

Matematika 2.

3. előadás

Parciális integrálás

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 25.

- $[x^2 \ln x]' = 2x \ln x + x, \quad \int (2x \ln x + x) dx = \int 2x \ln x dx + \int x dx$
- $[\sin x^2]' = 2x \cos x^2, \quad \int 2x \cos x^2 dx$

$$\int f \cdot g$$

- Egyszerű függvény: $x^4, (1+x)^4, (2x+5)^4, (\pi-x)^4, \dots$
- Bonyolult függvény: $(1+x^2)^4, (2\sin x+5)^4, (\pi-\sqrt[3]{x^2})^4, \dots$
- Ha $E \cdot E$, akkor **parciális integrálás**
- Ha $E \cdot B$, akkor **helyettesítéses integrálás**

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) + c = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \, dx$$

Tétel 1

Legyen f és g differenciálható, és tegyük fel, hogy az $f \cdot g'$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $f' \cdot g$ szorzatnak is van primitív függvénye, és

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx.$$

Javaslat: f' legyen az a tényező, amit könnyű integrálni, g pedig az a tényező, amelyiknek a deriváltja egyszerűbb feladatra vezet. (Kivétel: logaritmus és arkusz-függvények.)

Részletes példák a parciális integrálásra

Példa

Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét!

$$\int (4x + 3)e^x dx$$

Az $(4x + 3) \cdot e^x$ szorzat integrálásakor vegyük észre, hogy $(4x + 3)$ egyszerű függvény, az e^x pedig szintén egy egyszerű függvény. Melyik tényezőt képzeljük el f' -ként?

Próbáljuk meg az $f' = 4x + 3$, és a $g = e^x$ szereposztással alkalmazni a parciális integrálást! Ekkor $f = (2x^2 + 3x)$ és $g' = e^x$, így:

$$\int (4x + 3)e^x dx = (2x^2 + 3x)e^x - \int (2x^2 + 3x)e^x dx \quad (\text{bonyolultabb lett!})$$

Próbáljuk meg a $g = 4x + 3$, és az $f' = e^x$ szereposztással alkalmazni a parciális integrálást! Ekkor $g' = 4$ és $f = e^x$, így:

$$\int (4x + 3)e^x dx = (4x + 3)e^x - \int 4e^x dx \quad (\text{egyszerűbb lett!})$$

Részletes példák a parciális integrálásra

Tehát a $g = 4x + 3$, és az $f' = e^x$ szereposztással alkalmazva a parciális integrálást:

$$\int (4x+3)e^x dx = (4x+3)e^x - \int 4e^x dx = (4x+3)e^x - 4 \cdot \int e^x dx = (4x+3)e^x - 4e^x + c$$

Tanulság: Mivel $[e^x]' = e^x$ és $\int e^x dx = e^x + c$, valamint $[4x + 3]' = 4$ és $\int (4x + 3) dx = (2x^2 + 3x) + c$, ezért azt választottuk g -nek, aminek a deriváltja egyszerűsíti az integrálandó függvényt.

Példa

Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét!

$$\int \frac{10 \ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Az $10 \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ szorzat integrálásakor vegyük észre, hogy $10 \ln x$ egyszerű függvény, az $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ pedig szintén egy egyszerű függvény. Melyik tényezőt képzeljük el f' -ként?

Vizsgáljuk meg a tényezők deriváltját és határozatlan integrálját!

$$\blacksquare [10 \ln x]' = 10 \frac{1}{x} \text{ és } \int 10 \ln x \, dx = 10 \int \ln x \, dx = ? \quad (\text{hogy folytassuk?})$$

$\Rightarrow$ (parciális integrálás)

$$\blacksquare \left[x^{-\frac{1}{2}} \right]' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \text{ és } \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{legyen } g = 10 \ln x \text{ és } f' = x^{-\frac{1}{2}}$$

Alkalmazzuk a parciális integrálást!

$$\int 10 \ln x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \, dx = (10 \ln x) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} - \int \frac{10}{x} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

Innen:

$$\begin{aligned}\int (10 \ln x) \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx &= (10 \ln x) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} - \int \frac{10}{x} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} dx = 20\sqrt{x} \ln x - 20 \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= 20\sqrt{x} \ln x - 20 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + c = 20\sqrt{x}(\ln x - 2) + c.\end{aligned}$$

Részletes példák a parciális integrálásra

Példa

Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét!

$$\int x^2 \operatorname{arcctg} x \, dx$$

Az $x^2 \cdot \operatorname{arcctg} x$ szorzat integrálásakor vegyük észre, hogy x^2 egyszerű függvény, az $\operatorname{arcctg} x$ pedig szintén egy egyszerű függvény. Melyik tényezőt képzeljük el f' -ként?

Vizsgáljuk meg a tényezők deriváltját és határozatlan integrálját!

- $[x^2]' = 2x$ és $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$
- $[\operatorname{arcctg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ és $\int \operatorname{arcctg} x \, dx = ?$ ($\implies$ parciális integrálás)

Alkalmazzuk a parciális integrálást az $f' = x^2$ és a $g = \operatorname{arcctg} x$ szereposztással!

$$\int x^2 \operatorname{arcctg} x \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} x - \int \frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

Részletes példák a parciális integrálásra

Innen:

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{arccotg} x \, dx &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x - \int \frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\&= \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{3} \int \frac{x(1+x^2) - x}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \\&= \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{3} \int x \, dx - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x^2} dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{helyettesítéses integrálás: } y=1+x^2}}{=} \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \ln |1+x^2| + c.\end{aligned}$$

4. Feladat/(a)

Feladat 1

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int -x \cos x \, dx$

Legyen

$$\begin{aligned} f' &= \cos x & g &= -x \\ f &= \sin x & g' &= -1 \end{aligned}$$

$$\int -x \cos x \, dx = -x \sin x - \int -1 \cdot \sin x \, dx = -x \sin x - \cos x + c.$$

4. Feladat/(b)

Feladat 2

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int x \cdot \ln x \, dx$

Legyen

$$\begin{aligned} f' &= x & g &= \ln x \\ f &= \frac{x^2}{2} & g' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c. \end{aligned}$$

4. Feladat/(c)

Feladat 3

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int -x \sin x \, dx$

Legyen

$$\begin{aligned} f' &= \sin x & g &= -x \\ f &= -\cos x & g' &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int -x \sin x \, dx &= x \cos x - \int \cos x \, dx \\ &= x \cos x - \sin x + c. \end{aligned}$$

4. Feladat/(d)

Feladat 4

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \ln x \, dx$

Legyen

$$f' = 1 \quad g = \ln x$$

$$f = x \quad g' = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - x + c.$$

4. Feladat/(e)

Feladat 5

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int x \cdot e^{3x+1} dx$

Legyen

$$\begin{aligned} f' &= e^{3x+1} & g &= x \\ f &= \frac{e^{3x+1}}{3} & g' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{3x+1} dx &= x \cdot \frac{e^{3x+1}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x+1}}{3} dx \\ &= \frac{x}{3} e^{3x+1} - \frac{1}{9} e^{3x+1} + c. \end{aligned}$$

4. Feladat/(f)

Feladat 6

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(f) \int \operatorname{arctg} x \, dx$$

Legyen

$$\begin{aligned} f' &= 1 & g &= \operatorname{arctg} x \\ f &= x & g' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

Az $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$ integrálhoz legyen $y = 1 + x^2$. Ekkor $dy = 2x \, dx$, és $\frac{1}{2} dy = x \, dx$, azaz

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \, dy = \frac{\ln |y|}{2} + c = \frac{\ln |1+x^2|}{2} + c. \text{ Tehát}$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\ln |1+x^2|}{2} + c.$$