

Extremális gráfelmélet előadás

Mantel tétel, Turán tétel

Blázsik L. Zoltán

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2025. február 10.

Idézet Bollobás Béla **Extremal Graph Theory** című könyvéből:

„Extremal graph theory, in its strictest sense, is a branch of graph theory developed and loved by Hungarians.”

Általános értelemben: valamilyen gráfparaméter lehetséges extrémális értékét vizsgáló problémák. Például:

- Mekkora lehet maximálisan r értéke, ha G egy 2-szeresen összefüggő n csúcsú r -reguláris gráf, ami nem tartalmaz Hamilton kört?
- Rögzített H gráf esetén legkevesebb hány éle van egy olyan n csúcsú G gráfnak, aminek H nem részgráfja, de bármely további él hozzávételével már részgráfja lenne? $\implies$ szaturálási problémák
- Legfeljebb hány éle lehet egy olyan n csúcsú gráfnak, ami valamilyen rögzített H gráfot nem tartalmaz részgráfként? $\implies$ kizárt részgráf problémák

$G(V, E)$ – egyszerű gráf

$|V| = n$, és $|E| = m$

K_n – n csúcsú teljes gráf

$K_{s,t}$ – teljes páros gráf, $s + t$ csúcson

$d(v)$ – egy v csúcs fokszáma

$N(v) = \{u : uv \in E\}$ – v szomszédsága

$\delta(G)$ – G minimális fokszáma

$\Delta(G)$ – G maximális fokszáma

$\alpha(G)$ – a G gráf függetlenségi száma

$\nu(G)$ – G maximális párosítás mérete

$\omega(G)$ – a G gráf klikk száma

$\chi(G)$ – a G gráf kromatikus száma

Turán típusú problémák

Tétel (Mantel, 1907)

Ha G egy háromszögmentes gráf, akkor $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ráadásul, ha $m = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, akkor G egy teljes páros gráf: $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Bizonyítás. $n = 3, 4$ -re egyszerű ellenőrizni. Majd teljes indukciót használunk.

Vegyünk egy $xy \in E$ élt. Mivel G háromszögmentes, így $d(x) + d(y) \leq n$.

Így $H = G - \{x, y\}$ háromszögmentes $\xrightarrow{\text{indukciós feltevés}} |E(H)| \leq \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor$.

Mivel $xy \in E$, így: $m \leq \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + (n-1) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Sőt, ha $m = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, akkor minden becslésben egyenlőség szerepel, tehát

$d(x) + d(y) = n$, de $N(x)$ és $N(y)$ független ponthalmazok, tehát a gráf páros gráf $\xrightarrow{\text{élszám maximalizálás}} G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. □

Tétel (Mantel, 1907)

Ha G egy háromszögmentes gráf, akkor $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ráadásul, ha $m = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, akkor G egy teljes páros gráf: $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

2. Bizonyítás. Tudjuk, hogy $d(x) + d(y) \leq n$ bármely $xy \in E(G)$ -re. Adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket minden élre:

$$mn \geq \sum_{xy \in E} (d(x) + d(y)) = \sum_{x \in V} d^2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jensen}}}{\geq} n \left(\frac{\sum d(x)}{n} \right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ 2m = \sum_x d(x)}}{=} n \frac{4m^2}{n^2} = 4 \frac{m^2}{n}$$

Az egyenlőség esetén a fokszámok egyenletesek, és bármely élre $d(x) + d(y) = n$, azaz $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ □

Tétel (Mantel, 1907)

Ha G egy háromszögmentes gráf, akkor $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ráadásul, ha $m = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, akkor G egy teljes páros gráf: $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

3. Bizonyítás. Vegyünk egy maximális méretű A független ponthalmazt G -ben. A háromszögmentes tulajdonság miatt bármely v csúcsra $N(v)$ független $\Rightarrow \Delta(G) \leq |A|$. Ekkor $B = V \setminus A$ lefoglalja az összes élt. Ezért:

$$m \leq \sum_{v \in B} d(v) \leq |B| \Delta(G) \leq |B| |A| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{számtani-mértani közép}}}{\leq} \left(\frac{|A| + |B|}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

Az egyenlőség esetén $|B|$ és $|A|$ a lehető legközelebb esik és minden $v \in B$ -nek ugyanannyi a foka, és B is független. Tehát $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. □

Tétel (Mantel, 1907)

Ha G egy háromszögmentes gráf, akkor $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ráadásul, ha $m = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, akkor G egy teljes páros gráf: $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

4. Bizonyítás. Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ egy vektor, amire $\sum x_i = 1$ és $\forall i : 0 \leq x_i \leq 1$. Legyen $f(x) = \sum_{ij \in E} x_i x_j$. Vegyük észre, hogy $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n^2}$.

Bizonyítsuk be, hogy bármely x -re $f(x) \leq \frac{1}{4}$.

Tfh $ij \notin E$ és a j csúcs szomszédain az x_k értékek összege legalább akkora, mint az i csúcs szomszédain a megfelelő összeg, akkor $f(x)$ értéke nem csökken, ha x_i értékét 0-ra csökkentjük, és x_j értékét x_i -vel növeljük.

Következésképp f értéke akkor veszi fel maximumát, ha a nem 0 értékeket egy klikken veszi fel. G háromszögmentes $\rightarrow f(x) = x_i x_j \leq \frac{1}{4}$. □

Mit lehet mondani, ha a kizárt részgráf most nem K_3 , hanem valamilyen $r \geq 3$ -ra K_{r+1} ?

Emlék: r -osztályú gráf fogalma, és a teljes r -osztályú gráf

Állítás

Az r -osztályú gráfok közül annak van a legtöbb éle, ami teljes és az osztályok mérete a lehető legkiegyensúlyozottabb.

Bizonyítás. A teljesség nyilvánvaló. Ha az osztályméretek $n_1, n_2, \dots, n_r$, és feltesszük, hogy $n_1 \geq n_2 + 2$, akkor ha áttennénk egy csúcsot az 1-es osztályból a 2-esbe, akkor növekedne az élek száma. Tehát $\forall i, j : |n_i - n_j| \leq 1$. $\square$

Definíció (Turán gráf)

Az n csúcsú, r osztályú **Turán gráf** az az **izomorfia erejéig egyértelmű** teljes r -osztályú gráf, amiben bármely két osztály mérete legfeljebb 1-el tér el egymástól. Jelölése: $T(n, r)$, és élszámát $t(n, r)$ jelöli.

Vegyük észre, hogy a Mantel tételbeli $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ gráf éppen a $T(n, 2)$ Turán gráf.

Hány éle van a $T(n, r)$ Turán gráfnak?

Ha $r | n$, akkor $t(n, r) = (1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2}$, de a nagyságrend ugyanekkora általában is.

Tétel (Turán, 1941)

Ha az n csúcsú G gráf **nem tartalmaz K_{r+1} -et** részgráfként, akkor legfeljebb annyi éle lehet, mint a $T(n, r)$ Turán gráfnak, azaz $m \leq (1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2}$. Sőt, ha G -nek éppen annyi éle van, mint a Turán gráfnak, akkor G maga a Turán gráf.

Tétel (Turán, 1941)

Ha az n csúcsú G gráf **nem tartalmaz K_{r+1} -et** részgráfként, akkor legfeljebb annyi éle lehet, mint a $T(n, r)$ Turán gráfnak, azaz $m \leq (1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2}$. Sőt, ha G -nek éppen annyi éle van, mint a Turán gráfnak, akkor G maga a Turán gráf.

Erdős Pál bizonyítása: Megmutatjuk, hogy G csúcsain van olyan r -osztályú H gráf, amire $d_G(v) \leq d_H(v)$ minden $v \in V$ -re. $\implies E(G) \leq E(H) \leq t(n, r)$

Legyen v egy maximális fokú csúcs és legyen $X = V(G) \setminus N(v)$. Készítsünk egy G_v gráfot a következő módon:

- töröljük ki az X -en belüli éleket
- húzzuk be az összes élt X és $N(v)$ között
- az $N(v)$ -n belüli éleken ne változtassunk

Bizonyítás (folyt.) G_v -ben továbbra sincs K_{r+1} , mert akkor lenne $N(v)$ -ben K_r .

De minden csúcs fokszáma legalább akkora G_v -ben, mint G -ben volt!

Ezután $N(v)$ által feszített részgráfon folytatjuk ugyanezt a folyamatot, hiszen az K_r -mentes. r szerinti indukciót alkalmazva az $N(v)$ csúcshalmazon van olyan H_v $(r-1)$ -osztályú gráf, amiben a csúcsok fokszámai legalább akkorák, mint a G gráf $N(v)$ -re való megszorításában. Ekkor H_v -t vegyük $N(v)$ -n és húzzuk be az összes élt X és H_v között, így kapjuk a kívánt H gráfot. $\square$

Az egyenlőség esete ebből a gondolatmenetből is meggondolható lenne, de most ezt mellőzzük.

Tétel (Turán, 1941)

Ha az n csúcsú G gráf **nem tartalmaz K_{r+1} -et** részgráfként, akkor legfeljebb annyi éle lehet, mint a $T(n, r)$ Turán gráfnak, azaz $m \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$. Sőt, ha G -nek éppen annyi éle van, mint a Turán gráfnak, akkor G maga a Turán gráf.

2. Bizonyítás. n szerinti indukciót alkalmazunk. Az állítás triviálisan teljesül $n = 1, 2, \dots, r$ -re. Tfh, hogy minden n -nél kisebb értékre teljesül az állítás és vegyünk egy n csúcsú G gráfot, ami nem tartalmaz K_{r+1} -et, és a lehető legtöbb éle van.

G **biztosan tartalmaz K_r -et**. Jelölje a K_r -et alkotó csúcsokat: A és a többi csúcsot B . Alkalmazzuk az indukciós feltevést B -re:

$$\implies e_B \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{(n-r)^2}{2}$$

2. Bizonyítás (folyt.). A egy teljes gráf, így $e_A = \binom{r}{2}$.

A B és A közötti élek számát felülről becsülhetjük, hiszen bármely B -beli csúcs legfeljebb $r - 1$ A -beli szomszédal rendelkezhet. $\implies e_{A,B} \leq (n - r)(r - 1)$

Tehát:

$$e(G) = e_A + e_{A,B} + e_B \leq \binom{r}{2} + (n - r)(r - 1) + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{(n - r)^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Ebből az egyenlőség esete is adódik, hiszen B az indukció szerint a $T(n - r, r)$ Turán gráffal izomorf, és minden B -beli csúcsnak pontosan $r - 1$ A -beli szomszédja van G -ben.

Hol helyezkedhetnek el azok a B -beli csúcsok, akik egy $a \in A$ csúccsal nem szomszédosak? $\implies G$ is r -osztályú!



A valószínűségi módszer

Nem konstruktív technika, egzisztenciát bizonyíthatunk vele!

Ötlet: (Erdős Pál a technika úttörője)

- alkossunk egy alkalmas valószínűségi teret
- és ott mutassuk meg, hogy a kívánt tulajdonságú esemény biztosan nem 0 valószínűséggel bekövetkezik. $\implies$ biztosan létezik a célunknak megfelelő tulajdonságú esemény
- vagy a kívánt tulajdonságra fókuszálva vegyünk egy X véletlen változót: pl.: egy véletlen csúcs-/élhalmaz. . . és számoljuk ki a véletlen változó várható értékét $E(X)$. Ekkor létezik olyan esemény, amikor a val. változó értéke legalább $E(X)$, és olyan is létezik amikor az értéke legfeljebb $E(X)$.

Állítás (A valószínűség megszámlálhatóan szubadditív)

Legyen $A_1, A_2, \dots$ egy véges vagy akár megszámlálhatóan végtelen halmaza eseményeknek. Ekkor

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Állítás (A várható érték linearitása)

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ véletlen változók. Ekkor

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

Tétel

Tetszőleges n csúcsú G gráfra teljesül, hogy $\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)} \geq \frac{n^2}{n^2 - 2e(G)}$.

Bizonyítás. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Az $[n]$ halmaz tetszőleges π permutációjára tekintsük a következő $C(\pi)$ -vel jelölt klikket: $v_{\pi(i)} \in C(\pi)$ pontosan akkor, ha $v_{\pi(i)}$ minden $v_{\pi(j)}$ -vel szomszédos $j < i$ esetén.

$\implies C(\pi)$ egy klikk

A π permutáció véletlenszerű választása esetén határozzuk meg a $|C(\pi)|$ várható értéket! (nehéznek tűnik $\implies$ indikátorváltozók + várható érték linearitása)

Jelölje X_i annak az eseménynek az indikátor változóját, hogy $v_i \in C(\pi)$. Ekkor

$|C(\pi)| = \sum_{i=1}^n X_i$. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(v_i \in C(\pi))$ értéket!

Bizonyítás (folyt). $v_i \in C(\pi)$ pontosan akkor következik be, ha a v_i -vel nem szomszédos csúcsok mindegyike v_i után jelenik meg a π permutációban.

Vagyis a π permutációban a v_i és az $n - d(v_i) - 1$ nem-szomszédjának sorrendjében v_i az első, és ennek a valószínűsége $\frac{1}{n-d(v_i)}$ tehát:

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(v_i \in C(\pi)) = \frac{1}{n-d(v_i)}.$$

Innen a várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(|C(\pi)|) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d(v_i)}$$

Tehát biztosan létezik olyan π permutáció, amire $|C(\pi)| \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d(v_i)}$, és $C(\pi)$ egy klikk, amivel az első részt igazoltuk. □

Tétel

Tetszőleges n csúcsú G gráfra teljesül, hogy $\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)} \geq \frac{n^2}{n^2-2e(G)}$.

Bizonyítás (folyt). A második egyenlőtlenséghez vegyük észre, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a pozitív valós számok halmazán konvex, így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget!

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d(v_i)} \underset{\substack{\geq \\ \text{Jensen}}}{\geq} n \cdot \frac{1}{n-\bar{d}(G)} = \frac{n^2}{n^2-n \cdot \bar{d}(G)} = \frac{n^2}{n^2-2e(G)}.$$

□

Következmény

A Turán tételben szereplő egyenlőtlenség innen egyből adódik.