

Extremális gráfelmélet előadás

Zarankiewicz problémák

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 24.

C_4 -mentes gráfok

Most vizsgáljuk meg azokat a problémákat, amikor a kizárt részgráf nem egy teljes gráf, hanem egy **kör**. (ez a másik természetes általánosítási irány)

Ezt a kérdést már az 1930-as években megoldotta **Erdős Pál**, de akkor még „elszalasztotta felfedezni az extrémális gráfelméletet”.

Tétel

Ha az n csúcsú $G(V, E)$ gráf **C_4 -mentes**, akkor $|E| = e \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$.

Bizonyítás. **Kettős leszámolást** fogunk alkalmazni és megszámoljuk a **cseresznyéket!**

Egy tetszőleges $v \in V$ csúcs éppen $\binom{d(v)}{2}$ cseresznyének középső csúcsa. Másrészt egy csúcspárra nem illeszkedhet több különböző cseresznye is, mert ezek együtt C_4 -et alkotnának.

Bizonyítás (folyt). Tehát:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} &\leq \binom{n}{2} \iff \sum_{v \in V} d(v)^2 - \sum_{v \in V} d(v) \leq n(n-1) \iff \\ &\iff \sum_{v \in V} d(v)^2 - 2e \leq n(n-1)\end{aligned}$$

A baloldal tovább csökkenthető, ha a **számtani-négyzetes közepek közötti**

egyenlőtlenséget használva $\sum_{v \in V} d(v)^2$ helyett $n \cdot \left(\frac{\sum_{v \in V} d(v)}{n} \right)^2 =$

$$= n \cdot \left(\frac{2e}{n} \right)^2 = \frac{(2e)^2}{n} \text{-et írunk:}$$

$$n(n-1) \geq \sum_{v \in V} d(v)^2 - 2e \geq \frac{(2e)^2}{n} - 2e \iff 0 \geq \frac{(2e)^2}{n} - 2e - n(n-1)$$

Bizonyítás (folyt). A kapott egyenlőtlenség e -ben másodfokú, és főegyütthatója pozitív, tehát grafikonja egy **felfelé álló parabola**:

$$0 \geq \frac{(2e)^2}{n} - 2e - n(n-1) \iff 0 \geq 4e^2 - 2en - n^2(n-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Így a megoldóképlet alapján a két gyök: } e_{1,2} &= \frac{2n \pm \sqrt{(2n)^2 + 16n^2(n-1)}}{8} = \\ &= \frac{n}{4} \pm \frac{n\sqrt{16n-12}}{8} = \frac{n}{4}(1 \pm \sqrt{4n-3}). \end{aligned}$$

A kisebbik gyök negatív, így az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $e \leq e_1 = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$. □

Kizárt C_4 részgráf - konstrukció

Mit mondhatunk alulról? Van-e olyan példa, amiben az élek számának nagyságrendje éppen $n^{\frac{3}{2}}$?

Egy [Klein Esztertől](#) származó konstrukciót fogunk tárgyalni, ami mutatja, hogy ez a helyes nagyságrend.

Olyan páros gráfot fogunk konstruálni, ami lényegében egy **véges testre épített projektív sík pont-egyenes illeszkedési gráfja**.

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. (gondoljunk $\mathbb{F}_q$ -re, ahol $q = p^h$ prímszámhatvány)

Emlék: $\text{PG}(2, q)$ az $\mathbb{F}_q$ -ra épített véges projektív sík egy pont-egyenes illeszkedési struktúra. $\mathcal{L}$ és $\mathcal{P}$ jelöli rendre az egyenesek és a pontok halmazát.

- **Pontok:** $\mathcal{P}$ -t az $\mathbb{F}_q^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ponthármasok ekvivalenciaosztályai alkotják:
 $[x_0, x_1, x_2] := \{(cx_0, cx_1, cx_2) \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : c \in \mathbb{F}_q^*\}$ ($\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$)

Így egy ekvivalenciaosztályba $q - 1$ hármas esik, és így $|\mathcal{P}| = \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1$.

- **Egyenesek:** $\mathcal{L}$ egyeneseit a következőképp definiáljuk. Egy adott $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ hármashoz tartozó $L(a_0, a_1, a_2)$ egyenes:

$$L(a_0, a_1, a_2) := \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathcal{P} : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$$

Nyilván $L(a_0, a_1, a_2) = L(ca_0, ca_1, ca_2)$, így $|\mathcal{L}| = q^2 + q + 1$.

Állítás (Emlék)

Az $\mathbb{F}_q$ -ra épített $\text{PG}(2, q)$ véges projektív síkban a következő állítások igazak:

- i) Bármely pontra ugyanannyi – méghozzá $q + 1$ – egyenes illeszkedik.
- ii) Bármely egyenesre ugyanannyi – méghozzá $q + 1$ – pont illeszkedik.
- iii) Bármely két egyenesnek pontosan 1 közös pontja van.
- iv) Bármely két ponthoz pontosan 1 olyan egyenes létezik, amire mindketten illeszkednek.

Definíció

Egy véges projektív sík **pont-egyenes illeszkedési gráfja** egy páros gráf $G(\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, aminek osztályai $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$, és $(p, \ell) \in E \iff p \text{ I } \ell$, ahol $p \in \mathcal{P}$ és $\ell \in \mathcal{L}$.

Példa (Klein Eszter, 1938)

Tekintsük a $PG(2, q)$ pont-egyenes illeszkedési gráfját $G(\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$. Ennek $2(q^2 + q + 1)$ csúcsa van, és az élszáma:

$$\begin{aligned} e(G) &= (q^2 + q + 1)(q + 1) \stackrel{\substack{\uparrow \\ q^2 + q + 1 = \frac{n}{2}}}{=} \frac{n}{2}(q + 1) \stackrel{\substack{\uparrow \\ (q + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{n}{2}}}{=} \frac{n}{2} \left(\sqrt{\frac{n}{2} - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{n}{4} - O(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Miért nem tartalmaz C_4 -et? (létezik-e ℓ_1, ℓ_2 , amiknek lenne két közös pontja?)

Megjegyzés

Az alsó és felső korlát nagyságrendje megegyezik ($n^{\frac{3}{2}}$), de a konstans szorzó eltér.

Példa (Erdős, Rényi, T.Sós 1966)

Legyen $q = p^h$, ahol p prím. Definiálunk egy G_q gráfot, aminek csúcsait $\text{PG}(2, q)$ pontjai alkotják. Ebben legyen két pont $[a, b, c]$ és $[a', b', c']$ szomszédos akkor és csak akkor ha $aa' + bb' + cc' = 0$. (nagyon hasonlít a pont-egyenes illeszkedéshez)

Ekkor $n := |V(G_q)| = q^2 + q + 1$. Az előző okoskodás miatt G_q -ben nincs C_4 .

Milyenek az egyes csúcsok fokszámai?

Egy $v = [a, b, c]$ pont szomszédai éppen azok a pontok, akik az $\ell_v = L(a, b, c)$ jelű egyenesre illeszkedő v -től különböző pontok. (miért kell a különböző szó?)

Tehát, ha v nem illeszkedik ℓ_v -re, akkor $q + 1$ szomszédja van, egyébként pedig q . Azok a v pontok, akik illeszkednek ℓ_v -re kielégítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet (modulo q aritmetikában!).

Kizárt C_4 részgráf - konstrukció

Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le, aminek pontjainak száma $PG(2, q)$ -ben $q + 1$. (HF: miért $q + 1$?)

Tehát $q + 1$ pont fokszáma q , a többi q^2 pont foka $q + 1$ G_q -ben. Ezért:

$$2|E(G_q)| = q^2(q + 1) + (q + 1)q = (q^2 + q)(q + 1) \underset{n=q^2+q+1}{=} (n - 1) \left(\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right)$$

Innen $|E(G_q)| = \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}} + \frac{n}{4} + O(\sqrt{n})$. □

Megjegyzés

Ezt a gráfot nevezik a $PG(2, q)$ véges projektív sík **polaritás gráfjának**. Ennek élszámában a főtag együttthatója is megegyezik a felső korlátban szereplő $\frac{1}{2}$ -el.

Tétel (Füredi)

Tetszőleges $q > 13$ prímhatványra:

$$\text{ex}(q^2 + q + 1, C_4) = \frac{1}{2}q(q + 1)^2.$$

(Tehát a polaritás gráf optimális!)

Megjegyzés

$n \neq q^2 + q + 1$ esetén elég keveset tudunk a pontos értékről, ugyanis csupán $n \leq 31$ -re ismert számítógépes kereséssel.

Zarankiewicz problémák

$$C_4 = K_{2,2}$$

Ahelyett, hogy $k > 4$ -re vizsgálánánk a C_k -mentes gráfok maximális élszámát, más módon általánosítunk.

Vegyük észre, hogy $C_4 = K_{2,2}$, így megkérdezhetjük általában mit mondhatunk egy $K_{s,t}$ -mentes gráf maximális élszámáról?

(ezeket hívjuk Zarankiewicz problémáknak (1951))

Tétel (Kővári, T.Sós, Turán, 1954)

Legyenek $2 \leq s \leq t$ tetszőleges egész számok. Ekkor:

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{s}} n^{2-\frac{1}{s}} + \frac{1}{2}(s-1)n \approx c_{s,t} \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

Tétel (Kővári, T.Sós, Turán, 1954)

Legyenek $2 \leq s \leq t$ tetszőleges egész számok. Ekkor:

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{s}} n^{2-\frac{1}{s}} + \frac{1}{2}(s-1)n \approx c_{s,t} \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

Bizonyítás. Legyen G egy olyan n csúcsú gráf, ami nem tartalmaz $K_{s,t}$ részgráfot. **Kettős leszámlálással** számoljuk meg G -ben a **s -csillagokat** ($K_{1,s}$)!

Bármely v csúcs pontosan $\binom{d(v)}{s}$ s -csillag középpontja. Másrészt bármely s pontú S részhalmazra legfeljebb $(t-1)$ olyan csúcs van, ami középpontként alkothat S -sel együtt s -csillagot. **(különben lenne G -ben $K_{s,t}$)**

$$\binom{n}{s}(t-1) \geq \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{s}.$$

A **Jensen-egyenlőtlenséget** szeretnénk alkalmazni. **(technikai probléma!)**

Bizonyítás (folyt). A probléma oka, hogy az $x \mapsto \binom{x}{s} = \frac{x(x-1)\dots(x-s+1)}{s!}$ függvény nem konvex a teljes $[0, \infty)$ intervallumon, csak ha $x \geq s-1$.

Orvosolható, ha feltesszük, hogy a G gráfunk maximális $K_{s,t}$ -mentes gráf, ugyanis ekkor következik, hogy $\delta(G) \geq s-1$. (így már alkalmazható a Jensen-egy.)

$$(t-1) \frac{n^s}{s!} > (t-1) \binom{n}{s} \geq \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{s} \underset{\text{Jensen}}{\geq} n \binom{\bar{d}(G)}{s} > n \frac{(\bar{d}(G) - (s-1))^s}{s!}$$

Átrendezve kapjuk, hogy $\bar{d}(G) \leq (t-1)^{\frac{1}{s}} n^{1-\frac{1}{s}} + s-1$. Ebből pedig az élszámbra következik, hogy:

$$|E(G)| \leq \frac{n}{2} \left((t-1)^{\frac{1}{s}} n^{1-\frac{1}{s}} + s-1 \right) = \frac{1}{2} (t-1)^{\frac{1}{s}} n^{2-\frac{1}{s}} + \frac{1}{2} (s-1)n.$$



Tétel (Füredi, 1996)

$$\text{ex}(n, K_{2,t}) \gtrsim \frac{1}{2} \sqrt{t-1} \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

Nem bizonyítjuk, de a konstrukció továbbfejlesztése a C_4 -mentes véges projektív síkokból származó konstrukcióknak, még hozzá olyan esetben, amikor $q = p$ prím $(t-1) \mid p-1$.

Ekkor ugyanis létezik egy egyértelmű részcsoportha $\mathbb{F}_p^*$ multiplikatív csoportjának, és ennek segítségével a korábbi konstrukciók sűrűbbé tehetők, olyannyira, hogy nemcsak a nagyságrend stimmel a felső korláttal, de még az együtthatót is pontosan adódik.

Emlék: Láttunk már példát a **várhatóérték módszer** alkalmazására, amikor egy véletlen valószínűségi változó jelölte a vizsgálandó objektum méretét és annak várható értékét kiszámolva tudtunk következtetni, hogy **van olyan esemény, amikor a vizsgálandó objektum mérete legalább/legfeljebb akkora, mint a várható érték.**

Ötlet: Először veszünk egy véletlen gráfot alkalmas paraméter választás mellett, ami még nem feltétlen felel meg minden kívánalmunknak (pl. **tartalmaz tiltott részgráfot**). Majd ezek után **kiszámoljuk az éleinek/csúcsainak számának várható értékét**, és **becsüljük a benne előforduló nem kívánatos objektumok számának várható értékét.**

A tervünk pedig az, hogy **minden nem kívánatos objektumból elhagyunk egy élet/csúcsot** ezáltal a végül kapott gráf már a feltételeknek megfelelő. Az **élszáma/csúcsszáma pedig a várhatóértékek különbségével becsülhető.**

Tétel

Tetszőleges $2 \leq s, t$ egész számokra létezik olyan c' konstans, hogy:

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \geq c' n^{2 - \frac{s+t-2}{st-1}}.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy véletlen gráfot a következő módon: legyen G -nek n csúcsa, és bármely csúcspárra $p = \frac{1}{2} \cdot n^{-\frac{s+t-2}{st-1}}$ valószínűséggel adjuk hozzá G -hez a köztük futó élet.

Ekkor G éleinek számának várható értéke: $\mathbb{E}(|E(G)|) = p \binom{n}{2} \geq \frac{1}{4} p n^2$, hiszen $n \geq 2$. Másrészt a keletkezett $K_{s,t}$ gráfok várható számát is tudjuk becsülni. Ehhez jelölje R azt a véletlen változót, ami épp a keletkező $K_{s,t}$ -k száma. Így:

$$\mathbb{E}(R) \leq \binom{n}{s} \binom{n}{t} p^{st} \leq p^{st} \frac{n^s}{s!} \frac{n^t}{t} \leq p^{st} n^{s+t}.$$

Bizonyítás (folyt). A várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(|E(G)| - R) = \mathbb{E}(|E(G)|) - \mathbb{E}(R) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{st}n^{s+t}$$

A $p = \frac{1}{2} \cdot n^{-\frac{s+t-2}{st-1}}$ választás miatt:

$$p^{st}n^{s+t} = p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{st-1} n^{-(s+t-2)} \cdot n^{s+t} \leq \frac{1}{8}pn^2$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ st \geq 4 \end{matrix}$

$$\text{Tehát: } \mathbb{E}(|E(G)| - R) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{st}n^{s+t} \geq \frac{1}{8}pn^2 = \frac{1}{16}n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

Tehát létezik olyan n csúcsú G gráf, amire $|E(G)| - R \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}$, így minden keletkező $K_{s,t}$ -ből kitörölve egy élt kapunk egy olyan G' gráfot n csúcson, ami már $K_{s,t}$ -mentes és éleinek száma legalább $\frac{1}{16}n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}$. □

Sejtés

$$\text{ex}(n, C_{2k}) = \Theta\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right).$$

(a sejtés bizonyított $k = 2, 3, 5$ -re)

Sejtés

Legyenek $t \geq s \geq 2$ pozitív egészek. Ekkor

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta\left(n^{2-\frac{1}{s}}\right).$$

(a sejtés bizonyított, ha t tetszőleges és $s = 2, 3$, vagy ha $t > (s - 1)!$ és $s \geq 4$)