

Kombinatorika (tanárszakosoknak) - 2024/25-2

II. gyakorlat

1. Hányféle (akár értelmetlen) szó készíthető az ANAGRAMMA szó betűinek összekavarásával? És ha nem engedjük meg, hogy a két „M” egymás mellé kerüljön?
2. 10 gyereknek kiosztottunk 50 egyforma gesztenyét. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha
a) nem kell mindenkinek kapnia; b) mindenkinek legalább 1-et adunk?
3. a) Arthur király és 30 lovagja letelepszik a kerekasztal köré. Hányféle sorrend alakulhat ki? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket nem különböztetjük meg.) b) És ha Lancelot Arthur mellett ül? c) És ha Lancelot Arthur mellett ül, de Galahald nem mer Lancelot jobbára ülni?
4. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben pontosan két 0 jegy van?
5. Hány olyan húszjegyű szám van, amelyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel?
6. Egy 11 fős társaságban mindenki hétszer fogott kezét. Hányféleképpen lehetséges ez?
7. Hányféleképpen olvashatjuk ki a „zöldségleves” szót az alábbi táblázatokból szomszédos mezőkön lépkedve?

Z	Ö	L	D	S	É	G	L
Ö	L	D	S	É	G	L	E
L	D	S	É	G	L	E	V
D	S	É	G	L	E	V	E
S	É	G	L	E	V	E	S

Z	Ö	L		S	É		L
Ö	L	D	S	É	G	L	E
L		S		G	L	E	V
D	S	É	G	L	E		E
S	É	G		E	V	E	S

8. Melyik az a legkisebb k szám, melyre teljesül a következő állítás: egy táblára k darab 15-jegyű számot felírva mindig lesz köztük
a) kettő, melyek megegyeznek egymással a második jegyükben;
b) három, melyek megegyeznek egymással az első, harmadik és hetedik jegyükben?
9. Bizonyítsuk be, hogy van
a) két olyan prímszám, melyek különbsége osztható 10^{10} -nel;
b) végtelen sok prímszám, melyek közül bármely kettőnek a különbsége osztható 129-cel!
10. Legfeljebb hány egész számot választhatunk 1 és 1000 között úgy, hogy semelyik kettő ne legyen relatív prím egymáshoz?
11. Bizonyítsd be, hogy $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

12. A színdominó nevű játék csomagjában szabályos háromszög alakú lapkák vannak, melyek mindhárom sarkában egy-egy kisebb, ugyancsak szabályos háromszög alakú betét található. A betétek mindegyike a piros, fehér, zöld, kék, sárga, lila színek valamelyikére van színezve. Egy lapkán bármilyen színkombináció előfordulhat (akár három azonos szín is). A készletben minden lehetséges fajtából pontosan egy lapka található. Hány lapkából áll a készlet? (A lapkákat persze szabad forgatni, de fejreállítani tilos: van felső oldaluk, aminek fölül kell lennie.)

13. Valaki tűket szúr egy 1m oldalú szabályos háromszög alakú táblába. Legkevesebb hány tű beszúrása után lesz bizonyosan három olyan tű a táblában, melyek páronkénti távolsága legfeljebb egy méter?

14. Egy 3×7 -es tábla mezőit kiszínezzük valahogyan két színnel. Mutasd meg, hogy mindig lesz négy azonos színű mező, melyek középpontjai egy „tengelypárhuzamos” téglalap csúcsait alkotják!

15. Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket:

- | | |
|--|--|
| a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1};$ | b) $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k};$ |
| c) $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1};$ | d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n} = 0, \text{ ha } n > 0;$ |
| e) $\binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{n+m}{k};$ | f) $1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1}.$ |

16. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést!

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} 2 + \binom{n}{2} 4 + \dots + \binom{n}{n} 2^n$$