

Matematika 2.

2. előadás

Helyettesítéses integrálás

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 18.

- $[x^2 \ln x]' = 2x \ln x + x, \quad \int (2x \ln x + x) dx = \int 2x \ln x dx + \int x dx$
- $[\sin x^2]' = 2x \cos x^2, \quad \int 2x \cos x^2 dx$

$$\int f \cdot g$$

- Egyszerű függvény: $x^4, (1+x)^4, (2x+5)^4, (\pi-x)^4, \dots$
- Bonyolult függvény: $(1+x^2)^4, (2\sin x+5)^4, (\pi-\sqrt[3]{x^2})^4, \dots$
- Ha $E \cdot E$, akkor **parciális integrálás**
- Ha $E \cdot B$, akkor **helyettesítéssel integrálás**

$$[F(y(x))]' = F'(y(x)) \cdot y'(x) = f(y(x)) \cdot y'(x)$$

Tétel 1

Legyen y differenciálható és az f függvénynek F egy primitív függvénye. Ekkor

$$\int f(y(x)) \cdot y'(x) \, dx = \int F'(y(x)) \cdot y'(x) \, dx = F(y(x)) + c.$$

Ha egy olyan szorzatot integrálunk, amelynek egyik tényezője egy összetett függvény, másik tényezője pedig ezen összetett függvény belső függvényének a deriváltja, akkor a belső függvényt új változóval helyettesítjük, majd úgy integrálhatunk, mintha a belső függvényünk lett volna a független változó. Formálisan:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

esetén legyen $g(x) = y$. Ekkor $\frac{dy}{dx} = g'(x)$, és így $g'(x)dx = dy$, vagyis

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(y) dy = F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

TANULSÁG: mindig azt helyettesítem, aminek látom a deriváltját (vagy a derivált kialakítható).

Részletes példa a helyettesítéssel integrálásra

Példa

Alkalmazzuk a helyettesítéssel integrálás módszerét!

$$\int 2x(3 + x^2)^7 dx$$

A $2x \cdot (3 + x^2)^7$ szorzat integrálásakor vegyük észre, hogy $2x$ egyszerű függvény, a $(3 + x^2)^7$ pedig egy bonyolult függvény. Ráadásul a bonyolult függvény belső függvényének deriváltja: $[3 + x^2]' = 2x$, ami éppen 1-szerese az egyszerű függvénynek. Így helyettesítsük ezt a belső függvényt egy új változóval: $y := 3 + x^2$. Ekkor az előzőek szerint: $\frac{dy}{dx} = 2x$, és ezért $dy = 2x dx$.

$$\int 2x(3 + x^2)^7 dx = \int (3 + x^2)^7 2x dx \underset{y=(3+x^2)}{=} \int y^7 dy = \frac{y^8}{8} + c = \frac{(3 + x^2)^8}{8} + c.$$

Részletes példa a helyettesítéses integrálásra 2

Példa

Alkalmazzuk a helyettesítéses integrálás módszerét!

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

A $x \cdot e^{1-x^2}$ szorzat integrálásakor vegyük észre, hogy x egyszerű függvény, a e^{1-x^2} pedig egy bonyolult függvény. Ráadásul a bonyolult függvény belső függvényének deriváltja: $[1 - x^2]' = -2x$, ami éppen (-2) -szerese az egyszerű függvénynek.

Így helyettesítsük ezt a belső függvényt egy új változóval: $y := 1 - x^2$. Ekkor az előzőek szerint: $\frac{dy}{dx} = -2x$, és ezért $dy = -2x dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx = \int -\frac{1}{2} e^{1-x^2} (-2)x dx \underset{y=1-x^2}{=} -\frac{1}{2} \int e^y dy = -\frac{1}{2} e^y + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c.$$

3. Feladat/(a)

Feladat 1

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

Legyen $y = 1 + e^x$. Ekkor $dy = e^x dx$, és ezért

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C = \ln |1 + e^x| + C.$$

3. Feladat/(b)

Feladat 2

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Legyen $y = \cos x$. Ekkor $dy = -\sin x dx$, így

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{y} dy = -\ln |y| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

3. Feladat/(c)

Feladat 3

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} dx$

Legyen $y = \operatorname{tg} x$. Ekkor $dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, így

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

3. Feladat/(d)

Feladat 4

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

Legyen $y = 1 + x^2$. Ekkor

$$dy = 2x \, dx,$$

$$\frac{1}{2} dy = x \, dx,$$

tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1}{2} \ln |y| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \end{aligned}$$

3. Feladat/(e)

Feladat 5

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$

Legyen $y = \sin x$. Ekkor $dy = \cos x \, dx$, ami közvetlenül behelyettesíthető:

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^y \, dy = e^y + C = e^{\sin x} + C.$$

3. Feladat/(f)

Feladat 6

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(f) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Legyen $y = \ln x$. Ekkor $dy = \frac{1}{x} dx$, így

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{y} dy$$

$$= \ln |y| + C = \ln |\ln x| + C.$$

3. Feladat/(g)

Feladat 7

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(g) $\int (3x^2 + 2) \sin(x^3 + 2x - 4) dx$

Legyen $y = x^3 + 2x - 4$. Ekkor $dy = (3x^2 + 2) dx$:

$$\int (3x^2 + 2) \sin(x^3 + 2x - 4) dx = \int \sin y dy$$

$$= -\cos y + C = -\cos(x^3 + 2x - 4) + C.$$

3. Feladat/(h)

Feladat 8

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(h) \int \frac{1-x}{1+x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{1+x^2} dx &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Az $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ integrálhoz legyen $y = 1+x^2$. Ekkor $dy = 2x dx$, azaz $\frac{1}{2} dy = x dx$. Tehát

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln |y| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

$$\text{Így } \int \frac{1-x}{1+x^2} dx = \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

3. Feladat/(i)

Feladat 9

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(i) $\int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1 \right) dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int 1 dx$$

Az $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ integrálhoz legyen $y = 1 + x^2$, azaz $dy = 2x dx$, $\frac{1}{2} dy = x dx$. Így

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \sqrt{y} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Azaz $\int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + x + C.$

3. Feladat/(j)

Feladat 10

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(j) $\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx$

Legyen $y = \sqrt{3x-1}$. Ekkor

$$y^2 = 3x - 1 \implies x = \frac{y^2 + 1}{3},$$

$$dx = \frac{2y}{3} dy,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx &= \int \frac{\frac{y^2+1}{3}}{y} \cdot \frac{2y}{3} dy = \frac{2}{9} \int y^2 + 1 dy \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{y^3}{3} + y \right) + C = \frac{2}{9} \left(\frac{(\sqrt{3x-1})^3}{3} + \sqrt{3x-1} \right) + C \end{aligned}$$