

Kombinatorika előadás

Pascal háromszög, Binomiális tétel

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 19.

Megjegyzés

Ha $k > n$, akkor $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincsen n -nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Jelölés

Legyen H egy véges halmaz, és $k \in \mathbb{N}$. Ekkor a $\binom{H}{k}$ jelöli a H halmaz k -elemű részhalmazainak halmazát, azaz:

$$\binom{H}{k} := \{R \subseteq H : |R| = k\}.$$

Például $\binom{[n]}{k}$ jelöli az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -elemű részhalmazainak halmazát.

Így: $\binom{n}{k} = \left| \binom{[n]}{k} \right|$.

A Pascal-háromszög és tulajdonságai

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & \\ & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\ & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\ & \vdots & & & & & \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Állítás

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hiszen 0-elemű részhalmaza csak az **üres halmaz** (jele: $\emptyset$) lehet, és n -elemű részhalmaza is csak egyedül **a teljes halmaz** lehet. $\square$

A Pascal-háromszög és tulajdonságai

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \textcolor{red}{\binom{5}{0}} & \textcolor{blue}{\binom{5}{1}} & \textcolor{green}{\binom{5}{2}} & \textcolor{green}{\binom{5}{3}} & \textcolor{blue}{\binom{5}{4}} & \textcolor{red}{\binom{5}{5}} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{5} & \textcolor{green}{10} & \textcolor{green}{10} & \textcolor{blue}{5} & \textcolor{red}{1} \\
 & \vdots & & & &
 \end{array}$$

Állítás

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n$$

Bizonyítás. **Bijekciót** definiálhatunk $[n]$ k -elemű részhalmazai és $(n-k)$ -elemű részhalmazai között. $R \subseteq [n]$, $|R| = k$ esetén legyen $R \mapsto \bar{R} := [n] \setminus R$. $\square$

A Pascal-háromszög és tulajdonságai

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 \vdots & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \xrightarrow{\Sigma} 2^5 \\
 \vdots & & & & &
 \end{array}$$

Állítás

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Bizonyítás. Nemrég láttuk be **kettős leszámlálással**. □

A Pascal-háromszög és tulajdonságai

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
 & \vdots & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 & \vdots & & & & &
 \end{array}$$

Állítás

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Segítség: A baloldalon láthatóan használjuk az **összeadási alapelvet** és gondoljunk a binomiális együtthatók jelentésére.

Állítás

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. **Kettős leszámplálással** bizonyítunk.

A jobboldal definíció szerint az $[n]$ összes k -elemű részalmazának száma.

A baloldal pedig ugyanezt számolja aszerint **csoportosítva az eseteket**, hogy az 1 elem bekerül-e az éppen vizsgált k -elemű részalmazba.

$\binom{n-1}{k-1}$ ennyi olyan k -elemű részalmaz van, ami tartalmazza az 1-et, hiszen ekkor az $(n-1)$ elemszámú $\{2, 3, \dots, n\}$ halmazból kell még egy $(k-1)$ -elemű részalmazt keresni, ami 1-el együtt alkotja $[n]$ egy k -elemű részalmazát.

$\binom{n-1}{k}$ ennyi olyan k -elemű részalmaz van, ami **nem** tartalmazza az 1-et, hiszen ekkor az $(n-1)$ elemszámú $\{2, 3, \dots, n\}$ halmazból kell még egy k -elemű részalmazt keresni, ami az 1 nélkül alkotja $[n]$ egy k -elemű részalmazát. □

A Pascal-háromszög és tulajdonságai

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & \\
 & \vdots & & & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\
 & \vdots & & & & & & &
 \end{array}$$

Állítás (Zokni szabály)

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}, \quad \text{ha } n > k$$

Bizonyítás. Kulcs észrevétel: $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$, és ezután egymás után alkalmazzuk az előző tulajdonságot. □

Tétel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés

A középső alak helyes eredményt ad $k > n$ esetén is, amikor $\binom{n}{k} = 0$, a jobboldali formula csak $k \leq n$ esetén értelmes.

Bizonyítás. Elegendő csak az első egyenlőséget igazolni, mert a másodiknál csak $(n-k)!$ -al bővítettünk.

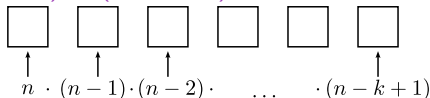
Kettős leszámlálással fogjuk megmutatni, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Bizonyítás (folyt). $\binom{n}{k} k! = n(n-1) \dots (n-k+1).$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („ k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $[n]$ halmazból kerülnek ki, és ráadásul a sorozat elemei **páronként különbözők**.

- **Jobb oldal:** A sorozat 1. eleme n -féle lehet. Bármilyen is került az 1. helyre, a 2. helyre $(n-1)$ -féle elemből választhatunk. Utána **az eddigi döntésektől függetlenül** a 3. helyre $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, végül az utolsó k . helyre még van $(n-k+1)$ választható elemünk. A **szorzási alapelv** miatt az összes k hosszú páronként különböző elemeket tartalmazó sorozatok száma éppen $n(n-1) \dots (n-k+1).$



Bizonyítás (folyt).

- **Bal oldal:** Most aszerint csoportosítjuk a sorozatokat, hogy melyik k különböző elem alkotja őket.

A k betű kiválasztására $\binom{n}{k}$ lehetőségünk van. Bárhogy is választottuk ki a k elemet, azokat kell most sorbarendeznünk. Az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy erre $k!$ -féle lehetőségünk van.

Mivel esetszétválasztást csináltunk, ezért az összeadási alapelvet használva össze kell adnunk az egyes esetekben kapott értékeket. De azok most mind $k!$ -sal egyeznek meg, ezért a végeredmény $\binom{n}{k} k!$. □

Állítás

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

$$1$$

$$1 = 1$$

$$1 < 2 > 1$$

$$1 < 3 = 3 > 1$$

$$1 < 4 < 6 > 4 > 1$$

$$1 < 5 < 10 = 10 > 5 > 1$$

$$\vdots$$

Megjegyzés

Páros n esetén a fenti egyenlőtlenség-láncban kétszer is szerepel az $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ binomiális együttható, hiszen a két „középső” elem megegyezik, mert $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$.

Állítás

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Bizonyítás. A binomiális együtthatók képletéből kapjuk, hogy: $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.$$

Innen pedig következik, hogy az $\frac{n-k}{k+1}$ tört 1-hez való viszonyán múlik minden.

$$\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1} \iff 1 < \frac{n-k}{k+1} \iff k < \frac{n-1}{2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} \iff 1 = \frac{n-k}{k+1} \iff k = \frac{n-1}{2}$$

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1} \iff 1 > \frac{n-k}{k+1} \iff k > \frac{n-1}{2}$$



Tétel

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható **paritását** a következőképpen határozhatjuk meg $0 \leq k \leq n$ esetén: írjuk fel n -et és k -t is **2-es számrendszerben**, és egészítsük ki a k 2-es számrendszerbeli alakját annyi kezdő 0-val, hogy a kapott bitsorozat ugyanolyan hosszú legyen, mint n 2-es számrendszerbeli alakja:

$$n = \overline{n_1 n_2 n_3 \dots n_s}, \quad k = \overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_s}.$$

Ekkor

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \binom{n_3}{k_3} \dots \binom{n_s}{k_s} \pmod{2}.$$

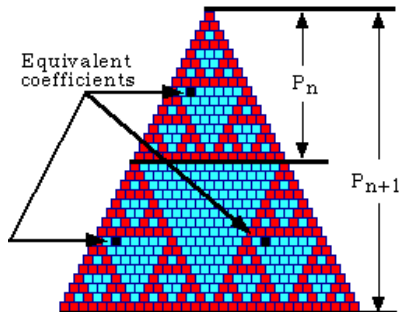
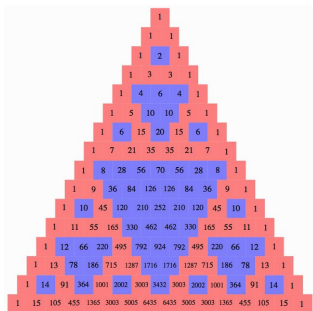
Megjegyzés

Mivel $\binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$, és $\binom{0}{1} = 0$, ezért $\binom{n}{k}$ **pontosan akkor páros, ha van** olyan $i \in [s]$ pozíció, amelyre $n_i = 0$ és $k_i = 1$:

$$\begin{array}{rcl} n_1 n_2 n_3 \dots n_s & = & \dots \dots 0 \dots \\ k_1 k_2 k_3 \dots k_s & & \dots \dots 1 \dots \end{array}$$

A binomiális együtthatók paritása

A paritások szemléltetése a Pascal-háromszögben:



A képek forrása:

<https://www.quora.com/How-interesting-is-this-naturally-occurring-Pascal-s-triangle>

<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/siertri/Pascalmath.htm>

Tétel (Binomiális tétel)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés

A **binom** szó **kéttagú** összeget (**polinomot**) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „**binomiális együtthatóknak**” nevezzük.

Megjegyzés

A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Megjegyzés

Mivel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, így: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Tétel (Binomiális tétel)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Bizonyítás. Bontsuk fel a zárójeleket a bal oldali n tényezős szorzatban:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = xx \dots xx + xx \dots xy + xx \dots yx + \cdots + yy \dots yy.$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n -tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y . (Ez 2^n darab tag.)

Minden ilyen $yxx \dots yxy$ tag „hatvány alakban” felírva $x^{n-k} y^k$ alakú lesz, ahol k az y -ok száma ($k \in \{0, \dots, n\}$). Egy rögzített k -ra tehát annyi tagból fog $x^{n-k} y^k$ adódni, ahány olyan n -tényezős szorzat („szó”) van, amelynek pontosan k db tényezője („betűje”) y , és $n - k$ db tényezője („betűje”) x . Ez a szám pedig $\binom{n}{k}$, mert ennyiféleképpen tudjuk kijelölni az y -ok helyét az n helyből. Ezért az összevonható tagok összevonása után a tétel jobb oldala adódik. □