

Kombinatorika (tanárszakosoknak) - 2024/25-2

IV. feladatsor

1. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \dots, 20\}$ halmaznak, amelyben az 1, 2, 3, 4 számok nagyság szerint növekvő sorrendben helyezkednek el (tehát a 2-es valahol az 1-estől jobbra áll, a 3-as valahol a 2-estől jobbra áll, és a 4-es valahol a 3-astól jobbra áll)?
2. Van 12 különböző virágpalántánk, melyből 8 tulipán és 4 rózsa. Hányféle sorrendben tudjuk ezeket a palántákat kiültetni a virágoskertünk egy sorába úgy, hogy ne kerüljön egymás mellé két rózsa?
3. Hányféleképpen állhat be n vásárló egy bolt k pénztárához fizetni? (A vásárlókat és a pénztárakat is megkülönböztetjük.)
4. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, hogy az első helyen álló szám kivételével minden másik i számra igaz, hogy $i - 1$ vagy $i + 1$ az i előtt áll valahol?
5. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy a kialakult szóban az *első* M betű a 6. helyen álljon? (Például egy ilyen szó az AKIETMAAMT.)
6. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?
7. a) Egy 20 fős osztályban egyik órán párokban kell dolgozni (tíz párt kell kialakítani). Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
b) Óra után fényképezkedik az osztály. Két tízes sorba kell állniuk úgy, hogy a hátsó sor mind a tíz gyereke előtt alacsonyabb gyerek álljon. Hányféle fénykép készülhet? (A gyerekek mind különböző magasságúak.)
8. Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)
9. Egy dobókockát feldobunk négyszer egymás után. Hány olyan dobássorozat van, amelyben van többször előforduló dobott érték?
10. Tízszer egymás után feldobunk egy érmét. Hány kimenetel lehetséges? Ebből hányszor lesz két azonos dobás közvetlen egymás után?
11. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2024.$$

12. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre kihúzzunk 6 lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kihúzott lapok között pontosan két piros lap és pontosan két ász legyen? (A kihúzott lapok sorrendje nem számít.)
13. Hányféleképpen lehet szétosztani az 1, 2, 3, $\dots$, 9 számokat a $_$ helyekre úgy, hogy a megadott kisebb/nagyobb relációk teljesüljenek?

$$_ < _ < _ < _ > _ > _ > _ > _ > _$$

14. a) Hány $n \times m$ -es $0 - 1$ mátrix van?

b) Hány szimmetrikus $n \times n$ -es $0 - 1$ mátrix van?

c) Hány olyan $n \times m$ -es $0 - 1$ mátrix van, amelyben minden sor- és oszlopösszeg páros?

15. Hányféleképpen oszthatunk el k db (egyforma) egyforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy

a) tetszőleges elosztás megengedett;

b) mindenki kapjon legalább egyet;

c) az i -edik gyerek legalább i forintot kapjon (minden $i \in [n]$ -re);

d) mindenki páros sok forintot kapjon;

e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?

16. Hány monoton növekvő $[n] \rightarrow [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növekvő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)

17. Igazoljuk kettős leszámlálással a következő összefüggést:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$$

18. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k}.$$

19. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat!

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

b) $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$

c) $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}$

20. Legyen U egy n elemű alaphalmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre $X \subseteq Y \subseteq U$.

21. Ki lehet-e úgy tölteni egy $n \times n$ -es táblázatot az 1, 2 és 3 számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is különböző legyen az ott álló elemek összege?