

Extremális gráfelmélet előadás

A Zarankiewicz probléma alkalmazásai

Turán kérdéskör fákra

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. március 3.

A Zarankiewicz probléma alkalmazásai

Feladat

Legyen S egy n elemszámú ponthalmaz a síkon. Legfeljebb hány pontpár lesz egységtávolságban?

A sejtés az, hogy legfeljebb $n^{1+o(1)}$ ilyen pár lehet. A legjobb ismert felső korlát viszont csupán $O(n^{\frac{4}{3}})$. (Nem bizonyítjuk.)

A Kővári-T.Sós-Turán tétel következményeként egy gyengébb korlátot viszont könnyen igazolhatunk.

Készítsünk egy gráfot: legyenek a pontok a gráf csúcsai és két csúcsot kössünk össze éllel, ha a két pont között a távolság éppen 1. Átfogalmazva az a kérdés, hogy maximum hány éle lehet egy ilyen n csúcsú gráfnak? Vegyük észre, hogy a kapott gráf $K_{2,3}$ -mentes! (egységkörön 3 pont $\iff$ középpont)

Tehát a tétel következményeként egy ilyen gráf élszáma legfeljebb $O(n^{\frac{3}{2}})$.

Definíció

Legyen A egész számok egy halmaza. Ekkor $A + A := \{a + a' \mid a, a' \in A\}$ jelöli az A önmagával vett **összeghalmazát**.

Tétel (Erdős-Newman)

Ha $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, m^2\} \subseteq A + A$ valamely A -ra, akkor $|A| \geq m^{\frac{2}{3}-o(1)}$.

Bizonyítás (vázlat). Az nyilvánvaló, hogy $|A| \geq \sqrt{m} = m^{\frac{1}{2}}$. (Miért?)

Másrészt a legjobb felső korlátot adó konstrukcióban $|A| \approx \frac{m}{\log m}$, azaz az alsó és felső korlát még messze van.

Tfh $\{1^2, 2^2, \dots, m^2\} \subseteq A + A$, ahol $n = |A|$. Készítsünk egy G gráfot, aminek csúcsai A elemei és $(a_1, a_2) \in E(G) \iff a_1 + a_2 = x^2$ valamely $x \in [m]$ -re. A feltétel miatt $|E(G)| \geq m$.

Megmutatjuk, hogy G -ben nincsen $K_{2,t}$, ahol $t = n^{o(1)}$!

Bizonyítás (vázlat). Ez valóban elég lenne, hiszen ekkor a Kővári-T.Sós-Turán tétel miatt $m \leq \frac{1}{2}(n^{o(1)})^{\frac{1}{2}} n^{2-\frac{1}{2}} = n^{o(1)+\frac{3}{2}}$, ahonnan adódik, hogy $n \geq m^{\frac{2}{3}-o(1)}$.

Ekvivalens azt belátni, hogy bármely két csúcs közös szomszédainak a száma kisebb, mint t . Tehát azt elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges két csúcs közös szomszédainak a száma $n^{o(1)}$.

Rögzítsünk két csúcst: a_1, a_2 és legyen b egy közös szomszédjuk. Ekkor létezik olyan x és y , hogy: $a_1 + b = x^2$ és $a_2 + b = y^2$. Így minden közös szomszédhoz hozzárendelhetünk egy címkét: $L_b = (x + y, x - y)$. Különböző b, b' közös szomszédokra azok címkéje nem egyezhet meg: $L_b \neq L_{b'}$, mert az $x + y = p$ és $x - y = q$ -ből x és y egyértelműen meghatározható, azaz b is.

Másrészt egy (p, q) címke esetén $p|a_1 - a_2$ és $q|a_1 - a_2$ is teljesül, tehát a_1 és a_2 közös szomszédainak száma legfeljebb $D(|a_1 - a_2|)^2$, ahol $D(x)$ az x osztóinak száma.

Bizonyítás (vázlat). Feltehető, hogy $A \subseteq [m^2]$, tehát $n \leq m^2$ és bármely $a_1, a_2 \in A$ -ra: $|a_1 - a_2| \leq m^2$.

Ha n prímtényezős alakja $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, akkor ismert hogy $D(n) = \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i)$. Tehát a célunk az, hogy $D(n) = n^{o(1)}$, azaz mindkét oldal logaritmusát véve ekvivalensen tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz elég nagy n -re teljesüljön, hogy:

$$\log D(n) = \sum_{i=1}^r \log(1 + \alpha_i) \leq \varepsilon \log n \iff \frac{\sum_{i=1}^r \log(1 + \alpha_i)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i \log p_i} \leq \varepsilon$$

Innentől a bizonyítás befejezése tisztán technikai, ezért azt nem részletezzük.

Turán probléma fákra

Szeretnénk minél jobb becslést adni az $\text{ex}(n, T)$ értékre, ahol T egy $t + 1$ csúcsú fa, ahol $t \geq 1$.

Észrevétel: Vegyük t méretű teljes gráfok diszjunkt unióját. Ez nyilván nem tartalmazza T -t, és éleinek száma kb. $\frac{n}{t} \cdot \binom{t}{2} = \frac{n(t-1)}{2}$. Tehát $\text{ex}(n, T) \geq \frac{n(t-1)}{2}$.

Sejtés (Erdős-T.Sós)

Az imént igazolt alsó korlát éles. ($\implies$ Ajtai-Komlós-Simonovits-Szemerédi tétel)

A bizonyítás nem is jelent még meg, ezért helyette gyengébb korlátokat bizonyítunk!

Állítás

Ha G -nek m éle van, akkor van olyan H részgráfja G -nek, amire $\delta(H) > \frac{m}{n}$.

Bizonyítás. Ha $\delta(G) > \frac{m}{n}$, akkor $H = G$ megfelelő. Egyébként válasszunk egy tetszőleges $v \in V$ csúcsot, amire $d(v) \leq \frac{m}{n}$ és töröljük G -ből. Ekkor az így kapott $G - v$ gráf átlagfokszáma:

$$\bar{d}(G - v) \geq \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v) - \frac{2m}{n}}{n - 1} = \frac{2m(1 - \frac{1}{n})}{n(1 - \frac{1}{n})} = \frac{2m}{n} = \bar{d}(G).$$

Tehát ilyen csúcs kitörlésekor az átlagfokszám nem tud csökkenni. Ezt a folyamatot folytatva végül el fogunk jutni egy olyan részgráfhoz, aminek minimális fokszáma nagyobb, mint $\frac{m}{n}$.

Miért? $\implies$ ha $|V(H)| < \frac{2m}{n}$, akkor $\bar{d}(H) < \frac{2m}{n}$ is teljesülne



Állítás

Tetszőleges $t + 1$ csúcsú T fára $\text{ex}(n, T) < (t - 1)n$.

Bizonyítás. Legyen G egy $(t - 1)n$ élű gráf. Ekkor az előző Állítás miatt **van** olyan H részgráfja G -nek, amire $\delta(H) > t - 1$, azaz $\delta(H) \geq t$.

Meg kell mutatnunk, hogy H -ban tetszőleges $t + 1$ csúcsú T fa beágyazható!

Mivel minden fának van levele, ezért T csúcsai felsorolhatók: $v_1, v_2, \dots, v_{t+1}$ úgy, hogy **minden v_i pontosan egy csúcsnak szomszédja $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ -ből.**

T -t **mohón** fogjuk beágyazni H -ba. v_1 H tetszőleges csúcsába beágyazható.

Tegyük fel, hogy alkalmas $2 \leq i \leq t + 1$ -re T -nek már a $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ csúcsait beágyaztuk H -ba és most szeretnénk megmutatni, hogy v_i is beágyazható. Tfh v_i egyetlen korábbi szomszédja v_j . Mivel $d_H(v_j) \geq t$, így van olyan szomszédja, amit még nem használtunk el. □

Állítás

Tetszőleges gráfban van olyan kör/út, aminek hossza legalább $\delta(G) + 1$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy leghosszabb utat G -ben: $x_1, x_2, \dots, x_k$. Ekkor x_1 összes szomszédja az út további csúcsai közül kerül ki. Az x_1 legkésőbbi szomszédjának indexe legalább $\delta(G) + 1$, tehát a köztük vezető él az úttal együtt egy legalább $\delta(G) + 1$ hosszú kört zár be. $\square$

Tétel (Dirac)

Legyen G egy $n \geq 3$ csúcsú egyszerű gráf. Ha $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, akkor G -ben van Hamilton-kör.

Bizonyítás. Tekintsünk egy leghosszabb utat G -ben: $x_1, x_2, \dots, x_k$. Továbbra is teljesül, hogy x_1 és x_k összes szomszédja az úton található.

Bizonyítás (folyt). Megmutatjuk, hogy van olyan x_i csúcs valamely $1 \leq i \leq k$ -ra, hogy $x_1 x_{i+1} \in E$ és $x_i x_k \in E$!

x_1 -nek van legalább $\frac{n}{2}$ szomszédja $\{x_2, x_3, \dots, x_k\}$ -ből és x_k -nak van legalább $\frac{n}{2}$ szomszédja $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ -ből. (skatulyaelv miatt létezik a kívánt x_i)

Így tehát az $x_1, x_2, \dots, x_i, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{i+1}, x_1$ egy k hosszú kör. Ha $n = k$, akkor ez egy **Hamilton-kör**. Különben **belátjuk, hogy egy külső csúcsból vezet ide él**, hiszen akkor ellentmondást kapunk, mert találnánk $k + 1$ hosszú utat is.

Mivel bármely két csúcs vagy szomszédos vagy van közös szomszédjuk, így G összefüggő, és így ellentmondást kaptunk. □

Megjegyzés

A korlát éles is, mert például ha a G gráfot két K_n -ből egy csúcs azonosításával kapjuk, akkor $\delta(G) \geq n - 1$, de G -ben nincs Hamilton-kör.

Állítás

Ha G összefüggő, akkor van G -ben $\min\{n - 1, 2\delta(G)\}$ hosszúságú út.

Bizonyítás. Vegyük a leghosszabb utat $x_1, x_2, \dots, x_k$ G -ben. Ha $k = n$ vagy ha $k \geq 2\delta(G) + 1$, akkor készen vagyunk. Tfh $k \leq \min n - 1, 2\delta(G)$, ekkor viszont ismét a **skatulyaelv** miatt létezik olyan x_i , hogy $x_1 x_{i+1} \in E$ és $x_i x_k \in E$ is teljesül.

Mivel $k < n$, így $V \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \neq \emptyset$, így az összefüggőség miatt van olyan v csúcs, hogy $vx_j \in E$. Az i és j indexek egymáshoz való viszonyától függően más-más módon, de találunk $k + 1$ csúcsú utat G -ben, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

Ha G nem feltétlenül összefüggő, akkor a korábban bizonyított $\delta(G) + 1$ -es korlát éles is.

Tétel (Erdős, Gallai)

Ha G egy n csúcsú, m élű P_{t+1} -mentes gráf, akkor $m \leq \frac{(t-1)n}{2}$. Sőt, egyenlőség esetén a G gráf K_t gráfok diszjunkt uniója.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n \leq t$, akkor triviálisan teljesül. Ha G nem összefüggő, akkor összefüggőségi komponensenként indukciózhatunk. (Cél: ha G öf és $n > t$, akkor $m < \frac{(t-1)n}{2}$)

Tfh G összefüggő és $n > t$. Ekkor G K_t -mentes is, hiszen különben lenne benne P_{t+1} . Ha $\delta(G) \geq \frac{t}{2}$, akkor az előző állítás miatt nem lehetne G -ben P_{t+1} -mentes. Tehát van olyan v csúcs, amire $d(v) \leq \frac{t-1}{2}$.

Törölve ezt a csúcsot G -ből és alkalmazva az indukciót (tudva, hogy G K_t -mentes és P_{t+1} -mentes) kapjuk, hogy a keletkező $G - v$ -re: $|E(G - v)| < \frac{(t-1)(n-1)}{2}$.

Így: $m < \frac{t-1}{2} + \frac{(t-1)(n-1)}{2} = \frac{(t-1)n}{2}$. □