

Matematika 2.

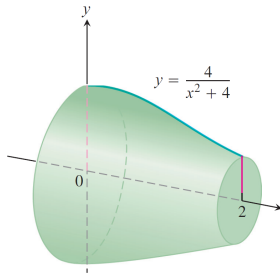
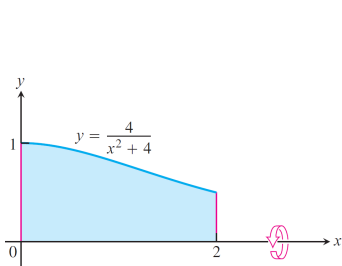
6. előadás

A határozott integrál alkalmazásai

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

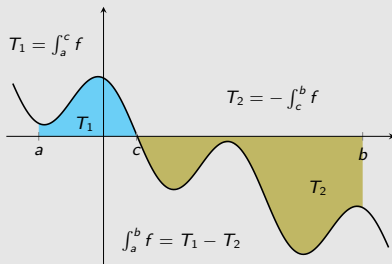
2025. március 18.



- Görbe alatti előjeles terület: $\int_a^b f(x) dx$
- Görbevonal ívhossza: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ (nem lesz a ZH-ban)
- Forgástest térfogata: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$
- Forgástest felszíne: $A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ (nem lesz a ZH-ban)

Tétel 1

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és $c \in [a, b]$, amire $\varphi(b) = 0$. Ha $0 \leq f(x)$ teljesül minden $x \in [a, c]$ -re és $0 \geq f(x)$ teljesül minden $x \in [c, b]$ -re, akkor jelölje T_1 annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = f(x)$ és az $y = 0$ görbék, valamint az $x = a$ és $x = c$ függőleges egyenesek határolnak, és T_2 annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = f(x)$ és az $y = 0$ görbék, valamint az $x = c$ és $x = b$ függőleges egyenesek határolnak.



Ekkor:

$$T_1 = \int_a^c f(x) \, dx$$

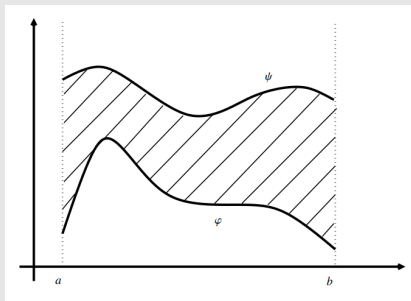
és

$$T_2 = \int_c^b -f(x) \, dx = \int_b^c f(x) \, dx$$

Két függvény által közrezárt terület

Tétel 2

Legyenek $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan **folytonos** függvények, melyekre $\varphi(x) \leq \psi(x)$ teljesül minden $x \in [a, b]$ -re. Jelölje T annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = \varphi(x)$ és az $y = \psi(x)$ görbék, valamint az $x = a$ és $x = b$ függőleges egyenesek határolnak.



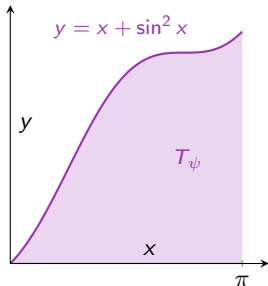
Ekkor:

$$T = \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) \, dx$$

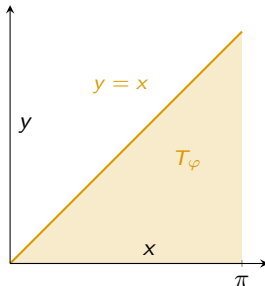
Két függvény által közrezárt terület

Példa

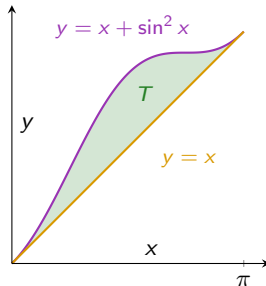
Legyen $\varphi(x) = x$ és $\psi(x) = x + \sin^2 x$ a $[0, \pi]$ intervallumon értelmezett függvények. Mekkora az általuk ezen az intervallumon közrezárt terület nagysága?



$$T_\psi = \int_0^\pi \psi(x) dx$$



$$T_\varphi = \int_0^\pi \varphi(x) dx$$



$$T = T_\psi - T_\varphi = \int_0^\pi \psi(x) - \varphi(x) dx$$

Két függvény által közrezárt terület

Példa

Legyen $\varphi(x) = x$ és $\psi(x) = x + \sin^2 x$ a $[0, \pi]$ intervallumon értelmezett függvények. Mekkora az általuk ezen az intervallumon közrezárt terület nagysága?

$$T = \int_0^{\pi} \psi(x) - \varphi(x) \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggésen kívül, emlékezzünk a **trigonometrikus addíciós tételekre**:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

Így: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, tehát:

$$T = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \stackrel{\uparrow}{=} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Newton–Leibniz

Két függvény által közrezárt terület

Példa

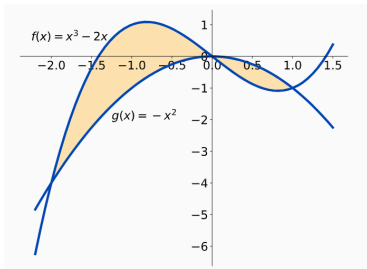
Legyen $f(x) = x^3 - 2x$ és $g(x) = -x^2$ a $[-2, 1]$ intervallumon értelmezett függvények. Mekkora az általuk ezen az intervallumon közrezárt terület(ek) nagysága?

Ha nem is tudnánk ábrázolni, akkor is meg kell vizsgálni, hogy mikor egyezik meg $f(x)$ és $g(x)$ és ezek határozzák meg a szükséges osztópontokat!

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 0 = x^3 - 2x - (-x^2) = \\ &= x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1) \implies x \in \{-2, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Tehát a $[-2, 0]$ és a $[0, 1]$ intervallumokon az egyik függvény végig a másik felett halad, így ezeket külön-külön visszavezetjük az előző egyszerűbb esetre!

$\implies$ melyik van felül?



Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 2x$ és $g(x) = -x^2$ a $[-2, 1]$ intervallumon értelmezett függvények. Mekkora az általuk ezen az intervallumon közrezárt terület(ek) nagysága?

Most $f(x) \geq g(x)$ a $[-2, 0]$ intervallumon és $f(x) \leq g(x)$ a $[0, 1]$ intervallumon. Így a keresett terület két határozott integrál összege lesz:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \int_{-2}^0 x^3 - 2x - (-x^2) \, dx + \int_0^1 -x^2 - (x^3 - 2x) \, dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{-x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = 0 - \left(4 - \frac{8}{3} - 4 \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) - 0 = \\ &= \frac{7}{3} + \frac{3}{4} = \frac{28+9}{12} = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

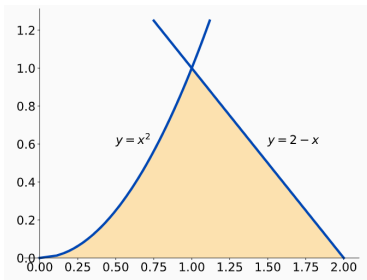
Két függvény és az x tengely által közrezárt terület

Példa

Legyen $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2 - x$ a $[0, 2]$ intervallumon értelmezett függvények. Mekkora az általuk ezen az intervallumon közrezárt terület(ek) nagysága?

Látjuk, hogy $f(x) = g(x) \iff x = 1$. Így a korábbi módszerekkel kiszámolható a két görbe és az x tengely által határolt terület nagysága két határozott integrál kiszámításával:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2 - x dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$



Két függvény és az x tengely által közrezárt terület

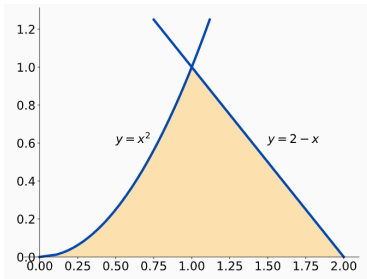
Példa

Legyen $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2 - x$ a $[0, 2]$ intervallumon értelmezett függvények. Mekkora az általuk ezen az intervallumon közrezárt terület(ek) nagysága?

De ugyanerre az eredményre juthatunk akkor is, ha a két tengely szerepét felcseréljük, hiszen az y változó szerint a $[0, 1]$ intervallumon az $x = 2 - y$ függvény végig az $x = \sqrt{y}$ felett halad. (forgatás és tükrözés)

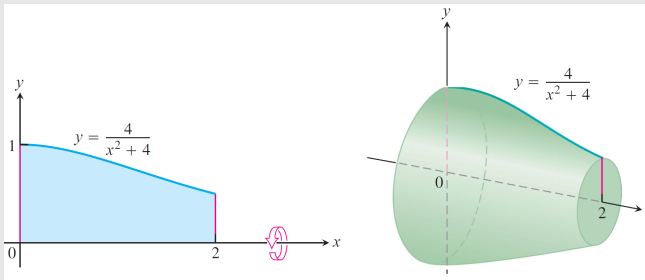
Így elegendő egyetlen határozott integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 (2 - y) - \sqrt{y} \, dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \\ &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$



Tétel 3

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy **folytonos** függvény, és forgassuk meg az x tengely körül az $a \leq x \leq b$ és $0 \leq y \leq f(x)$ által meghatározott tartományt. A forgás során súrolt pontok egy **forgástest** alkotnak, aminek térfogatát jelölje V .



Ekkor:

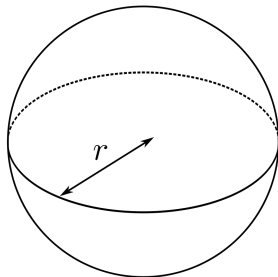
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Példa

Legyen adott egy $r > 0$ valós szám és $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amire $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ekkor az f függvényt a $[-r, r]$ intervallumon megforgatva az x tengely körül a sűrlt forgástest éppen az origó középponttú r sugarú gömb. Mekkora ennek a forgástestnek a térfogata?

Az előző Tétel miatt ennek térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r f(x)^2 dx = \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi \left(\left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \right) = \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 - \frac{-r^3}{3} \right) \right) = \frac{4r^3\pi}{3}. \end{aligned}$$

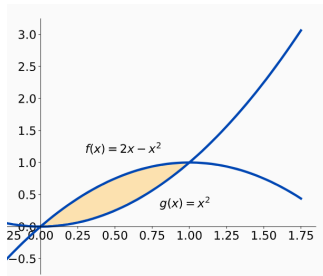


Feladat 1

Legyenek $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $f(x) = 2x - x^2$ és $g(x) = x^2$. Határozzuk meg a két függvény által közrezárt terület nagyságát a $[0, 1]$ intervallumon.

Mivel a $[0, 1]$ intervallumon $f(x) \geq g(x)$, így:

$$T = \int_0^1 2x - x^2 - x^2 \, dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

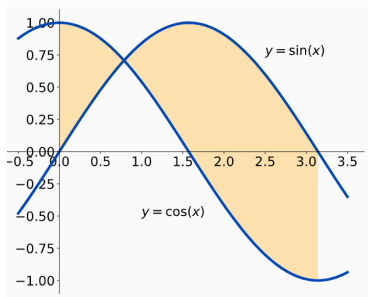


Feladat 2

Legyenek $f, g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$. Határozzuk meg a két függvény és az $x = 0$, $x = \pi$ függőleges egyenesek által közrezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon.

Mivel a $[0, \pi]$ intervallumon $f(x) = g(x) \iff x = \frac{\pi}{4}$, és a $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallum $g(x) \geq f(x)$, a $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ intervallum pedig $g(x) \leq f(x)$, így:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x - \cos x \, dx = \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) + \\ &+ (0 - (-1)) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$



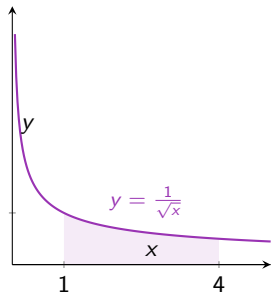


Feladat 3

Legyenek $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amit f -nek az x tengely körüli megforgatásával kapunk az $[1, 4]$ intervallumon.

A Tétel szerint a keresett forgástest térfogata meghatározható egy határozott integrál kiszámításával:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \\ &= \pi [\ln |x|]_1^4 = \pi \ln 4 \end{aligned}$$



Feladat 4

Legyenek $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $f(x) = 2 + \sin x$. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amit f -nek az x tengely körüli megforgatásával kapunk a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

A Tétel szerint a keresett forgástest térfogata meghatározható egy határozott integrál kiszámításával:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin x)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} 4 + 4 \sin x + \sin^2 x dx = \\ &= \pi \left(\left[4x - 4 \cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{2\pi} \right) = 9\pi^2 \end{aligned}$$

