

Extremális gráfelmélet előadás

Általános tiltott páros gráfok

Pánciklikusság, Moon-Moser egyenlőtlenség

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. március 10.

Általános tiltott páros gráfok

H tetszőleges páros gráf

Felső becslést fogunk adni $\text{ex}(n, H)$ -ra, amennyiben H páros gráf és H egyik osztályában a maximális fokszám r .

Tétel (Alon, Krivelevich, Sudakov)

Legyen $H = (A \cup B, F)$ páros gráf és tñh B -ben minden csúcs fokszáma legfeljebb r . Ekkor:

$$\text{ex}(n, H) \leq c(H) \cdot n^{2 - \frac{1}{r}}.$$

Megjegyzés

Ebból tehát következik a Kővári-T.Sós-Turán tétel is.

A bizonyításhoz ismét a változtatott véletlen módszert fogjuk alkalmazni.

Jelölje egy $U \subset V$ részhalmaza $N(U)$ az U -ban levő csúcsok közös szomszédainak a halmazát, azaz: $N(U) = \{v \in V \mid (\forall u \in U) : vu \in E\}$.

Lemma (Alon, Krivelevich, Sudakov)

Legyenek a, d, m, n, r pozitív egészek. Legyen $G(V, E)$ egy n csúcsú gráf, ahol $d = \frac{2|E(G)|}{n}$ az átlagfokszám. Ha van olyan t pozitív egész, hogy:

$$\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^t \geq a,$$

akkor G tartalmaz olyan legalább a méretű $U \subset V$ részhalmazt, hogy bármely r U -beli csúcsnak van legalább m közös szomszédja.

Bizonyítás. Válasszunk ki egyenletesen véletlenszerűen egy $T \subset V$ t elemű részhalmazt **ismétléssel**! Legyen $A = N(T)$, és jelölje X azt a véletlen változót, ami A elemszáma.

Bizonyítás (folyt). Ekkor:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{|N(v)|}{n} \right)^t = n^{-t} \sum_{v \in V(G)} |N(v)|^t \underset{\substack{\text{Jensen-egy.} \\ z^t \text{ konvex}}}{\geq} \\ &\underset{\substack{\text{Jensen-egy.} \\ z^t \text{ konvex}}}{\geq} n^{1-t} \left(\frac{\sum_{v \in V(G)} |N(v)|}{n} \right)^t = \frac{d^t}{n^{t-1}}. \end{aligned}$$

Jelölje Y azt a véletlen változót, ami azon $S \subset A$ r elemű részhalmazokat számolja, amiknek m -nél kevesebb közös szomszédjuk van. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy r elemű $S \subset V$ részhalmaz éppen A -ba is beleesik: $\left(\frac{|N(s)|}{n} \right)^t$. Másrészt legfeljebb $\binom{n}{r}$ -féleképp tudunk egy r elemű részhalmazt választani A -ból, amire $|N(S)| < M$, ezért:

$$\mathbb{E}(Y) < \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n} \right)^t$$

Bizonyítás (folyt). Innen a várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(X - Y) \geq \frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^t \geq a$$

Tehát létezik olyan T választás, amire az $A = N(T)$ halmaz teljesíti, hogy $X - Y \geq a$. Töröljünk egy csúcsot minden rossz $S \subset A$ -ból (amire $|S| = r$, de $|N(S)| < m$). Így kaptunk egy $U \subset A$ részhalmazt, aminek legalább a csúcsa van és tetszőleges r méretű részhalmazára teljesül, hogy a közös szomszédaiknak a száma legalább m . □

Tétel (Alon, Krivelevich, Sudakov)

Legyen $H = (A \cup B, F)$ páros gráf és tfh B -ben minden csúcs fokszáma legfeljebb r . Ekkor:

$$\text{ex}(n, H) \leq c(H) \cdot n^{2-\frac{1}{r}}.$$

Bizonyítás. Legyen $a := |A|$, $b := |B|$, $m := a + b$, $t := r$ és $c := \max\left(a^{\frac{1}{r}}, \frac{3(a+b)}{r}\right)$, és tfh G egy n csúcsú gráf, amire $|E(G)| \geq cn^{2-\frac{1}{r}}$. Ekkor a G gráf átlagfokszámára adhatunk alsó becslést: $d := \bar{d}(G) \geq 2cn^{1-\frac{1}{r}}$.

Jól ismert becslés, hogy $r! \geq \left(\frac{r}{e}\right)^r$, így:

$$\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^t \geq \frac{(2cn^{1-\frac{1}{r}})^t}{n^{t-1}} - \frac{n^r}{r!} \left(\frac{a+b}{n}\right)^r \geq (2c)^r - \left(\frac{e(a+b)}{r}\right)^r \geq c^r \geq a.$$

Tehát teljesül ezekkel az a, b, d, m, n, r, t paraméterekkel az előző [Lemma](#) feltétele!

Bizonyítás (folyt). A **Lemma** miatt G -ben található olyan $|U| = a$ méretű csúcshalmaz, aminek tetszőleges r méretű részhalmazára teljesül, hogy van legalább $m = a + b$ közös szomszédjuk.

A bizonyítás a következő Lemmával fejezhető be:

Lemma (beágyazhatósági lemma)

Legyen $H = (A \cup B, F)$ páros gráf, amire $|A| = a$ és $|B| = b$ és tfh B -ben minden csúcs fokszáma legfeljebb r . Ha $V(G)$ -nek van olyan U részhalmaza, hogy $|U| = a$ és U -nak bármelyik r méretű részhalmazára teljesül, hogy van legalább $a + b$ közös szomszédjuk, akkor H részgráfja G -nek.

Bizonyítás (Lemma). A beágyazhatósághoz elegendő mutatnunk egy $g : A \cup B \rightarrow V(G)$ injektív függvényt. Először egy tetszőleges $f : A \rightarrow U$ injekcióból indulunk ki. Tartsuk meg g -ben is az A -beli csúcsok f szerinti beágyazását.

Címkezzük meg B csúcsait $v_1, v_2, \dots, v_b$ -vel. A B -beli csúcsokat egymás után fogjuk beágyazni ebben a sorrendben. Tfh a soron következő beágyazandó csúcs $v_i \in B$, $1 \leq i \leq b$. Jelölje $N_i \subseteq A$ a v_i csúcs H -beli szomszédait, azaz a feltevés miatt $|N_i| \leq r$. Mivel így $f(N_i) \subseteq U$ és $|f(N_i)| \leq r$, így van legalább $a + b$ olyan csúcs G -ben, akik mind közös szomszédai az $f(N_i)$ -beli csúcsoknak.

Mivel eddig a beágyazott csúcsok száma $a + (i - 1) < a + b$, ezért biztosan van olyan $w_i \in V(G)$, amit még nem használtunk és minden $f(N_i)$ -beli csúccsal szomszédos. Tehát ha minden $1 \leq i \leq b$ -re $g(v_i) = w_i$, akkor g tényleg egy megfelelő injektív függvény lesz. $\square$

$$\implies ex(n, H) \leq c(H) \cdot n^{2 - \frac{1}{r}} \quad \square$$

Pánciklikusság, Bondy tétele

Definíció

Egy n csúcsú $G = (V, E)$ gráf pánciklikus, ha minden $3 \leq \ell \leq n$ -re tartalmaz ℓ hosszú kört.

Tétel (Bondy)

Ha egy n csúcsú $G = (V, E)$ gráfban van Hamilton-kör és $|E(G)| = m \geq \frac{n^2}{4}$, akkor G pánciklikus, kivéve ha $m = \frac{n^2}{4}$ és $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Következmény

Ha egy n csúcsú $G = (V, E)$ gráfban van Hamilton-kör és $|E(G)| = m > \frac{n^2}{4}$, akkor G pánciklikus.

Következmény

Ha egy n csúcsú $G = (V, E)$ gráfban $\delta(G) > \frac{n}{2}$, akkor G pánciklikus.

Tétel (Bondy)

Ha egy n csúcsú $G = (V, E)$ gráfban van Hamilton-kör és $|E(G)| = m \geq \frac{n^2}{4}$, akkor G pánciklikus, kivéve ha $m = \frac{n^2}{4}$ és $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Bizonyítás. Tfh G -ben van $n - 1$ hosszú C_{n-1} kör is, és az egyetlen kimaradó csúcsot jelölje x . Ha $d(x) \leq \frac{n-1}{2}$, akkor a $V \setminus \{x\}$ által feszített részgráfban az élek száma legalább $\frac{n^2}{4} - \frac{n-1}{2} > \frac{(n-1)^2}{4}$, tehát teljes indukciót alkalmazva kapjuk a kívánt állítást.

Tfh $d(x) > \frac{n-1}{2}$. Ekkor a **skatulyaelv** miatt tetszőleges $3 \leq \ell \leq n - 2$ -re létezni fog a C_{n-1} körön két olyan csúcs, amik **egyaránt szomszédai x -nek**, és **a körön a köztük levő távolság $\ell - 2$** . (Miért?)

Ezért feltehető, hogy G -ben nincsen $n - 1$ hosszú kör (azaz nem is pánciklikus). Tehát a cél az, hogy megmutassuk, hogy ekkor $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$!

Bizonyítás (folyt). Legyenek egy **Hamilton-kör** csúcsai rendre: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ekkor tetszőleges (x_{i-1}, x_i) csúcspárra és x_{i-1} -től különböző x_j -re teljesül, hogy az $x_{i-1}x_j$ és az x_ix_{j+2} élek nem szerepelhetnek egyszerre G -ben. (lenne C_{n-1} !)

Ebből következik, hogy $\forall 1 \leq i \leq n$ -re $d(x_i) + d(x_{i-1}) \leq n$ teljesül. Innen:

$$4m = \sum_{i=1}^n d(x_i) + d(x_{i-1}) \leq n^2 \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{n^2}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{n^2}{4}$$

Szükségképpen n -nek párosnak kell lennie! Továbbá minden $1 \leq i, j \leq n$ -re az $x_{i-1}x_j$ és az x_ix_{j+2} élek közül pontosan az egyik szerepel G -ben.

Meg fogjuk mutatni, hogy G páros gráf! (ezzel vége is lesz a bizonyításnak?)

Színezzük a Hamilton-körön felváltva a csúcsokat pirosra és kékre! Az nyilvánvaló, hogy nincsen 2 „hosszú” húrja a Hamilton-körnek, mert akkor lenne $n - 1$ hosszú kör is.

Bizonyítás (folyt). Ebből viszont következik, hogy a $j = i + 1$ választással $x_{i-1}x_j = x_{i-1}x_{i+1}$ sosem éle G -nek, tehát $x_i x_{j+2} = x_i x_{i+3}$ mindig éle G -nek, azaz a 3 „hosszú” húrok mind szerepelnek G -ben.

Ugyanezt a gondolatmenetet folytatva a $j = i + 2$ választással kiderül, hogy semelyik 4 „hosszú” húr sincs behúzva, de minden 5 „hosszú” újból szerepel G -ben, ... stb.

Tehát a Hamilton-körben **egyik páros „hosszú” húr se szerepel**, de **minden páratlan „hosszú” húr jelen van**, tehát G tényleg páros gráf, mert ez a színezés egy jó 2-színezése. □

Moon-Moser-egyenlőtlenség

Tétel

Tetszőleges n csúcsú, m élű $G = (V, E)$ gráfra teljesül, hogy

$$N_3 \geq \frac{4N_2}{3} \left(\frac{N_2}{N_1} - \frac{N_1}{4} \right),$$

ahol N_i jelöli a K_i klikkek számát G -ben, azaz $N_1 = n$ és $N_2 = m$.

Bizonyítás. Jelölje bármely $e \in E$ -re $h(e)$ azon háromszögek számát, amiknek e az egyik oldala. Ekkor kettős leszámlálással, majd a számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$\begin{aligned} 3N_3 &= \sum_e h(e) \geq \sum_{xy=e} (d(x) + d(y) - n) = \sum_{x \in V} d^2(x) - mn \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{számtani-négyzetes}}}{\geq} \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{számtani-négyzetes}}}{\geq} n \left(\frac{\sum d(x)}{n} \right)^2 - mn = \frac{4m^2}{n} - mn. \end{aligned}$$



Következmény

Az előző tételből következik, hogy ha G -nek legalább $\frac{n^2}{4} + 1$ éle van, akkor legalább $\frac{n}{3}$ háromszöget kell, hogy tartalmazzon. (beláttuk újból a Mantel tételt)

Tétel (Moon-Moser)

(nem biz.)

Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfra teljesül, hogy

$$N_{s+1} \geq \frac{s^2 N_s}{s^2 - 1} \left(\frac{N_s}{N_{s-1}} - \frac{N_1}{s^2} \right),$$

ahol N_i jelöli a K_i klikkek számát G -ben, ha $N_{s-1} \neq 0$.

Megjegyzés

Ráadásul ez a típusú egyenlőtlenség r -uniform hipergráfokra is általánosítható.