

Extremális gráfelmélet előadás

Kizárt részgráf problémák, Erdős-Stone-Simonovits tétel

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 17.

Még egy alkalmazása a valószínűségi módszernek

Tétel

Tetszőleges G gráfra teljesül, hogy

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

Bizonyítás. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Az $[n]$ halmaz tetszőleges π permutációjára tekintsük a következő $I(\pi)$ -vel jelölt független ponthalmazt:
 $v_{\pi(i)} \in I(\pi)$ pontosan akkor, ha $v_{\pi(i)}$ egyik $v_{\pi(j)}$ -vel sem szomszédos $j < i$ esetén.
 $\implies I(\pi)$ egy független ponthalmaz

A π permutáció véletlenszerű választása esetén határozzuk meg a $|I(\pi)|$ várható értéket! Jelölje X_i annak az eseménynek az indikátor változóját, hogy $v_i \in I(\pi)$.

Ekkor $|I(\pi)| = \sum_{i=1}^n X_i$. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(v_i \in I(\pi))$ értéket!

Bizonyítás (folyt). $v_i \in I(\pi)$ pontosan akkor következik be, ha a v_i -vel szomszédos csúcsok mindegyike v_i után jelenik meg a π permutációban.

Vagyis a π permutációban a v_i és az $d(v_i)$ szomszédjának sorrendjében v_i az első, és ennek a valószínűsége $\frac{1}{1+d(v_i)}$, tehát:

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(v_i \in I(\pi)) = \frac{1}{1+d(v_i)}.$$

Innen a várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(|I(\pi)|) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+d(v_i)}$$

Tehát biztosan létezik olyan π permutáció, amire $|I(\pi)| \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+d(v_i)}$, és $I(\pi)$ egy független ponthalmaz. □

Erdős-Stone-Simonovits tétel

Aszimptotikus viselkedés jelölései:

- $f(n) = o(g(n))$ (szokás még: $f \ll g$), ha $n \rightarrow \infty$ esetén $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 0$.
- $f(n) = O(g(n))$, ha alkalmas $C > 0$ konstansra $\exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| \leq C$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$, ha $g(n) = O(f(n))$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ (szokás még: $f \sim g$), ha $f(n) = O(g(n))$ és $f(n) = \Omega(g(n))$.
- $f(n) \approx g(n)$, ha $n \rightarrow \infty$ esetén $\frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 1$.

Turán Pál vetette fel a maximális élszámról szóló kérdéseket Erdős Pálnak íródott leveleiben általános kizárt részgráf esetén.

(így született meg az Extremális Gráfelmélet)

Definíció

Egy G gráf H -mentes, ha nem tartalmaz H -val izomorf részgráfot. Jelölése:
 $H \not\subseteq G$.

Definíció

Egy H gráf extrémális száma $ex(n, H)$ az a maximális élszám, amivel egy n csúcsú H -mentes G gráf rendelkezhet.

$$ex(n, H) = \max\{e : \exists H\text{-mentes } G \text{ gráf, amire } v(G) = n, e(G) = e\}$$

Mit mondhatunk $ex(n, H)$ értékéről tetszőleges H -ra?

Turán elsőként azt kérdezte, hogy mivel K_4 a gráfja egy **tetraédernek**, ezért mi az extrémális száma a többi **szabályos testhez** tartozó gráfnak?

A kérdésre kétféle „válasz” létezik: az egyik az extrémális élszám **pontos meghatározása** (lásd $H = K_r$ esetén a Turán tétel), a másik pedig az **aszimptotikus viselkedés becslése**.

Van olyan szabályos test, aminek aszimptotikus viselkedését még ma sem ismerjük!

$$ex(n, \text{tetraéder}) = \frac{n^2}{3} + o(n^2)$$

$$ex(n, \text{oktaéder}) = \frac{n^2}{4} + o(n^2)$$

$$ex(n, \text{ikozaéder}) = \frac{n^2}{3} + o(n^2)$$

$$ex(n, \text{dodekaéder}) = \frac{n^2}{4} + o(n^2)$$

$$ex(n, \text{kocka}) = o(n^2)$$

Tétel (Erdős-Stone-Simonovits, 1946)

Tetszőleges H gráfra

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right) \binom{n}{2} + o(n^2).$$

Következmény

A szabályos testek gráfjának kromatikus száma ismert, így az Erdős-Stone-Simonovits tételből adódtak az extrémális értékek.

De a kocka gráfjának kromatikus száma 2, így ott a hibatag válik főtaggá!

Megjegyzés

Ha H nem páros gráf, akkor tehát az extrémális száma aszimptotikusan ismert. Tehát a legnehezebb esetek azok, amikor H páros gráf.

A tételbeli egyenlőség ekvivalens a következő átfogalmazással:

Tétel (Erdős-Stone-Simonovits, 1946)

Bármely H gráfra, adott $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ -re

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq \text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

A bizonyítás lényegi részét Lemmaként külön tárgyaljuk.

Lemma

Tetszőleges r, t természetes számokra, és bármely pozitív ε -ra, amire $\varepsilon < \frac{1}{r}$, létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy bármely G gráfra $n \geq n_0$ csúcson, aminek legalább $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \binom{n}{2}$ éle van teljesül, hogy van $r + 1$ diszjunkt csúcsalmaz $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$, hogy minden $i \in [r + 1]$ -re $|A_i| = t$ és minden $1 \leq i < j \leq r + 1$ -re A_i és A_j között minden él be van húzva.

Bizonyítás. Az 1. lépés az lesz, hogy találunk G -nek egy elég nagy csúcsszámú G' részgráfját, amire $\delta(G') \geq (1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2})(|V(G')| - 1)$.

Ehhez egyesével elhagyunk csúcsokat a következő módon: ha az aktuális részgráfunk ℓ csúcsú, akkor ha van olyan csúcsa, aminek a fokszáma kisebb, mint $(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2})(\ell - 1)$, akkor az egyik ilyet töröljük. Megmutatjuk, hogy ez a folyamat véges sok törlés után leáll!

Indirekt tegyük fel, hogy mindig van olyan csúcs, aminek fokszáma kicsi, és ezért végül kitörölünk minden csúcst. Ekkor hány élt töröltünk a folyamat közben?

$$\begin{aligned} |\text{törölt élek}| &< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot 1 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{n}{2} < \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \binom{n}{2} \leq e(G) \end{aligned}$$

Bizonyítás (folyt). Ellentmondást kaptunk, tehát feltehető, hogy a folyamat véges sok lépés után leáll egy $n' > 0$ csúcsú, megfelelő G' gráffal. Most belátjuk, hogy n' elég nagy ismét a törölt élek számának becslését használva:

$$|\text{törölt élek}| < \sum_{\ell=n'+1}^n \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ell - 1) = \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(\binom{n}{2} - \binom{n'}{2}\right)$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy G' -nek legfeljebb $\binom{n'}{2}$ éle van, így:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(\binom{n}{2} - \binom{n'}{2}\right) + \binom{n'}{2} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{n}{2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{n'}{2} \end{aligned}$$

Bizonyítás (folyt). De a Lemma feltevése szerint: $e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \binom{n}{2}$, tehát:

$$\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \binom{n}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{n}{2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{n'}{2}$$

Innen átrendezve:

$$\frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{2} \leq \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{n'}{2}$$

Mivel $\varepsilon < \frac{1}{r}$ és $\binom{n'}{2} < \frac{n'^2}{2}$, valamint $\binom{n}{2} > \frac{(n-1)^2}{2}$, így a baloldalt csökkentve és a jobboldalt növelve:

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{(n-1)^2}{2} \leq \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{n'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\frac{2}{r} - \varepsilon}} \cdot (n-1) \leq n'.$$

Bizonyítás (folyt). Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy ezzel a relatíve nagy minimális fokszámú G' gráfra fókuszálunk.

r szerinti teljes indukcióval fogjuk megmutatni, hogy G' -ben léteznek t méretű diszjunkt $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$ halmazok, hogy egy K_{r+1}^t -t tartalmaznak (az A_i kupacokon belül bármi lehet). ($r = 0$ -ra üres feltétel)

Adott $r > 0$ -ra legyen $s = \lceil \frac{3t}{\varepsilon} \rceil$ és alkalmazva az indukciós feltételt kapjuk, hogy találunk G' -ben r diszjunkt s méretű $B_1, B_2, \dots, B_r$ halmazt, amik között minden él be van húzva.

Legyen $U = V(G') \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r)$, és $W \subseteq U$ azon U -beli csúcsok halmaza, akiknek minden $i \in [r]$ -re B_i -ből van legalább t szomszédjuk:

$$W := \{v \in U \mid \forall i \in [r] : |N(v) \cap B_i| \geq t\}$$

Bizonyítás (folyt). Az U és a $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ csúcshalmazok közötti **hiányzó** élek számát (jelölje $\tilde{m}$) fogjuk becsülni!

Mivel minden $v \in U \setminus W$ -re létezik olyan i , hogy $|N(v) \cap B_i| < t$, ezért ezen v csúcs és B_i között biztosan hiányzik legalább $(s - t)$ él, innen:

$$\tilde{m} \geq |U \setminus W| \cdot (s - t) \underset{s = \left\lceil \frac{3t}{\varepsilon} \right\rceil}{\geq} (n' - rs - |W|) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) s$$

Másrészről $\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) (n' - 1)$, tehát tetszőleges $v \in U$ csúcsnak **nem hiányozhat több éle, mint $\left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) (n' - 1)$** . Tehát $\mathcal{B}$ csúcsaira ezeket összeadva:

$$\tilde{m} \leq rs \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) (n' - 1) < rs \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) n' = \left(1 - \frac{r\varepsilon}{2}\right) sn'$$

Bizonyítás (folyt). A két becslést összevetve:

$$|W| \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) s \geq (n' - rs) \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) s - \left(1 - \frac{r\varepsilon}{2}\right) sn' = \varepsilon \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{3}\right) sn' - \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) rs^2$$

Mivel r, s, ε konstansok, ezért $|W|$ mérete növelhető, amennyiben n' -t növeljük.

Tehát majd az n_0 küszöbindexet addig növeljük, hogy már n' is elég nagy legyen, még hozzá annyira, hogy $|W| > \binom{s}{t}^r (t-1)$ teljesüljön.

Tudjuk, hogy minden W -beli csúcsnak bármely B_i -ben van legalább t szomszédja.

Együttesen pontosan $\binom{s}{t}^r$ -féleképpen lehet kiválasztani minden $i \in [r]$ -re B_i -ből egy t elemű részhalmazt, így $|W|$ választása miatt a skatulyaelv szerint léteznek

$A_i \subseteq B_i$, $|A_i| = t$ és egy olyan t elemű A_{r+1} részhalmaz W -ben, hogy minden $1 \leq i < j \leq r+1$ -re A_i és A_j között minden él be van húzva G' -ben. □

Megjegyzés

Ha precízen számolunk, akkor az derül ki, hogy az n_0 küszöbindex választható $2^{\frac{t}{c(r, \varepsilon)}}$ -nak alkalmas $c(r, \varepsilon)$ konstans választása mellett.

Most ezt a lemmát fogjuk használni, hogy az Erdős-Stone-Simonovits tétel felső korlátját bizonyítsuk. Az alsó korlát a Turán gráf létezéséből következik.

Tétel (Erdős-Stone-Simonovits, 1946)

Bármely H gráfra, adott $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ -re

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq \text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Bizonyítás. Az alsó korlát igazolásához vegyünk a $T(n, r)$ Turán gráfot, ahol $r = \chi(H) - 1$. Beláttuk, hogy lényegében $(1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2}$ éle van, és mivel $\chi(H) - 1$ osztályú, ezért $T(n, r)$ kromatikus száma $\chi(H) - 1$ és így bármely részgráfjának kromatikus száma is legfeljebb $\chi(H) - 1$.

Tehát $T(n, r)$ biztosan H -mentes, azaz H extrémális száma tényleg legalább annyi, mint a Turán gráf élszáma.

A felső korlát igazolásához legyen $r = \chi(H) - 1$, és vegyünk olyan elég nagy t értéket, és hozzá alkalmas $\varepsilon < \frac{1}{r}$ számot, amikre a Lemmát elsütve egy tetszőleges $n \geq N$ csúcsú G gráf, aminek legalább $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) \frac{n^2}{2}$ éle van tartalmazni fog $\chi(H)$ darab diszjunkt t méretű $A_1, A_2, \dots, A_{\chi(H)}$ halmazt, amik között minden él be van húzva.

$\implies$ elegendő minden színosztályt egy-egy A_i -be pakolni

$\implies$ nem H -mentes



Következmények, nyitott kérdések

Ahogy korábban is említettük, az **Erdős-Stone-Simonovits tétel** következménye, hogy az **extremális szám nagyságrendje pontosan ismert**, ha a **H gráf nem páros**.

Meglepő lehet, hogy már a legkisebb páros gráfok között is találunk olyanokat, amikre az extremális szám pontos nagyságrendje sem ismert!

$$\text{ex}(n, C_4) = \Theta\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\text{ex}(n, C_6) = \Theta\left(n^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\text{ex}(n, C_{10}) = \Theta\left(n^{\frac{6}{5}}\right)$$

$$\text{ex}(n, K_{3,3}) = \Theta\left(n^{\frac{5}{3}}\right)$$

$$\text{ex}(n, K_{4,7}) = \Theta\left(n^{\frac{7}{4}}\right)$$

$$\Omega\left(n^{\frac{3}{2}}\right) \leq \text{ex}(n, Q_3) \leq O\left(n^{\frac{8}{5}}\right), \text{ ahol } Q_3 \text{ a kocka}$$

$$\Omega\left(n^{\frac{8}{7}}\right) \leq \text{ex}(n, C_8) \leq O\left(n^{\frac{5}{4}}\right)$$

$$\Omega\left(n^{\frac{5}{3}}\right) \leq \text{ex}(n, K_{4,4}) \leq O\left(n^{\frac{7}{4}}\right)$$

Sejtés

$$\text{ex}(n, C_{2k}) = \Theta\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right).$$

(a sejtés bizonyított $k = 2, 3, 5$ -re)

Sejtés

Legyenek $t \geq s \geq 2$ pozitív egészek. Ekkor

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta\left(n^{2-\frac{1}{s}}\right).$$

(a sejtés bizonyított, ha t tetszőleges és $s = 2, 3$, vagy ha $t > (s - 1)!$ és $s \geq 4$)

Sejtés

$$\text{ex}(n, Q_3) = \Theta\left(n^{\frac{8}{5}}\right).$$

Megjegyzés

Az extrémális gráfok az összes ismert esetben **jól meghatározott, erős struktúrával** rendelkeznek, mégis a létezésük nagyon esetlegesnek tűnik.

Akik foglalkoztak már Turán típusú kérdés esetén az extrémális gráf meghatározásával sokszor azt mondják, hogy:

„olyan ez, mint tűt keresni a szénakazalban”.