

Kombinatorika előadás

A kombinatorika alapelvei, Részhalmazok

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 12.

Honlap: <https://www.math.u-szeged.hu/~blazsik/tkomb24252.html>

Ide fognak felkerülni a diások és a feladatsorok is. A követelmények szintén itt (illetve a COOSPACE színtérben is) elérhetők.

Gyakorlat:

- **két ZH:** 15+15 pont (a félév végén az egyik ZH javítható)
- **házi feladatok:** 20 pont (minden gyakorlaton adok fel 2 pont értékben, és a legjobb 10 számít)
- **órai aktivitás:** plusz pontokat lehet szerezni

Előadás:

- **szóbeli vizsga:** rövid írásbeli beugró + tételhúzás

Érdemjegy: 0-49: **1**

50-62: **2**

63-75: **3**

76-87: **4**

88-100: **5**

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(természetes számok halmaza)

$$\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}$$

(pozitív egész számok halmaza)

$$[n] := \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$$

(standard n elemű halmaz)

$|A|$ egy A halmaz vagy multihalmaz elemszáma

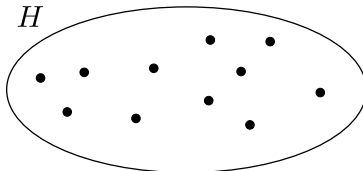
$\dot{\cup}$ halmazok **diszjunkt** uniója: pl.: $A \dot{\cup} B \dot{\cup} C$

Mi az a (leszámláló) kombinatorika?

Tipikus kombinatorika feladat

Hány háromjegyű palindrom prím szám van?

Ez egy **összeszámlálási feladat**, amelyben egy adott H véges halmaz elemszámát szeretnénk meghatározni.



$$|H| = ?$$

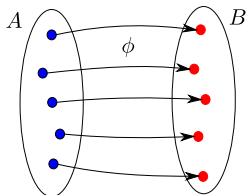
A megszámlolandó objektumokat egy **halmazba** tehetjük. Például most a $H = \{\text{háromjegyű palindrom prím számok}\}$ halmaz elemszámára vagyunk kíváncsiak.

Alapelvek

Definíció

Az $f : A \rightarrow B$ leképezés egy **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**/vagy **kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés**), ha teljesül rá az alábbi két tulajdonság:

- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző
(ha $a_1 \neq a_2 \in A$, akkor $f(a_1) \neq f(a_2)$)
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként
(bármely $b \in B$ -hez létezik olyan $a \in A$, amire $f(a) = b$)



f **injektív** $\iff \forall b \in B$ -nek **legfeljebb 1 őse** van A -ban.

f **szürjektív** $\iff \forall b \in B$ -nek **legalább 1 őse** van A -ban.



f **bijekció** $\iff \forall b \in B$ -nek **pontosan 1 őse** van A -ban.

Bijekciós alapelv

Az A és B halmazok elemszáma pontosan akkor egyezik meg, ha létezik $A \rightarrow B$ bijekció.

Mi is az az elemszám?

(gondoljunk vissza óvodás korunkra!)

Definíció

Az A halmaz **elemszáma** n , ha létezik $A \rightarrow [n]$ bijekció. Az A halmaz **véges**, ha valamely n természetes számra $|A| = n$ teljesül.

Összeadási alapelv

Ha a H véges halmaz elemeit **partícionáljuk/osztályozzuk/csoportosítjuk** az $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq H$ **páronként diszjunkt** halmazokba (vagyis H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Azaz általában tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_k$ halmazokra:

$$|A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} A_3 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Feladat

Hány olyan kétjegyű szám van, aminek utolsó számjegye prím szám, első jegye pedig legalább 7? $(3 \cdot 4 = 12, \text{ mert a két döntés egymástól független})$

Szorzási alapelv

Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Emlék: Az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ azon k -asok halmazát jelöli, aminek első eleme A_1 -ből, második eleme A_2 -ből, $\dots$, k -adik eleme A_k -ből származik. Tehát:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : \forall i \in [k] : a_i \in A_i\}.$$

Szorzási alapelv

Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Bizonyítás. Osztályozzuk az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ elemeit (k -asok) aszerint, hogy mi az első elemük A_1 -ből. Így $|A_1|$ osztály keletkezik és minden osztályba $|A_2 \times \dots \times A_k|$ darab k -as kerül (**használjuk a bijekciós alapelvet**), és így **az összeadási alapelv** miatt: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2 \times \dots \times A_k|$.

A gondolatmenetet megismételve $A_2 \times \dots \times A_k$ -re kapjuk, hogy $|A_2 \times \dots \times A_k| = |A_2| \cdot |A_3 \times \dots \times A_k|$. Innen pedig **k szerinti indukcióval** adódik az állítás:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$



Feladat

Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w, x, y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β !

$$\begin{aligned} & (A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ & = Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta + \\ & \quad Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta + \\ & \quad Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta. \end{aligned}$$

Megjegyzés

Vegyünk egy n tényezős szorzatot, ahol a zárójelekben szereplő összegeket jelölje $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Ekkor a zárójelek felbontása után a keletkező tagok éppen a $Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$ halmaz elemei lesznek.

Skatulyaelv

Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerül.

Ekkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne. $\nexists$ $\square$

Általánosított skatulyaelv

Ha N tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{N}{m}$ tárgy kerül és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{N}{m}$ tárgy kerül.

Megjegyzés

Valójában arról van szó, hogy ha vesszük néhány szám átlagát, akkor az a legnagyobb és a legkisebb érték közé esik.

Részhalmazok

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**.
(„Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának **sorrendje nem számít**, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H **részhalmazai**.

Definíció

Egy H halmaz **hatványhalmazán** a H összes részhalmazainak halmazát értjük, és ezt $\mathcal{P}(H)$ -val jelöljük. Formálisan, $\mathcal{P}(H) := \{R : R \subseteq H\}$.

Példa

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza:

$$\mathcal{P}(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Tétel

Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Bizonyítás. Legyen H egy n elemű halmaz. Ekkor a H tetszőleges részhalmazát úgy állíthatjuk elő, hogy a H minden elemére eldöntjük, hogy azt bele vesszük-e a részhalmazba vagy sem.

Ez n független döntés, és mindegyik elemnél 2-féle lehetőségből választhatunk, tehát a **szorzási alapelv** alapján összesen $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-szer}} = 2^n$ -féle részhalmaz van.

□

Definíció

Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz **karakterisztikus vektora** az az n -koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i -edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. **Jelölése:** $\vec{\chi}_R$.

Példa: $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Megjegyzés

A karakterisztikus vektor definiálásához (és értelmezéséhez) le kell rögzíteni az alaphalmaz elemeinek egy sorrendjét!

Tétel

Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n -elemű halmaz. Ekkor az $f: \mathcal{P}(H) \rightarrow \{0, 1\}^n$
 $R \mapsto \vec{\chi}_R$ **leképezés bijekció**, azaz f bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú karakterisztikus vektorokkal.

Tétel

Egy **nemüres** H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint páratlan elemszámú.

Bizonyítás. Legyen $h_1 \in H$ egy rögzített elem. **Kölcsönösen egyértelműen párbaállítjuk** a H páros és páratlan elemszámú részhalmazait úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ részhalmazhoz hozzárendeljük a $\{h_1\} \cup R$ részhalmazt.

Természetesen a párokban szereplő részhalmazok elemszáma pontosan 1-gyel tér el, ezért az egyikük páros elemszámú, a másikuk páratlan elemszámú. $\square$

Definíció

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részalmazainak a számát jelöli. (értelmes definíció, mert nem függ a konkrét halmaz választásától)

$\binom{5}{3} = 10$, mert:

1	2	3	4	5
●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Tétel

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. **Kettős leszámolással** bizonyítunk. Belátjuk, hogy az egyenlőség két oldalán ugyanannak a halmaznak a részalmazainak a számát számoljuk meg kétféle módon!

- **Jobb oldal:** Ez éppen az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részalmazainak a száma.
- **Bal oldal:** A részalmazokat azok elemszáma szerinti csoportosítva számoljuk össze. $\binom{n}{k}$ megszámlálja a pontosan k elemű részalmazok számát, és az összeadási alapelvet használjuk. □

Kettős leszámolás

Ha egy összeszámlálási problémát kétféle módon megoldunk helyesen, akkor a kapott két válasz meg kell, hogy egyezzen.