

Matematika 2.

5. előadás

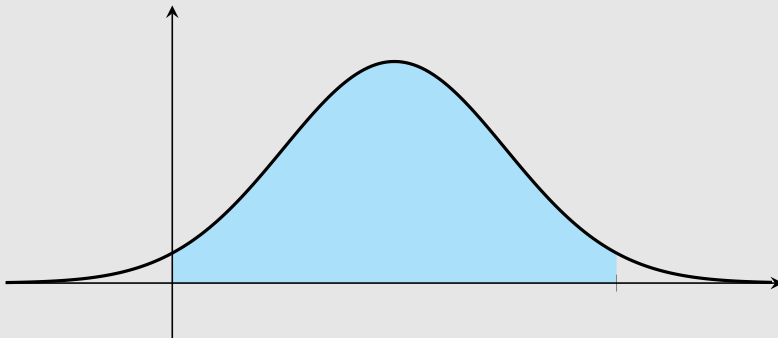
A határozott integrál, Newton-Leibniz tétel

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. március 11.

Megjegyzés



Definíció 1

Legyen $[a; b]$ egy adott intervallum. Az $[a; b]$ intervallum **beosztása** egy olyan $x_0, x_1, \dots, x_n$ véges pontsorozat, amelyre

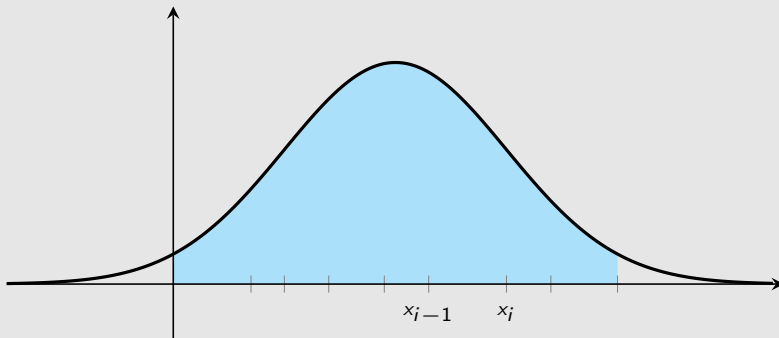
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Az $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontok a beosztás osztópontjai, x_i az i -edik osztópont, $[x_{i-1}; x_i]$ a beosztás i -edik részintervalluma.

A **beosztás finomsága** a beosztás részintervallumai hosszának a maximuma, azaz

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Megjegyzés



Definíció 2

Legyen az $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos, és $B = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ az $[a; b]$ intervallum egy beosztása. Továbbá legyen

$$m = \inf_{x \in [a; b]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x),$$

$$M = \sup_{x \in [a; b]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x).$$

Ezen számok f korlátosságából következően jól definiáltak, végesek.

Megjegyzés

Bármely B beosztásra

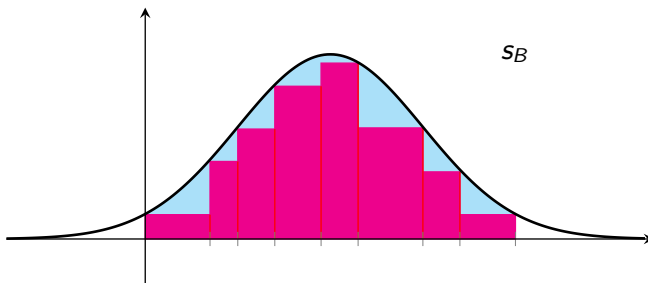
$$m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

Definíció 3

A

$$s_B = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény B beosztáshoz tartozó *Darboux–féle alsó integrálközelítő összegének*,

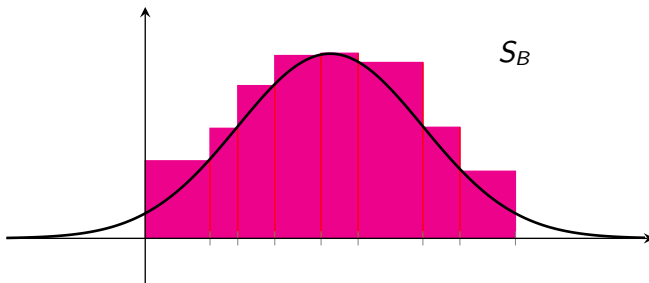


Definíció 4

a

$$S_B = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget a f függvény B beosztáshoz tartozó *Darboux–féle felső integrálközelítő összegének*,

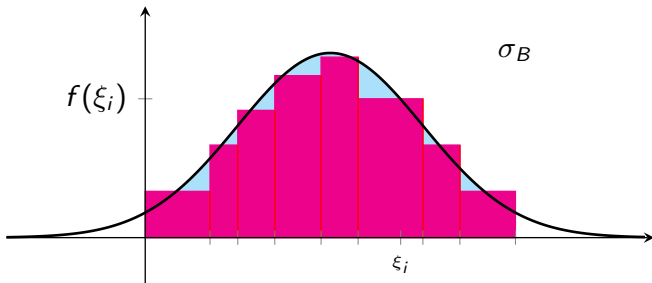


Definíció 5

a

$$\sigma_B = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

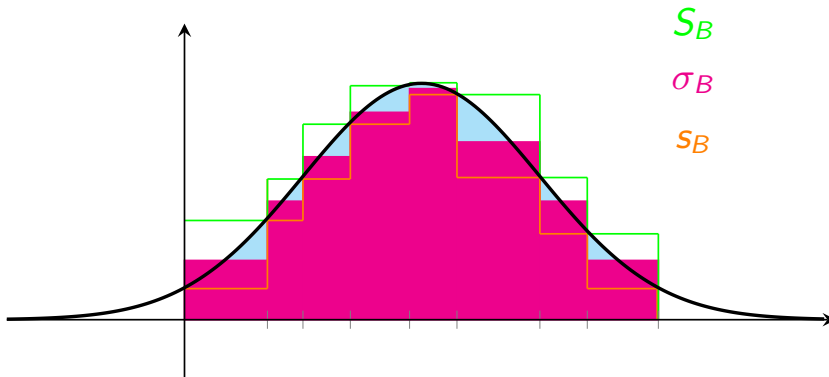
összeget, ahol ξ_i tetszőleges pontja az $[x_{i-1}; x_i]$ intervallumnak, az f függvény B beosztáshoz tartozó **Riemann-féle integrálközelítő összegének** nevezzük.



Tétel 1

Bármely B beosztásra

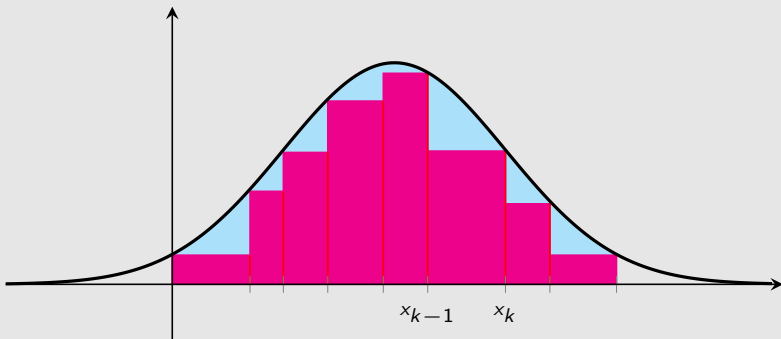
$$m \cdot (b - a) \leq s_B \leq \sigma_B \leq S_B \leq M \cdot (b - a).$$



Definíció 6

Ha B_1 és B_2 az $[a; b]$ beosztásai, és B_1 minden osztópontja a B_2 -nek is osztópontja, akkor azt mondjuk, hogy B_2 a B_1 **finomítása**.

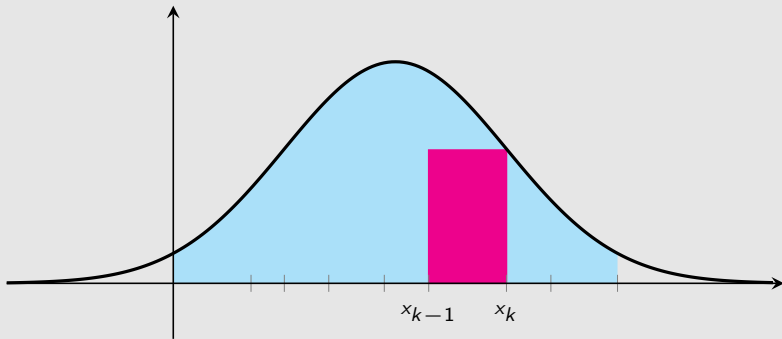
Megjegyzés



Definíció 7

*Ha B_1 és B_2 az $[a; b]$ beosztásai, és B_1 minden osztópontja a B_2 -nek is osztópontja, akkor azt mondjuk, hogy B_2 a B_1 **finomítása**.*

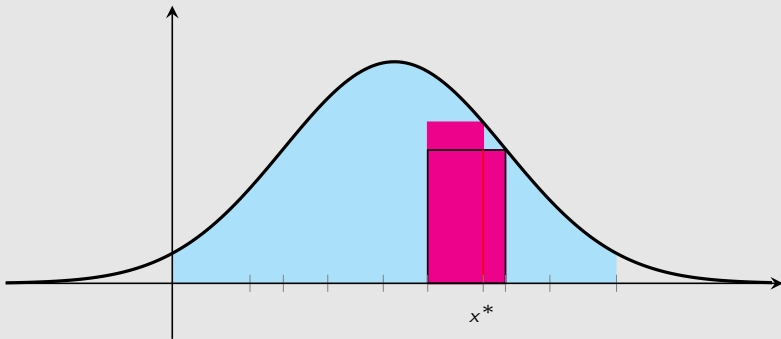
Megjegyzés



Definíció 8

*Ha B_1 és B_2 az $[a; b]$ beosztásai, és B_1 minden osztópontja a B_2 -nek is osztópontja, akkor azt mondjuk, hogy B_2 a B_1 **finomítása**.*

Megjegyzés



Tétel 2

Ha B_2 a B_1 finomítása, akkor

$$s_{B_1} \leq s_{B_2} \leq S_{B_2} \leq S_{B_1} .$$

Tétel 3

Az $[a; b]$ intervallum tetszőleges B_1, B_2 beosztásaira

$$s_{B_1} \leq S_{B_2} ,$$

azaz bármely alsó összeg kisebb, vagy egyenlő bármely felső összegnél.

Definíció 9

Legyen $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos.

Az alsó összegek felső határát, azaz az

$$\underline{I} = \sup\{s_B \mid B \text{ az } [a; b] \text{ beosztása}\}$$

számot az f függvény *Darboux–féle alsó integrál*jának nevezzük.

A felső összegek alsó határát, azaz az

$$\bar{I} = \inf\{S_B \mid B \text{ az } [a; b] \text{ beosztása}\}$$

számot az f függvény *Darboux–féle felső integrál*jának nevezzük.

Megjegyzés

Mindig teljesül, hogy

$$m \cdot (b - a) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq M \cdot (b - a).$$

Definíció 10

Az $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény **Riemann-integrálható** az $[a; b]$ -n, ha a Darboux-féle alsó és felső integrál megegyezik, azaz $\underline{I} = \bar{I}$.

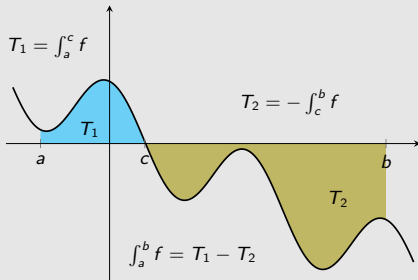
A közös értéket az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett **határozott integráljának** nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f.$$

Megjegyzés

A határozott integrált előjeles területnek is nevezzük.

Ha f pozitív és negatív értékeket is felvesz, akkor az integrál az x -tengely alatti és az x -tengely feletti tartományok előjeles területének összegét jelenti.



Tétel 4

Legyen f integrálható $[a; b]$ -n.

■ Ekkor

$$\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx .$$

■ Ha $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, akkor f integrálható $[\alpha; \beta]$ -n.

■ Ha $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx .$$

■ Ekkor $|f|$ is integrálható $[a; b]$ -n, és

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx .$$

Tétel 5

Legyen f integrálható $[a; b]$ -n. Ha F primitív függvénye f -nek, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Megjegyzés

A továbbiakban használjuk a

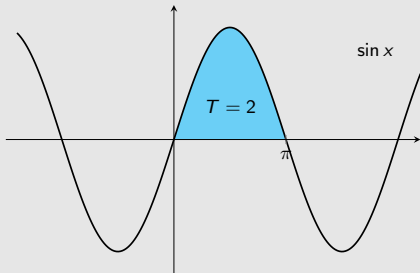
$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

jelölést.

Példa

A $\sin x$ függvénynek $-\cos x$ egy primitív függvénye, így

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) - (-1) = 2.\end{aligned}$$



Megjegyzés

$$\begin{aligned}\int \sin x \, dx &= -\cos x + c \\ \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= 2\end{aligned}$$

Tétel 6

Ha $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, akkor f integrálható $[a; b]$ -n.

Tétel 7

Ha $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor f integrálható $[a; b]$ -n.

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, integrálható $[a, b]$ -n, és $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az f primitív függvénye $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a).$$

Határozott integrál számítása:

1. Riemann-integrálhatóság vizsgálata: ha $[a, b] \subset D_f$, és f folytonos az értelmezési tartományán, akkor integrálható $[a, b]$ -n.
2. Meghatározzuk F -et.
3. Alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

8. Feladat/(a)

Feladat 1

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int_0^1 x^2 dx$

$D_f = \mathbb{R}$, így f Riemann-integrálható a $[0, 1]$ -en.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

így $C = 0$ választással f egy primitív függvénye: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. A határozott integrál:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

8. Feladat/(b)

Feladat 2

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int_2^3 x^2 e^{2x} dx$

$D_f = \mathbb{R}$, így f Riemann-integrálható a $[2, 3]$ -n. A primitív függvényhez parciálisan integrálunk: legyen $f' = e^{2x} \implies f = \frac{e^{2x}}{2}$, és $g = x^2 \implies g' = 2x$: $\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int 2x \frac{e^{2x}}{2} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx$, tehát az $\int x e^{2x} dx$ integrálhoz újra parciálisan integrálunk a szokásos módon: $\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$, így egy primitív függvény: $F(x) = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right)$, azaz

$$\int_2^3 x^2 e^{2x} dx = \left[x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right) \right]_{x=2}^{x=3} = \frac{5}{4} e^6 - \frac{3}{4} e^4.$$

8. Feladat/(c)

Feladat 3

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(c) \int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1} dx$$

$D_f = \mathbb{R}$, így f Riemann-integrálható a $[1, 2]$ -n. Alkalmazva az $y = e^{3x} + 1$, $dy = 3e^{3x} dx$ helyettesítést:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1} dx = \int \frac{1}{3y} dy = \frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{3} \ln |y| + C = \frac{1}{3} \ln |e^{3x} + 1| + C,$$

$$\text{így } \int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1} dx = \left[\frac{1}{3} \ln |e^{3x} + 1| \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{3} \ln(e^6 + 1) - \frac{1}{3} \ln(e^3 + 1).$$

Megjegyzés: közvetlen számoláskor a határok is transzformálódnak, azaz

$$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1} dx = \frac{1}{3} \int_{e^3+1}^{e^6+1} \frac{1}{y} dy = \frac{1}{3} [\ln |y|]_{y=e^3+1}^{y=e^6+1} = \frac{1}{3} (\ln(e^6 + 1) - \ln(e^3 + 1)).$$

8. Feladat/(d)

Feladat 4

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(d) \int_3^5 \frac{-x^4 + 6x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, így f Riemann-integrálható a $[3, 5]$ -n. A racionális törtfüggvény primitív függvényének meghatározásához először polinomosztást végzünk, majd irreducibilis szorzatalakra hozzuk a nevezőt, és aztán parciális törtekre bontunk. Mivel $(2x^3 - 8x) \cdot (-\frac{1}{2}x) = -x^4 + 4x^2$, ezért:

$$\int \frac{-x^4 + 6x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx = \int \left(-\frac{1}{2}x \right) + \frac{2x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx = \left(-\frac{x^2}{4} \right) + \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} dx$$

A nevező irreducibilis szorzatalakja most könnyen meghatározható:

$x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$. Így a parciális törtekre bontást a következő alakban keressük:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2} = \frac{A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)}{x(x - 2)(x + 2)} =$$

8. Feladat/(d)

Feladat 5

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(d) \int_3^5 \frac{-x^4 + 6x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \\ &= \frac{x^2(A+B+C) + x(2B-2C) + (-4A)}{x(x-2)(x+2)} \implies \begin{aligned} A+B+C &= 1; \\ 2B-2C &= 0; \\ -4A &= 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Ezeket megoldva kapjuk, hogy $A = -\frac{1}{4}$ és $B = C = \frac{5}{8}$. Tehát a primitív függvény kiszámítása így folytatódhat:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^4 + 6x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx &= \left(-\frac{x^2}{4}\right) + \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} dx = \left(-\frac{x^2}{4}\right) + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{5}{8}}{x-2} + \frac{\frac{5}{8}}{x+2} dx = \\ &= \frac{-x^2 - \ln|x|}{4} + \frac{5}{8}(\ln|x-2| + \ln|x+2|). \end{aligned}$$

8. Feladat/(d)

Feladat 6

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int_3^5 \frac{-x^4 + 6x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx$

Tehát a Newton-Leibniz tételt használva a keresett határozott integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{-x^4 + 6x^2 + 2}{2x^3 - 8x} dx &= \left[\frac{-x^2 - \ln|x|}{4} + \frac{5}{8}(\ln|x-2| + \ln|x+2|) \right]_3^5 = \\ &= \left(\frac{-5^2 - \ln 5}{4} + \frac{5}{8}(\ln 3 + \ln 7) \right) - \left(\frac{-3^2 - \ln 3}{4} + \frac{5}{8}(\ln 1 + \ln 5) \right) = \\ &= \frac{9 - 25 + \ln 3 - \ln 5}{4} + \frac{5}{8}(\ln 3 + \ln 7 - \ln 5) = \frac{5}{8} \ln 7 - \frac{7}{8} \ln 5 + \frac{7}{8} \ln 3 - 4. \end{aligned}$$