

Matematika 2.

1. előadás

Primitív függvény

A határozatlan integrál

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 11.

Az f függvény differenciálható (deriválható) a c pontban, ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határérték. Azaz, az

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

differenciahányados határértéke létezik és véges.

Az f függvény differenciálható (deriválható) a c pontban, ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határérték. Azaz, az

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

differenciahányados határértéke létezik és véges.

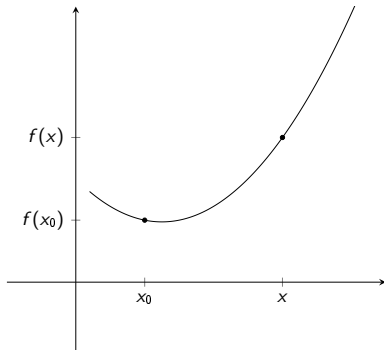
Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

különbségi hányados az

 $(x_0; f(x_0))$ $(x; f(x))$

pontokon



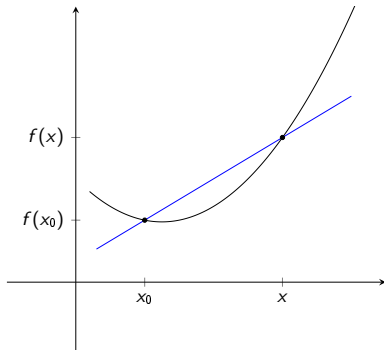
Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

különbségi hányados az

$$(x_0; f(x_0)) \quad (x; f(x))$$

pontokon átmenő egyenes meredekségét
adja meg.



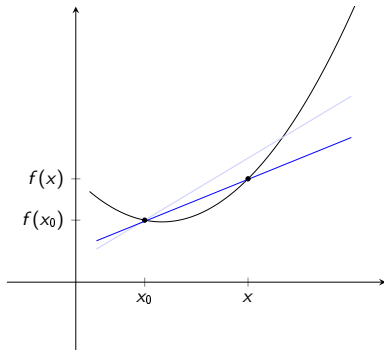
Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

különbségi hányados az

$$(x_0; f(x_0)) \quad (x; f(x))$$

pontokon átmenő egyenes meredekségét
adja meg.



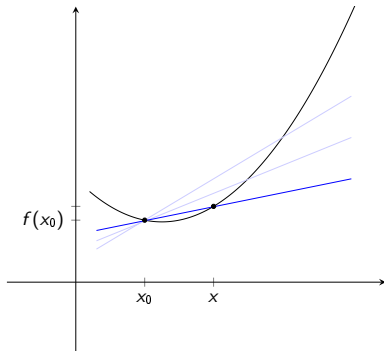
Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

különbségi hányados az

$$(x_0; f(x_0)) \quad (x; f(x))$$

pontokon átmenő egyenes meredekségét
adja meg.



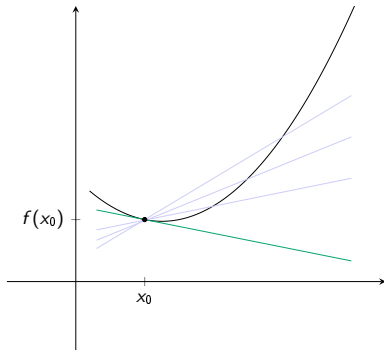
A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték az

$(x_0; f(x_0))$

ponton átmenő érintőegyenes
meredekségét adja meg.





Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmushatványfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmushatványfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0.$
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c.$
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}.$
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x.$
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|.$
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}.$
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}.$
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x.$
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x.$
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmushatványfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmushatványfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusrfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfűggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinusrfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Elemi függvények deriváltjai

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstans függvény $\implies f'(x) = 0$.
- $f(x) = cx$ lineáris függvény $\implies f'(x) = c$.
- $f(x) = x^c$ hatványfüggvény $\implies f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.
- $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (e az Euler-féle szám) $\implies f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x$ exponenciális függvény $\implies f'(x) = a^x \cdot \ln |a|$.
- $f(x) = \ln x$ természetes alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a x$ $1 \neq a > 0$ alapú logaritmusfüggvény $\implies f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$.
- $f(x) = \sin x$ szinuszfüggvény $\implies f'(x) = \cos x$.
- $f(x) = \cos x$ koszinuszfüggvény $\implies f'(x) = -\sin x$.
- $f(x) = \tan x$ tangensfüggvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f(x) = \operatorname{ctg} x$ kotangensfüggvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $f(x) = \arcsin x$ arkusz szinusz függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos x$ arkusz koszinusz függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arctan x$ arkusz tangens függvény $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ arkusz kotangens függvény $\implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

- konstans szorzó: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- összeg/különbség deriváltja: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- szorzat deriváltja: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- hányados deriváltja: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- összetett függvény deriváltja: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- konstans szorzó: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- összeg/különbség deriváltja: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- szorzat deriváltja: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- hányados deriváltja: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- összetett függvény deriváltja: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- konstans szorzó: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- összeg/különbség deriváltja: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- szorzat deriváltja: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- hányados deriváltja: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- összetett függvény deriváltja: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- konstans szorzó: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- összeg/különbség deriváltja: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- szorzat deriváltja: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- hányados deriváltja: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- összetett függvény deriváltja: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- konstans szorzó: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- összeg/különbség deriváltja: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- szorzat deriváltja: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- hányados deriváltja: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- összetett függvény deriváltja: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$[x^3]' = 3x^2,$$

$$[\sin x]' = \cos x,$$

$$[e^{x-6}]' = e^{x-6}.$$

$$\begin{aligned} [\quad]' &= 3x^2, \\ [\quad]' &= \cos x, \\ [\quad]' &= e^{x-6}. \end{aligned}$$

Definíció 1

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Az $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **primitív függvényének** nevezzük az I intervallumon, ha F differenciálható I -n, és

$$F'(x) = f(x).$$

$$\begin{aligned} [\quad]' &= 3x^2, \\ [\quad]' &= \cos x, \\ [\quad]' &= e^{x-6}. \end{aligned}$$

Definíció 1

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Az $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **primitív függvényének** nevezzük az I intervallumon, ha F differenciálható I -n, és

$$F'(x) = f(x).$$

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

- $[x^3]' = 3x^2$
- $[x^3 + 5]' = 3x^2$
- $[x^3 - e^2]' = 3x^2$
- $[x^3 + c]' = 3x^2$
- $[x^3 - 3gm^2]' = 3x^2$

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f -nek I -n.

Tétel 1

Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor f minden primitív függvénye I -n előáll $F + c$ alakban alkalmas $c \in \mathbb{R}$ konstans választással.

Definíció 2

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, és erre az

$$\int f(x) dx \quad \text{vagy} \quad \int f$$

jelölést használjuk.

Példa

$$[x^3 + 5]' = 3x^2,$$
$$\int 3x^2 dx = x^3 + c.$$

$$[\sin x]' = \cos x,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$[e^{x-6} - 2]' = e^{x-6},$$
$$\int e^{x-6} dx = e^{x-6} + c.$$

Példa

$$[x^3 + 5]' = 3x^2,$$
$$\int 3x^2 dx = x^3 + c.$$

$$[\sin x]' = \cos x,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$[e^{x-6} - 2]' = e^{x-6},$$
$$\int e^{x-6} dx = e^{x-6} + c.$$

Példa

$$[x^3 + 5]' = 3x^2,$$
$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + c.$$

$$[\sin x]' = \cos x,$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

$$[e^{x-6} - 2]' = e^{x-6},$$
$$\int e^{x-6} \, dx = e^{x-6} + c.$$

$$\int 0 \, dx = c,$$

$$\int 1 \, dx = x + c,$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{ha } \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-1} \, dx = \ln |x| + c,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c, \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + c,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arcctg} x + c.$$

Tétel 2

Legyen k tetszőleges valós szám, f és g olyan függvények, hogy f -nek és g -nek van primitív függvénye. Ekkor

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$$

és

$$\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

Nincs recept!

A határozatlan integrál meghatározására általánosságban nincsen recept, ellentétben a deriválással.

Például az e^{x^2} függvény határozatlan integrálja nem elemi függvény, azaz nem írható fel a korábbi táblázatban szereplő függvények összeadásának, szorzásának, ... stb. eredményeként.

De ugyanakkor:

Tétel 3

Zárt intervallumon folytonos függvénynek van határozatlan integrálja.

Nincs recept!

A határozatlan integrál meghatározására általánosságban nincsen recept, ellentétben a deriválással.

Például az e^{x^2} függvény határozatlan integrálja nem elemi függvény, azaz nem írható fel a korábbi táblázatban szereplő függvények összeadásának, szorzásának, ... stb. eredményeként.

De ugyanakkor:

Tétel 3

Zárt intervallumon folytonos függvénynek van határozatlan integrálja.

Nincs recept!

A határozatlan integrál meghatározására általánosságban nincsen recept, ellentétben a deriválással.

Például az e^{x^2} függvény határozatlan integrálja nem elemi függvény, azaz nem írható fel a korábbi táblázatban szereplő függvények összeadásának, szorzásának, ... stb. eredményeként.

De ugyanakkor:

Tétel 3

Zárt intervallumon folytonos függvénynek van határozatlan integrálja.

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 1

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln |x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 2

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln|x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 3

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln|x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 4

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln |x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 5

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln |x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 6

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln |x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(a)-(b)

Feladat 7

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln |x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$



1. Feladat/(a)-(b)

Példák

Szegedi Tudományegyetem

Feladat 8

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$

(a) A műveleti szabályok alapján:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 8x + \frac{7}{x} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 8x dx + \int \frac{7}{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \ln |x| + c. \end{aligned}$$

(b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$

1. Feladat/(c)-(d)

Feladat 9

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + x - 1}{x^2} \, dx$

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + c.$

(d) $\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^2 + x^{-1} - x^{-2} \right) dx$
 $= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

1. Feladat/(c)-(d)

Feladat 10

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + x - 1}{x^2} \, dx$

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + c.$

(d) $\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^2 + x^{-1} - x^{-2} \right) dx$
 $= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

1. Feladat/(c)-(d)

Feladat 11

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + x - 1}{x^2} \, dx$

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + c.$

(d) $\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^2 + x^{-1} - x^{-2} \right) dx$
 $= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

1. Feladat/(c)-(d)

Feladat 12

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + x - 1}{x^2} \, dx$

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + c.$

(d) $\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^2 + x^{-1} - x^{-2} \right) dx$
 $= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

1. Feladat/(c)-(d)

Feladat 13

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + x - 1}{x^2} \, dx$

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + c.$

(d) $\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^2 + x^{-1} - x^{-2} \right) dx$
 $= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

1. Feladat/(c)-(d)

Feladat 14

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx$

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^4 + x - 1}{x^2} \, dx$

(c) $\int 5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x \, dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + c.$

(d) $\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} - \frac{3x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{3}} - 3x^2 + x^{-1} - x^{-2} \right) dx$
 $= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

1. Feladat/(e)

Feladat 15

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c. \end{aligned}$$

1. Feladat/(e)

Feladat 16

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c. \end{aligned}$$

1. Feladat/(e)

Feladat 17

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c.\end{aligned}$$

1. Feladat/(e)

Feladat 18

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c. \end{aligned}$$

1. Feladat/(e)

Feladat 19

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c. \end{aligned}$$

1. Feladat/(e)

Feladat 20

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c. \end{aligned}$$

1. Feladat/(e)

Feladat 21

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + c. \end{aligned}$$

Ha $F' = f$, akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c.$$

Ugyanis

$$\left[\frac{F(ax + b)}{a} + c \right]' = \frac{F'(ax + b)}{a} \cdot a = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

Ha $F' = f$, akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c.$$

Ugyanis

$$\left[\frac{F(ax + b)}{a} + c \right]' = \frac{F'(ax + b)}{a} \cdot a = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

Ha $F' = f$, akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c.$$

Ugyanis

$$\left[\frac{F(ax + b)}{a} + c \right]' = \frac{F'(ax + b)}{a} \cdot a = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

Ha $F' = f$, akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c.$$

Ugyanis

$$\left[\frac{F(ax + b)}{a} + c \right]' = \frac{F'(ax + b)}{a} \cdot a = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

2. Feladat/(a)

Feladat 22

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int (3x + 2)^3 dx$

Mivel $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, ezért az $\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ összefüggést $a = 3$ -ra alkalmazva:

$$\int (3x + 2)^3 dx = \frac{\frac{(3x+2)^4}{4}}{3} + c.$$

2. Feladat/(a)

Feladat 23

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int (3x + 2)^3 dx$

Mivel $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, ezért az $\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ összefüggést $a = 3$ -ra alkalmazva:

$$\int (3x + 2)^3 dx = \frac{\frac{(3x+2)^4}{4}}{3} + c.$$

2. Feladat/(a)

Feladat 24

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int (3x + 2)^3 dx$

Mivel $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, ezért az $\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ összefüggést $a = 3$ -ra alkalmazva:

$$\int (3x + 2)^3 dx = \frac{\frac{(3x+2)^4}{4}}{3} + c.$$

2. Feladat/(a)

Feladat 25

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int (3x + 2)^3 dx$

Mivel $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, ezért az $\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ összefüggést $a = 3$ -ra alkalmazva:

$$\int (3x + 2)^3 dx = \frac{\frac{(3x+2)^4}{4}}{3} + c.$$

2. Feladat/(b)

Feladat 26

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) \, dx, \quad \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \, dx, \quad \int \cos(1 - x) \, dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x \, dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) \, dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \, dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) \, dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) \, dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) \, dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 27

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) dx$, $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx$, $\int \cos(1 - x) dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 28

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) \, dx, \quad \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \, dx, \quad \int \cos(1 - x) \, dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x \, dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) \, dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \, dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) \, dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) \, dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) \, dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 29

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) dx$, $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx$, $\int \cos(1 - x) dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 30

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) dx$, $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx$, $\int \cos(1 - x) dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 31

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) \, dx, \quad \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \, dx, \quad \int \cos(1 - x) \, dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x \, dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) \, dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \, dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) \, dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) \, dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) \, dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 32

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) dx, \quad \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx, \quad \int \cos(1 - x) dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(b)

Feladat 33

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(b) $\int \cos(3x - 1) dx, \quad \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx, \quad \int \cos(1 - x) dx$

Felhasználva, hogy $\int \cos x dx = \sin x + c$,

■ $a = 3$ -ra: $\int \cos(3x - 1) dx = \frac{\sin(3x - 1)}{3} + c.$

■ $a = \frac{1}{5}$ -re: $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \int \cos\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}x\right)}{\frac{1}{5}} + c.$

■ $a = -1$ -re: $\int \cos(1 - x) dx = \int \cos((-1) \cdot x + 1) dx = \frac{\sin(-x + 1)}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 34

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx, \quad \int e^{-3x} dx, \quad \int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3: \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3: \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1: \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 35

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx, \quad \int e^{-3x} dx, \quad \int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3: \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3: \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1: \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 36

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx, \quad \int e^{-3x} dx, \quad \int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3: \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3: \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1: \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 37

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx, \quad \int e^{-3x} dx, \quad \int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3: \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3: \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1: \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 38

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx$, $\int e^{-3x} dx$, $\int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3$: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3$: $\int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1$: $\int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 39

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx$, $\int e^{-3x} dx$, $\int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3$: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3$: $\int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1$: $\int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 40

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx, \quad \int e^{-3x} dx, \quad \int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3: \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3: \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1: \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(c)

Feladat 41

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(c) $\int e^{3x} dx, \quad \int e^{-3x} dx, \quad \int e^{-x} dx$

Felhasználva, hogy $\int e^x dx = e^x + c$,

■ $a = 3: \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

■ $a = -3: \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

■ $a = -1: \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c.$

2. Feladat/(d)

Feladat 42

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \frac{1}{x+1} dx, \quad \int \frac{1}{1-x} dx, \quad \int \frac{1}{2x+5} dx$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$, így

■ $a = 1$ esetén: $\int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln |x+1|}{1} + c,$

■ $a = -1$ esetén: $\int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln |1-x|}{-1} + c,$

■ $a = 2$ esetén: $\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln |2x+5|}{2} + c.$

2. Feladat/(d)

Feladat 43

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \frac{1}{x+1} dx$, $\int \frac{1}{1-x} dx$, $\int \frac{1}{2x+5} dx$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$, így

■ $a = 1$ esetén: $\int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln |x+1|}{1} + c$,

■ $a = -1$ esetén: $\int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln |1-x|}{-1} + c$,

■ $a = 2$ esetén: $\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln |2x+5|}{2} + c$.

2. Feladat/(d)

Feladat 44

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \frac{1}{x+1} dx$, $\int \frac{1}{1-x} dx$, $\int \frac{1}{2x+5} dx$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, így

■ $a = 1$ esetén: $\int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x+1|}{1} + c$,

■ $a = -1$ esetén: $\int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln|1-x|}{-1} + c$,

■ $a = 2$ esetén: $\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln|2x+5|}{2} + c$.

2. Feladat/(d)

Feladat 45

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \frac{1}{x+1} dx$, $\int \frac{1}{1-x} dx$, $\int \frac{1}{2x+5} dx$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, így

■ $a = 1$ esetén: $\int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x+1|}{1} + c$,

■ $a = -1$ esetén: $\int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln|1-x|}{-1} + c$,

■ $a = 2$ esetén: $\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln|2x+5|}{2} + c$.

2. Feladat/(d)

Feladat 46

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(d) $\int \frac{1}{x+1} dx$, $\int \frac{1}{1-x} dx$, $\int \frac{1}{2x+5} dx$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, így

■ $a = 1$ esetén: $\int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x+1|}{1} + c$,

■ $a = -1$ esetén: $\int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln|1-x|}{-1} + c$,

■ $a = 2$ esetén: $\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln|2x+5|}{2} + c$.

2. Feladat/(d)

Feladat 47

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(d) \int \frac{1}{x+1} dx, \quad \int \frac{1}{1-x} dx, \quad \int \frac{1}{2x+5} dx$$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, így

$$\blacksquare a = 1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x+1|}{1} + c,$$

$$\blacksquare a = -1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln|1-x|}{-1} + c,$$

$$\blacksquare a = 2 \text{ esetén: } \int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln|2x+5|}{2} + c.$$

2. Feladat/(d)

Feladat 48

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(d) \int \frac{1}{x+1} dx, \quad \int \frac{1}{1-x} dx, \quad \int \frac{1}{2x+5} dx$$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, így

$$\blacksquare a = 1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x+1|}{1} + c,$$

$$\blacksquare a = -1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln|1-x|}{-1} + c,$$

$$\blacksquare a = 2 \text{ esetén: } \int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln|2x+5|}{2} + c.$$

2. Feladat/(d)

Feladat 49

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(d) \int \frac{1}{x+1} dx, \quad \int \frac{1}{1-x} dx, \quad \int \frac{1}{2x+5} dx$$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$, így

$$\blacksquare a = 1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln |x+1|}{1} + c,$$

$$\blacksquare a = -1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln |1-x|}{-1} + c,$$

$$\blacksquare a = 2 \text{ esetén: } \int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln |2x+5|}{2} + c.$$

2. Feladat/(d)

Feladat 50

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(d) \int \frac{1}{x+1} dx, \quad \int \frac{1}{1-x} dx, \quad \int \frac{1}{2x+5} dx$$

Mivel $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$, így

$$\blacksquare a = 1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln |x+1|}{1} + c,$$

$$\blacksquare a = -1 \text{ esetén: } \int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{(-1) \cdot x + 1} dx = \frac{\ln |1-x|}{-1} + c,$$

$$\blacksquare a = 2 \text{ esetén: } \int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{\ln |2x+5|}{2} + c.$$

2. Feladat/(e)

Feladat 51

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

$$\blacksquare \int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$$

$$\blacksquare \int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$$

$$\blacksquare \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$$

2. Feladat/(e)

Feladat 52

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

$$\blacksquare \int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$$

$$\blacksquare \int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$$

$$\blacksquare \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$$

2. Feladat/(e)

Feladat 53

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 54

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 55

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 56

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 57

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 58

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 59

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 60

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 61

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 62

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$

2. Feladat/(e)

Feladat 63

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(e) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx, \quad \int \frac{3}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c,$

■ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\arctg(2x)}{2} + c$

■ $\int \frac{3}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$

■ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctg x + c.$