racionális törtfüggvény határozatlan integrálját, amennyiben a nevező:

- első- vagy másodfokú polinom, vagy
- sikerült első- és (gyöknélküli) másodfokú polinomok szorzatává alakítani a nevezőt.

A következő diákon ezt a „mechanikus” módszert ismertetjük lépésenként.

1. eset: Ha a racionális törtfüggvény számlálójának legalább akkora a fokszáma, mint a nevezőé, akkor a számlálót osszuk el maradékosan a nevezővel, és a következő példában látott módon alakítsuk a törtet „hányadospolinom + $\frac{\text{osztási maradék}}{\text{nevező}}$ ” alakra:

$$\int \frac{x^5 + 4x^4 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 1} dx = \int \frac{(x^2 + 3x - 3)(x^3 + x^2 - 1) + (4x^2 + x - 2)}{x^3 + x^2 - 1} dx =$$
$$\int \left(x^2 + 3x - 3 + \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 3x + \int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 1} dx.$$

Az 1. egyenlőség a maradékos osztás, a 2. egyenlőségnél tagonként osztottunk a nevezővel, a 3. egyenlőségnél pedig tagonként integráltunk.

1. eset: Ha a racionális törtfüggvény számlálójának legalább akkora a fokszáma, mint a nevezőé, akkor a számlálót osszuk el maradékosan a nevezővel, és a következő példában látott módon alakítsuk a törtet „hányadospolinom + $\frac{\text{osztási maradék}}{\text{nevező}}$ ” alakra:

$$\int \frac{x^5 + 4x^4 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 1} dx = \int \frac{(x^2 + 3x - 3)(x^3 + x^2 - 1) + (4x^2 + x - 2)}{x^3 + x^2 - 1} dx =$$

$$\int \left(x^2 + 3x - 3 + \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 3x + \int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 1} dx.$$

Mivel polinomok maradékos osztásánál a maradék alacsonyabb fokú polinom, mint amivel osztottunk, ezért a fenti eljárás után már „csak” egy olyan racionális törtfüggvény integrálját kell kiszámolnunk, amelyben a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező. Ezen integrál kiszámításához lépünk tovább a 2. lépésre.

1. eset: Ha a racionális törtfüggvény számlálójának legalább akkora a fokszáma, mint a nevezőé, akkor a számlálót osszuk el maradékosan a nevezővel, és a következő példában látott módon alakítsuk a törtet „hányadospolinom + $\frac{\text{osztási maradék}}{\text{nevező}}$ ” alakra:

$$\int \frac{x^5 + 4x^4 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 1} dx = \int \frac{(x^2 + 3x - 3)(x^3 + x^2 - 1) + (4x^2 + x - 2)}{x^3 + x^2 - 1} dx =$$

$$\int \left(x^2 + 3x - 3 + \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 3x + \int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 1} dx.$$

Mivel polinomok maradékos osztásánál a maradék alacsonyabb fokú polinom, mint amivel osztottunk, ezért a fenti eljárás után már „csak” egy olyan racionális törtfüggvény integrálját kell kiszámolnunk, amelyben a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező. Ezen integrál kiszámításához lépünk tovább a 2. lépésre.

2. eset: Ha a kiindulási racionális törtfüggvény számlálójának eleve kisebb a fokszáma, mint a nevezőé, akkor egyből ugrunk a 2. lépésre ezzel a függvénnyel.

Az 1. lépés (egy esetleges polinomosztás) után egy olyan törtfüggvényt kell integrálnunk, amelyben a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező.

Az 1. lépés (egy esetleges polinomosztás) után egy olyan törtfüggvényt kell integrálnunk, amelyben **a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező.**

A 2. lépésben **irreducibilis szorzattá alakítjuk** a törtfüggvény nevezőjét:

Például ha az 1. lépés után az $\frac{x^3-9x^2+65x-15}{x^4-4x^3+27}$ törtfüggvényt kell integrálni, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{2x^4 - 8x^3 + 54} = \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{2(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)}.$$

Az 1. lépés (egy esetleges polinomosztás) után egy olyan törtfüggvényt kell integrálnunk, amelyben **a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező.**

A 2. lépésben **irreducibilis szorzattá alakítjuk** a törtfüggvény nevezőjét:

Például ha az 1. lépés után az $\frac{x^3-9x^2+65x-15}{x^4-4x^3+27}$ törtfüggvényt kell integrálni, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{2x^4 - 8x^3 + 54} = \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{2(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)}.$$

Integrálásnál kiemelhetjük a nevező konstans tényezőjét:

$$\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{2(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx,$$

így a következő lépésben már feltehetjük, hogy az integrálandó törtfüggvény nevezőjének irreducibilis szorzat alakjában a konstans tényező 1.

Az előző lépések után egy olyan racionális törtfüggvényt kell integrálni, amelyben

- a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező;
- a nevező irreducibilis szorzat alakját meghatároztuk, melyben a konstans tényező 1.

Az előző lépések után egy olyan racionális törtfüggvényt kell integrálni, amelyben

- a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező;
- a nevező irreducibilis szorzat alakját meghatároztuk, melyben a konstans tényező 1.

A lényeg az, hogy minden fenti tulajdonságú racionális törtfüggvény előállítható „egyszerűbb” racionális törtfüggvények (ún. **parciális törtek**) összegeként, amelyeket egyszerűbb integrálni. Például:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x - 3)^2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{-1}{x - 3} + \frac{7}{(x - 3)^2} + \frac{2x - 5}{x^2 + 2x + 3}$$

Az előző lépések után egy olyan racionális törtfüggvényt kell integrálni, amelyben

- a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező;
- a nevező irreducibilis szorzat alakját meghatároztuk, melyben a konstans tényező 1.

A lényeg az, hogy minden fenti tulajdonságú racionális törtfüggvény előállítható „egyszerűbb” racionális törtfüggvények (ún. **parciális törtek**) összegeként, amelyeket egyszerűbb integrálni. Például:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x - 3)^2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{-1}{x - 3} + \frac{7}{(x - 3)^2} + \frac{2x - 5}{x^2 + 2x + 3}$$

Ezt a **parciális törtekre bontást** végezzük el a 3. lépésben, mely folyamat részleteit a következő diákon ismertetjük.

Tétel. Legyen $\frac{p(x)}{q(x)}$ egy olyan racionális törtfüggvény, amelyre $p(x)$ foka $< q(x)$ foka. Tegyük fel továbbá, hogy a $q(x)$ nevező irreducibilis szorzat alakja

$$q(x) = (m_1x + d_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (m_sx + d_s)^{k_s} \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (a_tx^2 + b_tx + c_t)^{\ell_t}$$

(tehát $C = 1$). Ekkor a $\frac{p(x)}{q(x)}$ függvény felírható

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{m_1x + d_1} + \frac{A_{1,2}}{(m_1x + d_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(m_1x + d_1)^{k_1}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{A_{s,1}}{m_sx + d_s} + \frac{A_{s,2}}{(m_sx + d_s)^2} + \dots + \frac{A_{s,k_s}}{(m_sx + d_s)^{k_s}} + \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,\ell_1}x + C_{1,\ell_1}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{B_{t,1}x + C_{t,1}}{a_tx^2 + b_tx + c_t} + \frac{B_{t,2}x + C_{t,2}}{(a_tx^2 + b_tx + c_t)^2} + \dots + \frac{B_{t,\ell_t}x + C_{t,\ell_t}}{(a_tx^2 + b_tx + c_t)^{\ell_t}} \end{aligned}$$

alakban valamely $A_{1,1}, \dots, A_{s,k_s}, B_{1,1}, \dots, B_{t,\ell_t}, C_{1,1}, \dots, C_{t,\ell_t}$ konstansokra.

Tétel. Legyen $\frac{p(x)}{q(x)}$ egy olyan racionális törtfüggvény, amelyre $p(x)$ foka $<$ $q(x)$ foka. Tegyük fel továbbá, hogy a $q(x)$ nevező irreducibilis szorzat alakja

$$q(x) = (m_1x + d_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (m_sx + d_s)^{k_s} \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (a_tx^2 + b_tx + c_t)^{\ell_t}$$

(tehát $C = 1$). Ekkor a $\frac{p(x)}{q(x)}$ függvény felírható

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{m_1x + d_1} + \frac{A_{1,2}}{(m_1x + d_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(m_1x + d_1)^{k_1}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{A_{s,1}}{m_sx + d_s} + \frac{A_{s,2}}{(m_sx + d_s)^2} + \dots + \frac{A_{s,k_s}}{(m_sx + d_s)^{k_s}} + \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,\ell_1}x + C_{1,\ell_1}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{B_{t,1}x + C_{t,1}}{a_tx^2 + b_tx + c_t} + \frac{B_{t,2}x + C_{t,2}}{(a_tx^2 + b_tx + c_t)^2} + \dots + \frac{B_{t,\ell_t}x + C_{t,\ell_t}}{(a_tx^2 + b_tx + c_t)^{\ell_t}} \end{aligned}$$

alakban valamely $A_{1,1}, \dots, A_{s,k_s}, B_{1,1}, \dots, B_{t,\ell_t}, C_{1,1}, \dots, C_{t,\ell_t}$ konstansokra.

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

Tehát a felbontandó racionális törtfüggvény nevezőjének irreducibilis faktorizációjában szereplő minden (polinomhatvány) tényezőhöz egy összeg tartozik a parciális törtekre bontásban:

- Egy $(mx+d)^k$ alakú, azaz egy **elsőfokú polinom alapú** tényezőhöz egy k tagú összeg tartozik, mely tagok nevezői rendre a $(mx+d)^1, (mx+d)^2, (mx+d)^3, \dots, (mx+d)^k$ polinomok, a **tagok számlálói pedig konstansok** (konkrét valós számok).
- Egy $(ax^2+bx+c)^\ell$ alakú, azaz egy **gyöknélküli másodfokú polinom alapú** tényezőhöz egy ℓ tagú összeg tartozik, mely tagok nevezői rendre az $(ax^2+bx+c)^1, (ax^2+bx+c)^2, (ax^2+bx+c)^3, \dots, (ax^2+bx+c)^\ell$ polinomok, **a tagok számlálói pedig elsőfokú polinomok**.

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

Na de hogy lehet a parciális törtek számlálót kiszámolni? Ezt mindjárt tárgyaljuk részletesen. Addig is:

<https://www.emathhelp.net/calculators/algebra-2/partial-fraction-decomposition-calculator/>

Én is ezzel ellenőriztem/számoltam a prezentációban szereplő parciális törtekre bontásokat.

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = ?$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = ?$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{13/17}{2x+3} + \frac{27/17}{5x-1}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{13/17}{2x+3} + \frac{27/17}{5x-1}$$

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = ?$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{13/17}{2x+3} + \frac{27/17}{5x-1}$$

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{13/17}{2x+3} + \frac{27/17}{5x-1}$$

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{3/2}{2x+5} + \frac{-23/2}{(2x+5)^2}$$

Grrr, ki sem fér rendesen egy diára a tétel, és túl formális. Nézzünk inkább **példákat**:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 14x^4 + 15x^3 - 22x^2 + 22x - 1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{-5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-3x+7}{x^2+1} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2+2x+3)} = \frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2+2x+3}$$

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{13/17}{2x+3} + \frac{27/17}{5x-1}$$

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{3/2}{2x+5} + \frac{-23/2}{(2x+5)^2}$$

Fontos. Ne felejtsük el, hogy csak akkor lehet a fenti módon parciális törtekre bontani egy racionális törtfüggvényt, ha **a számláló alacsonyabb fokú polinom, mint a nevező!** (A nevező fokszámát a szorzattá alakítás ELŐTT azonnal látjuk.)

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} =$$

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} = \frac{A(5x-1) + B(2x+3)}{(2x+3)(5x-1)}$$

- Közös nevezőre hozunk. (A közös nevező az eredeti nevező lesz.)

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} = \frac{A(5x-1) + B(2x+3)}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{(5A+2B)x + (-A+3B)}{(2x+3)(5x-1)}$$

- Közös nevezőre hozunk. (A közös nevező az eredeti nevező lesz.)
- A számlálóban felbontjuk a zárójeleket, és kiszámoljuk a számlálóbéli polinom együtthatóit (hány x van, hány x^2 , mi a konstans tag, stb.):

$$A(5x-1) + B(2x+3) = 5Ax - A + 2Bx + 3B = (5A+2B)x + (-A+3B)$$

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} = \frac{A(5x-1) + B(2x+3)}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{(5A+2B)x + (-A+3B)}{(2x+3)(5x-1)}$$

A számláló akkor lesz a kívánt $7x+4$ polinom, ha $5A+2B=7$ és $-A+3B=4$.

Keressünk ilyen A és B számokat:

$$\begin{cases} 5A+2B=7 \\ -A+3B=4 \end{cases}$$

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} = \frac{A(5x-1) + B(2x+3)}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{(5A+2B)x + (-A+3B)}{(2x+3)(5x-1)}$$

A számláló akkor lesz a kívánt $7x+4$ polinom, ha $5A+2B=7$ és $-A+3B=4$.

Keressünk ilyen A és B számokat:

$$\begin{cases} 5A+2B=7 \\ -A+3B=4 \end{cases} \implies \boxed{A = \frac{13}{17}, B = \frac{27}{17}}$$

- A kapott egyenletrendszer megoldása ad egy jó A -t és B -t: Pl. a 2. egyenletből kifejezzük az A -t B -vel, majd ezt beírjuk az 1. egyenletbe ...

A $\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{7x+4}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} = \frac{13/17}{2x+3} + \frac{27/17}{5x-1}$$



Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{5x-1} = \frac{A(5x-1) + B(2x+3)}{(2x+3)(5x-1)} = \frac{(5A+2B)x + (-A+3B)}{(2x+3)(5x-1)}$$

A számláló akkor lesz a kívánt $7x+4$ polinom, ha $5A+2B=7$ és $-A+3B=4$.

Keressünk ilyen A és B számokat:

$$\begin{cases} 5A+2B=7 \\ -A+3B=4 \end{cases} \implies \boxed{A = \frac{13}{17}, B = \frac{27}{17}}$$

• A kapott egyenletrendszer megoldása ad egy jó A -t és B -t: Pl. a 2. egyenletből kifejezzük az A -t B -vel, majd ezt beírjuk az 1. egyenletbe ... **KÉSZ.**

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2} =$$

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2} = \frac{A(2x+5) + B}{(2x+5)^2}$$

- Közös nevezőre hozunk. (A közös nevező az eredeti nevező lesz.)

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2} = \frac{A(2x+5) + B}{(2x+5)^2} = \frac{2Ax + (5A + B)}{(2x+5)^2}$$

- Közös nevezőre hozunk. (A közös nevező az eredeti nevező lesz.)
- A számlálóban felbontjuk a zárójeleket, és kiszámoljuk a számlálóbéli polinom együtthatóit (hány x van, hány x^2 , mi a konstans tag, stb.):

$$A(2x+5) + B = 2Ax + 5A + B = 2Ax + (5A + B)$$

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x - 4}{(2x + 5)^2} = \frac{A}{2x + 5} + \frac{B}{(2x + 5)^2}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x + 5} + \frac{B}{(2x + 5)^2} = \frac{A(2x + 5) + B}{(2x + 5)^2} = \frac{2Ax + (5A + B)}{(2x + 5)^2}$$

A számláló akkor lesz a kívánt $3x - 4$ polinom, ha $2A = 3$ és $5A + B = -4$. Keressünk ilyen A és B számokat:

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 5A + B = -4 \end{cases}$$

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2}$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2} = \frac{A(2x+5) + B}{(2x+5)^2} = \frac{2Ax + (5A+B)}{(2x+5)^2}$$

A számláló akkor lesz a kívánt $3x-4$ polinom, ha $2A=3$ és $5A+B=-4$. Keressünk ilyen A és B számokat:

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 5A + B = -4 \end{cases} \implies \boxed{A = \frac{3}{2}, B = -\frac{23}{2}}$$

- A kapott egyenletrendszer megoldása ad egy jó A -t és B -t: Az 1. egyenletből azonnal megkapjuk, hogy $A = 3/2$, majd ennek ismeretében a 2. egyenletből B értékét.

A $\frac{3x-4}{(2x+5)^2}$ törtfüggvény parciális törtekre bontásának részletes számolása:

A tétel megmondja, hogy milyen alakban keressük a felbontást:

$$\frac{3x-4}{(2x+5)^2} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2} = \frac{3/2}{2x+5} + \frac{-23/2}{(2x+5)^2} \quad \square$$

Nekünk „csak” az A és B számokat kell megválasztani úgy, hogy egyenlőség teljesüljön.

Tetszőleges A, B számok esetén „kiszámoljuk” a jobb oldalt:

$$\frac{A}{2x+5} + \frac{B}{(2x+5)^2} = \frac{A(2x+5) + B}{(2x+5)^2} = \frac{2Ax + (5A + B)}{(2x+5)^2}$$

A számláló akkor lesz a kívánt $3x - 4$ polinom, ha $2A = 3$ és $5A + B = -4$. Keressünk ilyen A és B számokat:

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 5A + B = -4 \end{cases} \implies \boxed{A = \frac{3}{2}, B = \frac{-23}{2}}$$

• A kapott egyenletrendszer megoldása ad egy jó A -t és B -t: Az 1. egyenletből azonnal megkapjuk, hogy $A = 3/2$, majd ennek ismeretében a 2. egyenletből B értékét. **KÉSZ.**

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

Például,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = \\ &= \int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx.\end{aligned}$$

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

Például,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = \\ &= \int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx.\end{aligned}$$

A parciális törteket a korábbi órák alapján ki tudjuk integrálni. Ezt részletezzük a következőkben.

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

1. Egy $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ alakú integrál kiszámolásához $y = mx+d$ (lineáris) helyettesítést végzünk ezzel az $\int \frac{1}{y^k} dy$ integrálra vezetjük vissza a problémát (ami már megy).

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

1. Egy $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ alakú integrál kiszámolásához $y = mx+d$ (lineáris) helyettesítést végzünk ezzel az $\int \frac{1}{y^k} dy$ integrálra vezetjük vissza a problémát (ami már megy).

Példák.

$$\int \frac{2}{3x+4} dx = \int \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{2}{3} \int \frac{1}{y} dy = \frac{2}{3} \ln |y| = \frac{2}{3} \ln |3x+4| + c.$$

$$y = 3x+4 \text{ helyettesítés} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx} = (3x+4)' = 3 \quad \rightsquigarrow \quad dx = \frac{1}{3} dy$$

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

1. Egy $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ alakú integrál kiszámolásához $y = mx+d$ (lineáris) helyettesítést végzünk ezzel az $\int \frac{1}{y^k} dy$ integrálra vezetjük vissza a problémát (ami már megy).

Példák.

$$\int \frac{2}{3x+4} dx = \int \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{2}{3} \int \frac{1}{y} dy = \frac{2}{3} \ln |y| = \frac{2}{3} \ln |3x+4| + c.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(3x+4)^5} dx &= \int \frac{2}{y^5} \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{2}{3} \int \frac{1}{y^5} dy = \frac{2}{3} \int y^{-5} dy = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{-4}}{-4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(-4)y^4} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{y^4} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3x+4)^4} + c. \end{aligned}$$

$$y = 3x + 4 \text{ helyettesítés} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = (3x+4)' = 3 \rightsquigarrow dx = \frac{1}{3} dy$$

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

1. Egy $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ alakú integrál kiszámolásához $y = mx+d$ (lineáris) helyettesítést végzünk ezzel az $\int \frac{1}{y^k} dy$ integrálra vezetjük vissza a problémát (ami már megy).

Az előző számolásokat paraméteresen (számok helyett „betűkkel”) megcsinálva kapjuk:

Ne tanuljuk be:

$$\int \frac{A}{mx+d} dx = \frac{A}{m} \ln |mx+d| + c.$$

$$\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx = -\frac{A}{m} \cdot \frac{1}{(k-1)(mx+d)^{k-1}} + c, \text{ ha } k \geq 2.$$

Az integrálandó törtfüggvény parciális törtekre bontása után **tagonként integrálunk**.

1. Egy $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ alakú integrál kiszámolásához $y = mx+d$ (lineáris) helyettesítést végzünk ezzel az $\int \frac{1}{y^k} dy$ integrálra vezetjük vissza a problémát (ami már megy).

Az előző számolásokat paraméteresen (számok helyett „betűkkel”) megcsinálva kapjuk:

Ne tanuljuk be:

$$\int \frac{A}{mx+d} dx = \frac{A}{m} \ln |mx+d| + c.$$

$$\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx = -\frac{A}{m} \cdot \frac{1}{(k-1)(mx+d)^{k-1}} + c, \text{ ha } k \geq 2.$$

Összegzés. Az $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ integrál az $\int \frac{1}{x^k} dx$ integrálhoz hasonlóan viselkedik:

- $k = 1$ esetén az $\int \frac{A}{mx+d} dx$ integrál az $\ln |mx+d|$ függvény konstansszorosa **(+c)**;
- $k \geq 2$ esetén pedig az $\int \frac{A}{(mx+d)^k} dx$ integrál az $\frac{1}{(mx+d)^{k-1}}$ fgv konstansszorosa **(+c)**.

2. Az $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^\ell}$ alakú törtek integrálása (ahol a nevezőben gyöknélküli másodfokú polinom hatványa szerepel) komplikáltabb. Lépésről lépésre haladunk:

2/a. (Az $\ell = 1$, $b = 0$ eset.) $\int \frac{Bx + C}{ax^2 + c} dx = ?$

2/b. (Az $\ell = 1$, tetszőleges b esete.) $\int \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} dx = ?$

2/c. (Az $\ell \geq 2$ eset.) $\int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^\ell} dx = ?$

2/a. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+c} dx$ alakú integrálnál a számlálót **összuk le tagonként** a nevezővel, majd az „**első tag**” integrálása az $y = ax^2 + c$ **helyettesítés** után az $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$ alapintegrálra vezet, a „**második tag**” integrálása a C és c konstansok kiemelése és lineáris helyettesítés után az $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \arctg(z)$ alapintegrálra vezet.

2/a. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+c} dx$ alakú integrálnál a számlálót **osszuk le tagonként** a nevezővel, majd az „**első tag**” integrálása az $y = ax^2 + c$ **helyettesítés** után az $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$ alapintegrálra vezet, a „**második tag**” integrálása a C és c konstansok kiemelése és lineáris helyettesítés után az $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \arctg(z)$ alapintegrálra vezet.

$$\int \frac{3x+4}{5x^2+6} dx = \int \frac{3x}{5x^2+6} dx + \int \frac{4}{5x^2+6} dx$$

2/a. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+c} dx$ alakú integrálnál a számlálót **osszuk le tagonként** a nevezővel, majd az „**első tag**” integrálása az $y = ax^2 + c$ **helyettesítés** után az $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$ alapintegrálra vezet, a „**második tag**” integrálása a C és c konstansok kiemelése és lineáris helyettesítés után az $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \arctg(z)$ alapintegrálra vezet.

$$\int \frac{3x+4}{5x^2+6} dx = \int \frac{3x}{5x^2+6} dx + \int \frac{4}{5x^2+6} dx = ? + ?$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{5x^2+6} dx &= \int \frac{3}{5x^2+6} \cdot x dx = \int \frac{3}{y} \cdot \frac{1}{10} dy = \frac{3}{10} \int \frac{1}{y} dy = \frac{3}{10} \ln|y| = \\ &= \frac{3}{10} \ln|5x^2+6| \end{aligned}$$

$$y = 5x^2 + 6 \text{ helyettesítés} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx} = (5x^2 + 6)' = 10x \quad \rightsquigarrow \quad x dx = \frac{1}{10} dy$$

2/a. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+c} dx$ alakú integrálnál a számlálót **osszuk le tagonként** a nevezővel, majd az „**első tag**” integrálása az $y = ax^2 + c$ **helyettesítés** után az $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$ alapintegrálra vezet, a „**második tag**” integrálása a C és c konstansok kiemelése és lineáris helyettesítés után az $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \arctg(z)$ alapintegrálra vezet.

$$\int \frac{3x+4}{5x^2+6} dx = \int \frac{3x}{5x^2+6} dx + \int \frac{4}{5x^2+6} dx = ? + ?$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{5x^2+6} dx &= \int \frac{3}{5x^2+6} \cdot x dx = \int \frac{3}{y} \cdot \frac{1}{10} dy = \frac{3}{10} \int \frac{1}{y} dy = \frac{3}{10} \ln|y| = \\ &= \frac{3}{10} \ln|5x^2+6| = \frac{3}{10} \ln(5x^2+6) + c. \end{aligned}$$

$$y = 5x^2 + 6 \text{ helyettesítés} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx} = (5x^2 + 6)' = 10x \quad \rightsquigarrow \quad x dx = \frac{1}{10} dy$$

$\ln|5x^2+6| = \ln(5x^2+6)$, mivel $5x^2+6 > 0$ teljesül minden x -re

2/a. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+c} dx$ alakú integrálnál a számlálót **osszuk le tagonként** a nevezővel, majd az „**első tag**” integrálása az $y = ax^2 + c$ helyettesítés után az $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$ alapintegrálra vezet, a „**második tag**” integrálása a C és c konstansok kiemelése és lineáris helyettesítés után az $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \arctg(z)$ alapintegrálra vezet.

$$\int \frac{3x+4}{5x^2+6} dx = \int \frac{3x}{5x^2+6} dx + \int \frac{4}{5x^2+6} dx = ? + ?$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{5x^2+6} dx &= \frac{4}{6} \int \frac{1}{\frac{5}{6}x^2+1} dx = \frac{4}{6} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right)^2+1} dx = \frac{4}{6} \int \frac{1}{z^2+1} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} dz = \\ &= \frac{4}{\sqrt{30}} \int \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{4}{\sqrt{30}} \arctg(z) = \frac{4}{\sqrt{30}} \arctg\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right) + c. \end{aligned}$$

$$z = \sqrt{\frac{5}{6}}x \text{ helyettesítés} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dz}{dx} = \left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right)' = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad \rightsquigarrow \quad dx = \sqrt{\frac{6}{5}} dz$$

2/a. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+c} dx$ alakú integrálnál a számlálót **osszuk le tagonként** a nevezővel, majd az „**első tag**” integrálása az $y = ax^2 + c$ helyettesítés után az $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$ alapintegrálra vezet, a „**második tag**” integrálása a C és c konstansok kiemelése és lineáris helyettesítés után az $\int \frac{1}{z^2+1} dz = \operatorname{arctg}(z)$ alapintegrálra vezet.

$$\int \frac{3x+4}{5x^2+6} dx = \int \frac{3x}{5x^2+6} dx + \int \frac{4}{5x^2+6} dx = ? + ?$$

A két szükséges integrál kiszámításával azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{5x^2+6} dx &= \int \frac{3x}{5x^2+6} dx + \int \frac{4}{5x^2+6} dx = \\ &= \frac{3}{10} \ln(5x^2+6) + \frac{4}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right) + c. \end{aligned}$$



2/b. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+bx+c} dx$ alakú integrál esetén a (gyöknélküli) **nevezőt alakítsuk teljes négyzetté**, majd $y = x + \frac{b}{2a}$ **lineáris helyettesítés** után az előző 2/a. esetben látott alakhoz jutunk (a nevezőből eltűnik az elsőfokú tag).

2/b. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+bx+c} dx$ alakú integrál esetén a (gyöknélküli) **nevezőt alakítsuk teljes négyzetté**, majd $y = x + \frac{b}{2a}$ **lineáris helyettesítés** után az előző 2/a. esetben látott alakhoz jutunk (a nevezőből eltűnik az elsőfokú tag).

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{2x^2-4x+5} dx &= \int \frac{6x+7}{2(x-1)^2+3} dx = \int \frac{6(y+1)+7}{2y^2+3} dy = \int \frac{6y+13}{2y^2+3} dy = \\ &= \int \frac{6y}{2y^2+3} dy + \int \frac{13}{2y^2+3} dy = \dots = \frac{3}{2} \ln(2y^2+3) + \frac{13}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right) = \\ &= \frac{3}{2} \ln(2(x-1)^2+3) + \frac{13}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right) + c.\end{aligned}$$

$$y = x - 1 \text{ helyettesítés} \quad \rightsquigarrow \quad dy = dx \text{ és } x = y + 1$$

2/b. Egy $\int \frac{BX+C}{ax^2+bx+c} dx$ alakú integrál esetén a (gyöknélküli) **nevezőt alakítsuk teljes négyzetté**, majd $y = x + \frac{b}{2a}$ **lineáris helyettesítés** után az előző 2/a. esetben látott alakhoz jutunk (a nevezőből eltűnik az elsőfokú tag).

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{2x^2-4x+5} dx &= \int \frac{6x+7}{2(x-1)^2+3} dx = \int \frac{6(y+1)+7}{2y^2+3} dy = \int \frac{6y+13}{2y^2+3} dy = \\ &= \int \frac{6y}{2y^2+3} dy + \int \frac{13}{2y^2+3} dy = \dots = \frac{3}{2} \ln(2y^2+3) + \frac{13}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right) = \\ &= \frac{3}{2} \ln(2(x-1)^2+3) + \frac{13}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right) + c. \end{aligned}$$

Gondolkodnivaló. Fontos, hogy a 2/a-c. pontokban ismertetett módszerek a fenti formában csak akkor „működnek”, ha a nevezőben szereplő másodfokú polinom gyöknélküli. (Ha nem az lenne, nem is jelenne meg arctg a végeredményben!) Hol akadna el például az ezen a dián ismertetett számolás, ha a nevezőben olyan polinom lenne, amelynek van gyöke?

2/c. (Vázlat.) $\ell \geq 2$ esetén az $\int \frac{BX+C}{(ax^2+bx+c)^\ell} dx$ integrál kiszámításának lépései:

- Teljes négyzetté alakítással és $y = x + \frac{b}{2a}$ lineáris helyettesítéssel a 2/b. esetben látott módon „eltüntetjük” a nevező másodfokú polinomjából az elsőfokú tagot.
- Majd a 2/a. esetben látottak analógiájára tagonkénti osztás és helyettesítések után az integrált az $\int \frac{1}{x^\ell} dx = -\frac{1}{\ell-1} \cdot \frac{1}{x^{\ell-1}}$ alapintegrálra és az $\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx$ integrálra vezetjük vissza. Utóbbi integrál „trükkösen”, de mechanikusan kiszámolható.

2/c. (Vázlat.) $\ell \geq 2$ esetén az $\int \frac{BX+C}{(ax^2+bx+c)^\ell} dx$ integrál kiszámításának lépései:

- Teljes négyzetté alakítással és $y = x + \frac{b}{2a}$ lineáris helyettesítéssel a 2/b. esetben látott módon „eltüntetjük” a nevező másodfokú polinomjából az elsőfokú tagot.
- Majd a 2/a. esetben látottak analógiájára tagonkénti osztás és helyettesítések után az integrált az $\int \frac{1}{x^\ell} dx = -\frac{1}{\ell-1} \cdot \frac{1}{x^{\ell-1}}$ alapintegrálra és az $\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx$ integrálra vezetjük vissza. Utóbbi integrál „trükkösen”, de mechanikusan kiszámolható.

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{(2x^2-4x+5)^2} dx &= \int \frac{6x+7}{(2(x-1)^2+3)^2} dx = \int \frac{6(y+1)+7}{(2y^2+3)^2} dy = \\ &= \int \frac{6y+13}{(2y^2+3)^2} dy = \int \frac{6y}{(2y^2+3)^2} dy + \int \frac{13}{(2y^2+3)^2} dy = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{z^2} dz + \frac{13}{9} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right)^2 + 1\right)^2} dy = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{13}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(u^2+1)^2} du \end{aligned}$$

Helyettesítések: $y = x - 1$, $z = 2y^2 + 3$, $u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y$

Az $\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx$ integrál kiszámítása $\ell \geq 2$ esetén:

Tétel*. Ha $\ell \geq 2$, akkor

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx = \frac{x}{2(\ell-1)(x^2+1)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2(\ell-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} dx.$$

Az $\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx$ integrál kiszámítása $\ell \geq 2$ esetén:

Tétel*. Ha $\ell \geq 2$, akkor

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx = \frac{x}{2(\ell-1)(x^2+1)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2(\ell-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} dx.$$

$\ell = 2$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x + \mathfrak{c}.$$

Az $\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx$ integrál kiszámítása $\ell \geq 2$ esetén:

Tétel*. Ha $\ell \geq 2$, akkor

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx = \frac{x}{2(\ell-1)(x^2+1)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2(\ell-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} dx.$$

$\ell = 2$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x + c.$$

$\ell = 3$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \arctg x + c. \end{aligned}$$

Az $\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx$ integrál kiszámítása $\ell \geq 2$ esetén:

Tétel*. Ha $\ell \geq 2$, akkor

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^\ell} dx = \frac{x}{2(\ell-1)(x^2+1)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2(\ell-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} dx.$$

$\ell = 2$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x + c.$$

$\ell = 3$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \arctg x + c. \end{aligned}$$

$\ell = 4, 5, 6 \dots$ **esetek:** Hasonlóan kapjuk a fenti tétel segítségével az egygel „korábbi” (1-gyel kisebb kitevőjű) kiszámolt integrál értékéből.

Feladat. $\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx = ?$

A racionális törtfüggvények integrálásának hosszadalmas módszerét a fenti feladat [vázlatos](#) megoldásán keresztül szemléltetjük.

Ez egy nehéz feladat, a gyakorlaton és vizsgán ennél jóval egyszerűbb feladatokat kell tudni megoldani! Azért választottuk ezt a feladatot, mert elég bonyolult az általános módszer [elméletének](#) szemléltetéséhez.

Megoldás. $\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx$

1. LÉPÉS: Ellenőrizzük, hogy a számláló alacsonyabb fokú-e, mint a nevező (ha nem, akkor polinomosztunk). ✓

Megoldás.
$$\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx = \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x - 3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx$$

2. LÉPÉS: Irreducibilis szorzattá alakítjuk a nevezőt. (Ezt most számítógéppel tettük.)

Megoldás.
$$\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx = \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx =$$
$$\int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx$$

3. LÉPÉS: Parciális törtek összegére bontjuk a törtfüggvényt. Tudjuk, hogy

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

alakú lesz a parciális törtekre bontás. Az A, B, C, D számok értékét úgy választjuk meg, hogy a közös nevezőre hozás és a zárójelek felbontása után a számláló $x^3 - 9x^2 + 65x - 15$ legyen: x^3 -ből 1 „darab” legyen, x^2 -ből -9 „darab”, stb. Ehhez egy négy egyenletből álló négyismeretlenes lineáris egyenletrendszert kellett megoldanunk.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx &= \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx = \\&= \int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = \\&= \int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx\end{aligned}$$

4. LÉPÉS: Integráljuk a parciális törtet ...

Megoldás.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx &= \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx = \\ &= \int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = \\ &= \int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx = \\ &= -\ln|x-3| + \end{aligned}$$

4. LÉPÉS: $y = x - 3$, $dy = dx$ helyettesítés után

$$\int \frac{-1}{x-3} dx = - \int \frac{1}{y} dy = -\ln|y| = -\ln|x-3|.$$

Megoldás.
$$\int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx = \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx =$$
$$\int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx =$$
$$\int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx =$$
$$-\ln|x-3| - \frac{7}{x-3} +$$

4. LÉPÉS: $y = x - 3$, $dy = dx$ helyettesítés után

$$\int \frac{-1}{x-3} dx = - \int \frac{1}{y} dy = -\ln|y| = -\ln|x-3|.$$
$$\int \frac{7}{(x-3)^2} dx = \int \frac{7}{y^2} dy = 7 \int y^{-2} dy = \frac{7}{-1} y^{-1} = -\frac{7}{y} = -\frac{7}{x-3}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx &= \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx = \\ &= \int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = \\ &= \int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx = \\ &= -\ln|x-3| - \frac{7}{x-3} + \ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

4. LÉPÉS: $z = x + 1$, majd $u = z^2 + 2$, $v = z/\sqrt{2}$ helyettesítések után

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx &= \int \frac{2(x+1)-7}{(x+1)^2 + 2} dx = \int \frac{2z-7}{z^2 + 2} dz = \int \frac{2z}{z^2 + 2} dz - \int \frac{7}{z^2 + 2} dz = \\ &= \int \frac{1}{u} du - \frac{7}{2} \int \frac{1}{(z/\sqrt{2})^2 + 1} dz = \int \frac{1}{u} du - \frac{7}{2} \int \frac{\sqrt{2}}{v^2 + 1} dv = \int \frac{1}{u} du - \frac{7}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{v^2 + 1} dv = \\ &= \ln|u| - \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(v) = \ln(z^2 + 2) - \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) = \ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{x^4 - 4x^3 + 27} dx &= \int \frac{x^3 - 9x^2 + 65x - 15}{(x-3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx = \\ \int \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} \right) dx &= \\ \int \frac{-1}{x-3} dx + \int \frac{7}{(x-3)^2} dx + \int \frac{2x-5}{x^2 + 2x + 3} dx &= \\ -\ln|x-3| - \frac{7}{x-3} + \ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \mathfrak{c}. \end{aligned}$$



A racionális törtfüggvények integrálásának lépései:

1. lépés: Ha a számláló fokszáma nem kisebb, mint a nevezőé, akkor polinomosztással ilyen alakú racionális törtfüggvény integrálására transzformáljuk a problémát.
2. lépés: A nevezőt irreducibilis szorzattá alakítjuk (ha tudjuk).
3. lépés: Az integrálandó racionális törtfüggvényt parciális törtekre bontjuk. (A 2. lépésből tudjuk, hogy milyen alakban kell keresni a parciális törteket. Az együtthatók meghatározásához egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani.)
4. lépés: A parciális törtek integráljait mechanikusan ki tudjuk számolni a 4. lépéshez tartozó diákon ismerttetett „recept” szerint.

A módszerről tankönyvben:

Thomas-féle Kalkulus, II. kötet, 8.3. fejezet.