

Extremális gráfelmélet előadás

Szemerédi regularitási lemmája

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. március 17.

Szemerédi regularitási lemmája

Szemerédi Endre Abel-díjas magyar matematikus, akinek legjelentősebb eredménye **Erdős** és **Turán** sejtésének igazolása, miszerint bármely $\delta > 0$ és $k \geq 3$ -hoz létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy $n > n_0$ esetén az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges legalább δn méretű részhalmaza tartalmaz k hosszú számtani sorozatot.

($k = 3$ Roth tétele)

Ehhez az eredményéhez volt szüksége a világhírű **regularitási lemmára**, aminek aztán számos extrémális gráfelméleti alkalmazása is született.

A **regularitás lemma** lényegében azt mondja ki, hogy tetszőleges elég nagy csúcsszámú gráf csúcshalmaza **partícionálható véges sok**, hasonló méretű osztályra, hogy **a legtöbb osztálypár** esetén a köztük levő páros gráf **véletlenszerűnek** tűnik.

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és legyen $A, B \subseteq V$ két **diszjunkt** részhalmaza a csúcsoknak. Jelölje $E(A, B)$ az A és B között menő élek halmazát.

A $H = (A \cup B, E(A, B))$ páros gráf **élsűrűsége** pedig: $d(A, B) = \frac{|E(A, B)|}{|A||B|}$.

Van értelme nem diszjunkt halmazokra is: $E(A, B) = |\{(a, b) \in A \times B \mid ab \in E\}|$

Az (A, B) pár **ε -reguláris**, ha $\forall A' \subseteq A$ -ra és $\forall B' \subseteq B$ -re, amire $|A'| \geq \varepsilon|A|$ és $|B'| \geq \varepsilon|B|$ fennáll $|d(A', B') - d(A, B)| \leq \varepsilon$ teljesül.

A csúcshalmaz egy $V(G) = X_1 \dot{\cup} X_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} X_k$ partíciója **ε -reguláris**, ha

$$\sum_{(X_i, X_j) \text{ nem } \varepsilon\text{-reguláris}} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} \leq \varepsilon.$$

Megjegyzés

Egy **páros gráf** tehát ε -reguláris, ha bármely nem túl kicsi feszített részgráfjának élsűrűsége lényegében megegyezik az egész páros gráf élsűrűségével.

(ezt várnánk egy véletlen gráftól)

Egy **partíció** pedig ε -reguláris, ha majdnem minden osztálpár ε -reguláris páros gráfot feszít.

Megjegyzés

Nem várhatjuk el, hogy ugyanez teljesüljön akármilyen kicsi A' , B' -re, hiszen ha például $|A'| = 1 = |B'|$, akkor a hányados 0 vagy 1.

A regularitási lemma alakjai

Tétel (Szemerédi regularitási lemma, **gyenge alak**)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $M, N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ csúcsú gráfnak létezik ε -reguláris k osztályú partíciója, valamely $m \leq k \leq M$ -re.

Tétel (Szemerédi regularitási lemma, **erős alak**)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $M, N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ csúcsú gráfnak létezik olyan ε -reguláris k osztályú partíciója, amiben **az osztályok mérete lényegében egyforma** ($\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ és $\lceil \frac{n}{k} \rceil$), valamely $m \leq k \leq M$ -re.

Tétel (Szemerédi regularitási lemma, részletesen kiírva)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $M, N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ csúcsú gráfnak létezik olyan $V_0, V_1, \dots, V_k$ partíciója, amire a következők teljesülnek:

- 1 $m \leq k \leq M$;
- 2 $|V_0| < \varepsilon n$;
- 3 $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$;
- 4 εk^2 pár kivételével minden (V_i, V_j) pár ε -regularis.

Bizonyítás (vázlat).

1 Induljunk ki a **triviális partícióból**, aminek egyetlen osztálya van.

2 Amíg a partíció nem ε -reguláris:

- minden (V_i, V_j) párra, ami nem ε -reguláris rögzítsünk $A^{i,j} \subseteq V_i$ és $A^{j,i} \subseteq V_j$ részhalmazokat, amik tanúsítják, hogy (V_i, V_j) nem ε -reguláris, azaz:

$$|A^{i,j}| \geq \varepsilon |V_i| \quad \wedge \quad |A^{j,i}| \geq \varepsilon |V_j| \quad \wedge \quad |d(A^{i,j}, A^{j,i}) - d(V_i, V_j)| > \varepsilon.$$

- az összes tanút figyelembe véve **egyszerre finomítsuk** az aktuális partíciónkat.

Ha ez a folyamat **véges sok finomítás** után leáll, akkor készen vagyunk. Ahhoz, hogy a folyamat végeességét igazoljuk meg fogjuk mutatni, hogy egy alkalmasan definiált **energia mennyiség** minden egyes finomítás alkalmával **nem csökken**, sőt „lényegi javítás” esetén **növekszik**!

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és $U, W \subseteq V$. Defináljuk a következő energia mennyiséget:

$$q(U, W) = \frac{|U||W|}{n^2} d(U, W)^2.$$

Legyen $P_U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ egy partíciója U -nak, és $P_W = \{W_1, W_2, \dots, W_\ell\}$ egy partíciója W -nek. Ekkor legyen

$$q(P_U, P_W) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(U_i, W_j).$$

Továbbá a V egy $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ partíciójára a partíció energiája:

$$q(P) = q(P, P) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

Állítás 1

Tetszőleges $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ partícióra: $0 \leq q(P) \leq 1$.

Bizonyítás. Mivel bármely V_i, V_j -re: $d(V_i, V_j) \leq 1$, így:

$$\begin{aligned} q(P) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} = \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^k |V_i| \right) \left(\sum_{j=1}^k |V_j| \right) = 1. \end{aligned}$$

□

Állítás 2

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és $U, W \subseteq V$. Tetszőleges P_U és P_W partíciókra: $q(P_U, P_W) \geq q(U, W)$.

Bizonyítás. Legyen $P_U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ és $P_W = \{W_1, W_2, \dots, W_\ell\}$.

Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen $x \in U$ és $y \in W$ csúcsokat.

Jelölje U_i azt a partícióosztályát U -nak, ami x -et tartalmazza, és W_j azt a partícióosztályát W -nek, ami y -t tartalmazza. Jelölje Z azt a véletlen valószínűségi változót, aminek értéke $d(U_i, W_j)$. Ekkor:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{|U_i|}{|U|} \frac{|W_j|}{|W|} d(U_i, W_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{|E(U_i, W_j)|}{|U||W|} = \frac{|E(U, W)|}{|U||W|} = d(U, W)$$

Állítás 2

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és $U, W \subseteq V$. Tetszőleges P_U és P_W partíciókra: $q(P_U, P_W) \geq q(U, W)$.

Bizonyítás (folyt). Ekkor a Z második momentuma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{|U_i|}{|U|} \frac{|W_j|}{|W|} d(U_i, W_j)^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{|U_i||W_j|}{|U||W|} \left(\frac{|E(U_i, W_j)|}{|U_i||W_j|} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{|U||W|} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{|E(U_i, W_j)|^2}{|U_i||W_j|} \right) \stackrel{q(P_U, P_W) \text{ behelyettesítve}^*}{=} \frac{n^2}{|U||W|} q(P_U, P_W) \end{aligned}$$

Mivel Z szórásnégyzete (varianciája): $\text{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$ sosem lehet negatív, így adódik a bizonyítandó állítás. □

Következmény

Ha a P' partíció a P partíció finomítása, akkor $q(P') \geq q(P)$.

Állítás 3 (energia növelő lemma)

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és $U, W \subseteq V$. Tfh az (U, W) pár nem ε -reguláris, amiket $U_1 \subseteq U$, $W_1 \subseteq W$ tanúsítanak. Legyen $P_U = \{U_1, U \setminus U_1\}$ és $P_W = \{W_1, W \setminus W_1\}$. Ekkor:

$$q(P_U, P_W) > q(U, W) + \varepsilon^4 \frac{|U||W|}{n^2}.$$

Bizonyítás. Definiáljuk ugyanúgy a Z valószínűségi változót, mint korábban. Ekkor a Z szórásnégyzetére hasonlóan kapjuk, hogy:

$$\text{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{n^2}{|U||W|} (q(P_U, P_W) - q(U, W)).$$

Szintén kiszámoltuk az imént, hogy $\frac{|U_1|}{|U|} \frac{|W_1|}{|W|}$ valószínűséggel (ha $x \in U_1$ és $y \in W_1$), akkor: $|Z - \mathbb{E}(Z)| = |d(U_1, W_1) - d(U, W)|$.

Állítás 3 (energia növelő lemma)

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és $U, W \subseteq V$. Tfh az (U, W) pár nem ε -reguláris, amiket $U_1 \subseteq U$, $W_1 \subseteq W$ tanúsítanak. Legyen $P_U = \{U_1, U \setminus U_1\}$ és $P_W = \{W_1, W \setminus W_1\}$. Ekkor:

$$q(P_U, P_W) > q(U, W) + \varepsilon^4 \frac{|U||W|}{n^2}.$$

Bizonyítás (folyt). Így a szórásnégyzet definíció alapján:

$$\text{Var}(Z) = \mathbb{E}\left((Z - \mathbb{E}(Z))^2\right) \geq \frac{|U_1|}{|U|} \frac{|W_1|}{|W|} \left(d(U_1, W_1) - d(U, W)\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ (U_1, W_1) \text{ nem } \varepsilon\text{-reguláris pár}}}{>} \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^4.$$

Tehát $\varepsilon^4 < \text{Var}(Z) = \frac{n^2}{|U||W|} \left(q(P_U, P_W) - q(U, W)\right)$ -ből átrendezéssel kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget! □

Állítás 4

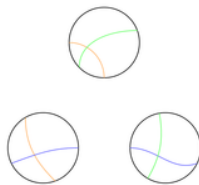
Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és legyen $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ egy partíciója V -nek. Ha P nem ε -reguláris partíció, akkor létezik olyan Q finomítása P -nek, hogy minden V_i osztályt legfeljebb 2^k sok részre felosztva igaz lesz, hogy:

$$q(Q) \geq q(P) + \varepsilon^5.$$

Bizonyítás. Minden olyan (i, j) párra, amire (V_i, V_j) nem ε -reguláris, rögzítsünk egy $A^{i,j} \subseteq V_i$ és $A^{j,i} \subseteq V_j$ párt, ami ezt tanúsítja.

Legyen Q a P partíció finomítása, amiben az összes irreguláris pár miatt rögzített $A^{i,j}$, $A^{j,i}$ halmazok szerint egyszerre finomítunk.

Vegyük észre, hogy ekkor minden V_i osztályt legfeljebb 2^k sok részre osztottuk tovább!



Állítás 4

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és legyen $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ egy partíciója V -nek. Ha P nem ε -reguláris partíció, akkor létezik olyan Q finomítása P -nek, hogy minden V_i osztályt legfeljebb 2^k sok részre felosztva igaz lesz, hogy:

$$q(Q) \geq q(P) + \varepsilon^5.$$

Bizonyítás (folyt). Legyen Q_{V_i} a P partíció V_i osztályának Q szerinti partíciója. Ekkor

$$q(Q) = \sum_{(i,j) \in [k] \times [k]} q(Q_{V_i}, Q_{V_j}) = \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \varepsilon\text{-reg.}}} q(Q_{V_i}, Q_{V_j}) + \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \text{irreg.}}} q(Q_{V_i}, Q_{V_j})$$

Mivel figyelembe vettük az összes $A^{i,j}$ halmazt a finomításkor, így Q_{V_i} egy finomítása lesz az $\{A^{i,j}, V_i \setminus A^{i,j}\}$ partíciónak minden $(i, j) \in [k] \times [k]$ -ra.

Állítás 4

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és legyen $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ egy partíciója V -nek. Ha P nem ε -reguláris partíció, akkor létezik olyan Q finomítása P -nek, hogy minden V_i osztályt legfeljebb 2^k sok részre felosztva igaz lesz, hogy:

$$q(Q) \geq q(P) + \varepsilon^5.$$

Bizonyítás (folyt). Tehát Állítás 2 miatt:

$$\begin{aligned}
 q(Q) &= \sum_{(i,j) \in [k] \times [k]} q(Q_{V_i}, Q_{V_j}) = \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \varepsilon\text{-reg.}}} q(Q_{V_i}, Q_{V_j}) + \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \text{irreg.}}} q(Q_{V_i}, Q_{V_j}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Áll. 2}}}{\geq} \\
 &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Áll. 2}}}{\geq} \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \varepsilon\text{-reg.}}} q(V_i, V_j) + \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \text{irreg.}}} q(\{A^{i,j}, V_i \setminus A^{i,j}\}, \{A^{j,i}, V_j \setminus A^{j,i}\})
 \end{aligned}$$

Állítás 4

Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, és legyen $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ egy partíciója V -nek. Ha P nem ε -reguláris partíció, akkor létezik olyan Q finomítása P -nek, hogy minden V_i osztályt legfeljebb 2^k sok részre felosztva igaz lesz, hogy:

$$q(Q) \geq q(P) + \varepsilon^5.$$

Bizonyítás (folyt). Alkalmazva Állítás 3-at azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 q(Q) &\geq \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \varepsilon\text{-reg.}}} q(V_i, V_j) + \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \text{irreg.}}} q(\{A^{i,j}, V_i \setminus A^{i,j}\}, \{A^{j,i}, V_j \setminus A^{j,i}\}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Áll. 3}}}{\geq} \\
 &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Áll. 3}}}{\geq} \sum_{(i,j) \in [k] \times [k]} q(V_i, V_j) + \sum_{\substack{(i,j) \in [k] \times [k] \\ (V_i, V_j) \\ \text{irreg.}}} \varepsilon^4 \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ P \text{ nem} \\ \varepsilon\text{-reguláris}}}{\geq} \sum_{(i,j) \in [k] \times [k]} q(V_i, V_j) + \varepsilon^5.
 \end{aligned}$$



Bizonyítás (Szemerédi reg. lemma, gyenge alak). Induljunk ki a triviális, egyosztályú partícióból. Iteráltan alkalmazzuk **Állítás 4**-et, amikor az aktuális partíció még nem ε -reguláris.

Mivel az energiára láttuk, hogy $0 \leq q(P) \leq 1$ mindig teljesül, de az **Állítás 4** összes használatakor $q(P)$ legalább ε^5 -nel növekszik, így biztosan **legfeljebb ε^{-5} -szer alkalmazhatjuk.**

Azaz legfeljebb ε^{-5} sok lépés után a kapott partíció már ε -reguláris lesz. □

Megjegyzés

Ha a fent leírt eljárás végén m -nél kevesebb osztály lenne, akkor a meglevő partíció további finomításával növelhetjük az osztályok létszámát. Az M, N értékek pedig választható egyenlőnek, és ezt az értéket mindjárt megbecsüljük.

Hány osztályra van szükség?

Ha az aktuális partíciónak k osztálya van és még nem ε -reguláris, akkor **Állítás** 4-et használva tovább finomíthatjuk a partíciót, és mivel minden osztályt legfeljebb 2^k sok részre osztunk fel, így az új partíció osztályainak száma **legfeljebb $k2^k$** .

Tudjuk, hogy $k2^k \leq 2^{2^k}$, így ha ezt a lépést ε^{-5} sokszor el kell végeznünk, akkor a keletkező osztályok számát felülről becsülhetjük $\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{2\varepsilon^{-5} \text{ sok } 2\text{-es}}$ -vel.

Tehát $M = N$ választható $\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{2\varepsilon^{-5} \text{ sok } 2\text{-es}}$ -nek a tétel bizonyításában.

Megjegyzés

Gondolhatnánk, hogy egy ügyesebb érvelés esetén ez a **torony** megspórolható, és sokkal jobb becslést is mondhatunk a partícióosztályok számára, **de nem ez a helyzet!**

Hány osztályra van szükség?

Tétel (Gowers, 1997)

Létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy tetszőleges elég kicsi $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan G gráf, aminek bármely ε -reguláris partíciójában az osztályok száma legalább

$$\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{\geq \varepsilon^{-c} \text{ sok } 2\text{-es}}.$$

Tehát a torony nem megspórolható, bizonyos gráfokra szükséges!

Tétel (Szemerédi regularitási lemma, erős alak)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $M, N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ csúcsú gráfnak létezik olyan ε -reguláris k osztályú partíciója, amiben az osztályok mérete lényegében egyforma ($\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ és $\lceil \frac{n}{k} \rceil$), valamely $m \leq k \leq M$ -re.

A gyenge alakot felhasználva kapunk egy ε -reguláris partíciót, majd ezt a partíciót tovább finomítva és az osztályok méretét kiegyenlítve kapjuk az erős alak állítását.

(Vigyázni kell, mert a kiegyenlítéskor elromolhat az ε -regularitás!)

(Ráadásul így az osztályok száma is jelentősen tovább növekedne!)

Tétel (Szemerédi regularitási lemma, erős alak)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $M, N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ csúcsú gráfnak létezik olyan ε -reguláris k osztályú partíciója, amiben az osztályok mérete lényegében egyforma ($\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ és $\lceil \frac{n}{k} \rceil$), valamely $m \leq k \leq M$ -re.

Bizonyítás (vázlat). Induljunk ki egy tetszőleges olyan partícióból, aminek m kiegyensúlyozott osztálya van.

Amíg a partíció nem ε -reguláris, addig finomítsuk az irreguláris párok mentén a partíciót, majd további finomítással, néhány csúcs átpakolásával, és picit osztályok egyesítésével ügyeljünk a kiegyensúlyozottságra.

A partícióhoz tartozó energia minden „lényegi” finomításkor ε^5 -nel növekedni fog, de a kiegyensúlyozottság elérésekor ez valamennyit romolhat!

De a növekedés így is $\Omega(\varepsilon^5) \implies O(\varepsilon^{-5})$ lépés után a partíció ε -reguláris! $\square$