

Differenciál- és integrálszámítás

(Tételjegyzék 2009/2010 II. félév)

- 1) Függvények összetételének differenciálhatósága
- 2) Inverz függvény differenciálhatósága. Példák: $\arcsin x$, $\arctan x$ deriváltjai
- 3) $\sin x$, $\log |x|$, e^x deriváltjai
- 4) Középérték-tételek (az egyik bizonyítása)
- 5) f monotonitásának jellemzése a különbségihányados-függvénnyel és f' -vel (szükséges és elégs. feltételek; mindkét irányból egyet biz.)
- 6) f szélsőértékének jellemzése f' és f'' segítségével (szükséges és elégs. feltételek; mindkét irányból egyet biz.)
- 7) L'Hospital szabály (bizonyítás nélkül). Példák: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$, $n \in N$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n x}{x}$, $n \in N$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$
- 8) Példák olyan függvénysorozatokra, ahol $f_n \rightarrow f$, f_n differenciálhatók, de f nem; illetve $f_n \rightarrow f$, f_n és f differenciálhatók, de $f'_n \not\rightarrow f'$
- 9) Hatványsorok tagonkénti differenciálása (bizonyítás nélkül); $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$ összegfüggvénye; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$ sor összege
- 10) Taylor formula és hibatagja (bizonyítás nélkül); e^x Taylor formulája 0 körül, a hibatag becslése
- 11) e^x , $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$ függvények Taylor sorai (előállítják-e a függvényt?)
- 12) Példa függvényre, amelyet a Taylor sora nem állít elő
- 13) Helyettesítéssel való integrálás és a parciális integrálás formulái primitív függvényre (az egyik bizonyítása)
- 14) Rekurzív formulák: $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ és $\sin^n x$ primitív függvényei
- 15) Racionalizáló helyettesítések. $R(\sin x, \cos x)$ alakú függvények primitív függvénye
- 16) Az alsó és felső összegek tulajdonságai
- 17) Az alsó és felső integrálok definíciója, összehasonlításuk. A Riemann féle integrál
- 18) $\int_a^b x dx$ kiszámítása definíció szerint
- 19) Az oszcillációs kritérium
- 20) Integrálható függvények szorzatának és hányadosának integrálhatósága
- 21) Integrálható függvények abszolútértékének integrálhatósága és az integrál becslése
- 22) A monoton függvények integrálhatók

23) A folytonos függvények integrálhatók

24) Az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q > 0, p, q \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény integrálhatósága a $[0, 1]$ intervallumon

25) Newton-Leibniz formula

26) Az integrálfüggvény folytonossága

27) Az integrálfüggvény és a primitív függvény kapcsolata. Példák

28) A helyettesítéses és a parciális integrálás formulái Riemann integrálra (az egyik bizonyítása)

29) Példák olyan függvénysorozatokra, ahol $f_n \rightarrow f$, f_n integrálhatók, de f nem; illetve $f_n \rightarrow f$, f_n és f integrálhatók, de $\int_a^b f_n dx \not\rightarrow \int_a^b f dx$

30) Hatványsorok tagonkénti integrálása (bizonyítás nélkül); $\arctan x$ hatványsora

31) Az improprius integrál definíciójának alapesetei. Példák

32) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ improprius integrál létezése

33) A sorokra vonatkozó integrálkritérium

34) Görbeív alatti terület $y = f(x)$ alakban, zárt görbe által határolt terület $x = x(t)$, $y = y(t)$ alakban illetve $r = r(\phi)$ alakban

35) Forgástest térfogata $y = f(x)$ alakban és $x = x(t)$, $y = y(t)$ alakban

36) Rektifikálható görbe ívhossza; az ívhossz kiszámítása $y = f(x)$ alakban és $x = x(t)$, $y = y(t)$ alakban illetve $r = r(\phi)$ alakban

37) Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

38) Bernoulli féle differenciálegyenlet és a homogén fokszámú egyenlet

39) Lineáris függőség és Wronski determináns

40) Homogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek megoldáshalmazának szerkezete

41) Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek (általános megoldás szerkezete)

42) Inhomogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek (általános megoldás szerkezete, konstans-variációs módszer)

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

A differenciálhányados fogalma, geometriai jelentése és kapcsolata a folytonossággal; a differenciálás műveleti szabályai, elemi függvények deriváltjai. A konvexség fogalma és jellemzése különbségihányados függvénnyel és f' illetve f''

segítségével. A derivált függvény Bolzano- Darboux tulajdonsága. Az integrálszámítás alaptétele. A Taylor sor. A primitív függvény fogalma; a primitiválhatóság (szüks./elégs.) feltételei. A primitív függvény keresésének tanult módszerei.

Integrálközelítő összegek; Riemann-összegek; Darboux tétele. Riemann kritérium. Az integrál linearitása; tulajdonságai. Integrálhatóság részintervallumon, $\int_b^a f$ és $\int_a^a f$ definíciója, intervallum szerinti additivitás. Az integrálfüggvény differenciálhatósága. Egyenletesen konvergens függvénysorozatok integrálhatósága. Improprius integrál általános fogalma. Cauchy-féle és majoráns kritériumok improprius integrálra.

Terület, ívhossz, forgástest térfogata és palástfelszíne fogalma és kiszámításuk ($y = f(x)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $r = r(\varphi)$ alakban adott görbék esetei).

Differenciálegyenlet, iránymező, általános és szinguláris megoldás. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Lineáris függőség. Az elsőrendű differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitástétele.

2010. május 12.