

Kombinatorika előadás

Multihalmazok

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. március 5.

Definíció (informális)

A **multihalmaz** nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amiben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa

Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben.

A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Példa

Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Ebben a példában az **alaphalmaz** $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$, és a **multiplicitások**: $1 \mapsto 3$, $\text{Szeged} \mapsto 2$, $\sqrt{3} \mapsto 3$, $\text{Mars} \mapsto 1$, $\text{Vuk} \mapsto 2$.

Megjegyzés

Technikai okokból megengedjük a 0 multiplicitást is, így a H halmaz nem egyértelmű. Például az előző alaphalmazt kiegészíthetnénk egy új elemmel: pl.: Budapest, aminek 0 lenne a multiplicitása M -ben.

Definíció

Egy H alaphalmaz feletti M multihalmazon egy $H \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt értünk.

(Emlék: $0 \in \mathbb{N}$)

Tehát ha $M : H \rightarrow \mathbb{N}$ egy H feletti multihalmaz, akkor:

- $\forall h \in H$ elemre: $M(h)$ a h elem multiplicitása
- azt mondhatjuk, hogy egy $h \in H$ elem eleme M -nek, ha $M(h) > 0$.
- az M multihalmaz $|M|$ elemszáma a benne szereplő elemek multiplicitásainak összege, azaz $|M| := \sum_{h \in H} M(h)$.

Definíció

Egy H alaphalmaz feletti M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint az M -beli multiplicitás, azaz: $\forall h \in H : N(h) \leq M(h)$.

(N megkapható M -ből néhány elem törlésével)

Példa

Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ multihalmaz egy részmultihalmaz az $N = \{1, 1, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ multihalmaz.

M : $1 \mapsto 3, \text{Szeged} \mapsto 2, \sqrt{3} \mapsto 3, \text{Mars} \mapsto 1, \text{Vuk} \mapsto 2.$

N : $1 \mapsto 2, \text{Szeged} \mapsto 0, \sqrt{3} \mapsto 1, \text{Mars} \mapsto 1, \text{Vuk} \mapsto 2.$

Tétel

Egy $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma:

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \dots (M(h_n) + 1).$$

(ez általánosítása az n elemű halmaz részhalmazainak számának)

Bizonyítás. Egy N részmultihalmazban a h_i elem $N(h_i)$ multiplicitása 0-tól $M(h_i)$ -ig bármilyen nemnegatív egész értéket felvehet. Ez tehát minden egyes h_i elem esetén $(M(h_i) + 1)$ -féle döntési lehetőség. Mivel ezek a döntések egymástól „függetlenek”, ezért a szorzási alapelv miatt ezeket össze kell szoroznunk. $\square$

Tétel

Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazainak száma:

$$\left(\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right)\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Megjegyzés

Egy n elemű H halmaz feletti k elemű multihalmaz tekinthető a H -ból k elem visszatevéses kihúzásával kapott kimenetelnek (ahol az elemek kihúzási sorrendje nem számít), azaz az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjának.

Mit is kellene összeszámolnunk például a $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \text{Mars}, \text{Vuk}\}$ alaphalmaz feletti 11 elemű multihalmazok megszámlálásakor?

($\implies$ Az 5 multiplicitás összege 11 legyen!)

$$\left(\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right)\right) = |\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k\}|$$

Lemma

Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$|\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k\}| = \binom{n+k-1}{k}.$$

(Hány megoldása van az $m_1 + m_2 + \dots + m_n = k$ egyenletnek $\mathbb{N}$ -ben?)

Bizonyítás. A lehetséges multihalmazokat, azaz a megfelelő $m_1, m_2, \dots, m_n$ multiplicitás választásokat **kölcsönösen egyértelműen** feleltessük meg egy **karaktorsorozattal**. Kódoljunk el egy $(m_1, \dots, m_n)$ n -est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet \bullet \dots \bullet}^{m_n \text{ db}}$$

Ez egy **bijekció** az olyan karaktorsorozatokkal, amikben pontosan k pötty van és $n - 1$ db vessző. Az ilyen jelsorozatok száma pedig $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen ennyiféleképpen tudjuk kijelölni a k pötty helyét az összesen $n + k - 1$ karakterből álló jelsorozatban. □