**Szegedi Tudományegyetem**

**Matematikai Tanszékcsoport**

**Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék**

# Állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek globális dinamikája

Diplomamunka

*Készítette:*
**Bartha Ferenc Ágoston**
matematikus szakos hallgató
V. évfolyam

*Témavezető:*
**Dr. Krisztin Tibor**
tanszékvezető
egyetemi tanár

Szeged
2008

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

A természet jelenségeinek matematikai leírásánál gyakran használunk differenciálegyenleteket.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

A késleltetés megjelenése azt jelenti, hogy az egyenlet jobboldala nem csak a vizsgált mennyiség aktuális értékétől függ, hanem egyes múltbeli érték(ek)től is.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - r_1), \dots, (x(t - r_n)))$$

Mindez azt a gondolatot tükrözi, hogy minden fizikai hatás véges sebességgel terjed. Azonban, ha ez a sebesség még mindig nagyságrendekkel nagyobb a vizsgált jelenség tartományában előfordulóknál, akkor a késleltetés elhanyagolhatónak tekinthető és közönséges differenciálegyenlettel is kielégíthetően leírhatjuk a problémát.

A mai modern világban viszont egyre több olyan jelenséget ismertünk meg, mind a technológia, biológia és a gazdaság terén, melyeknél a késleltetést már nem lehet elhanyagolni. Ennek is köszönhető, hogy az utóbbi félszázadban nagyon sokat vizsgálták ezen differenciálegyenletek elméletét.

A lehetséges késleltetésnek két fő fajtáját kell megkülönböztetnünk, ez pedig a konstans, illetve az úgynevezett állapotfüggő késleltetés. Az utóbbi esetben a késleltetés aktuális értéke függhet akár $x(t)$ aktuális értékétől, vagy annak egy $t$-t megelőző korlátos, vagy akár nem korlátos szakaszától. Az ilyen jellegű egyenletek tanulmányozása egészen Poisson idejéig nyúlik vissza.

A dolgozatunkban a következő késleltetett differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - r)) \tag{1.1}$$

ahol $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $K > 0$, $r = r(x,t) = r(x|_{[t-K,t]})$. Háromféle állapotfüggő késleltetést fogunk tekinteni és a megoldások aszimptotikus viselkedését fogjuk vizsgálni. Ehhez bizonyítjuk egy úgynevezett globális attraktor létezését, amelynek a dinamikája meghatározó egy általános megoldás aszimptotikus viselkedésében. A dolgozatunk végső célja az attraktor Morse-felbontásának az elvégzése, amelynek köszönhetően a dinamika megértéséhez elegendő a Morse-halmazok vizsgálata is.

Mallet-Paret [3]-ban tanulmányozta az

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - 1))$$

konstans késleltetésű differenciálegyenletet, ahol $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és teljesíti a negatív visszacsatolást a második változóban. [2]-ben hasonló egyenletre határoztak meg Morsefelbontást, gyengítve a feltevést $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$-re. A mi dolgozatunk ezen kettő gondolatmenetét követi. Az állapotfüggő késleltetés több kisebb és nagyobb nehézséget is felvet majd. [1]-ben egy hasonló modell tulajdonságait vizsgálták $r(x(t))$ állapotfüggő késleltetés mellett. Az ebben a munkában leírt eredmények nagyban segítették az előbb említett nehézségek kiküszöbölését.

A [7]-ben bevezetett $\mathcal{A}$ globális attraktor egy összefüggő, kompakt, invariáns részhalmaza az engedélyezett kezdeti függvények terének, mely annak minden korlátos részhalmazát vonzza. Ennek végezzük el egy úgynevezett Morse-felbontását, melyet először [8]-ban definiáltak. Ez nem más, mint $\mathcal{A}$ kompakt, invariáns részhalmazainak egy véges, rendezett sorozata:

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_M,$$

melyre igaz, hogy minden az egész egyenesen értelmezett korlátos megoldáshoz $\exists N \geq K$ úgy, hogy $\alpha(x) \subset S_N$ és $\omega(x) \subset S_K$. A Morse-halmazok és az őket összekötő pályák kiadják a globális attraktort.

Tekintsük most (1.1)-et és tegyük fel, hogy teljesülnek a következők:

- (H1) $yf(0, y) < 0$, ha $y \neq 0$. Azaz negatív visszacsatolás a második változóban.
- (H2) a disszipativitási tulajdonság, azaz $\exists\, r_0 > 0$ :

  $f(x, y) < 0$ minden olyan $(x, y) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq r_0, |v| \leq u\}$

  $f(x, y) > 0$ minden olyan $(x, y) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq -r_0, |v| \leq -u\}$
- (H3) $r : D_r \subseteq C([-K,0], \mathbb{R}) \to [0, K]$ folytonos függvény, amely

  $$C = C_{L_0}([-K,0], [-r_0, r_0])\text{-on}$$

  $L_r$-Lipschitz folytonos. Ezek a megfelelő intervallumon értelmezett korlátos értékű, $L_0$ Lipschitz-konstanssal Lipschitz-folytonos függvények a szuprémum normával. Továbbá $r(\mathbf{0}) = 1$.

Legyen

- $L_0 = \sup\{|f(x, y)| : |x|, |y| \leq r_0\}$,
- $L_1 = \sup\{|Df(x, y)| : |x|, |y| \leq r_0\}$,
- $C_1([a, b], \mathbb{R})$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvények tere, a szokásos $C_1$ normával, azaz, ha $x \in C_1([a, b], \mathbb{R})$, akkor

  $$\|x\|_{C_1([a,b],\mathbb{R})} = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t)|.$$

# 2. A fázistér és a globális attraktor

## A fázistér és függvények szakaszai

Legyen $x(t - r(x|_{[t-K,t]})) = x(\eta_x(t))$, azaz $\eta_x(t) = t - r(x|_{[t-K,t]})$. A későbbiekben $\eta_x(t)$-ből, ha az nem okoz félreértést az alsó indexet elhagyjuk és egyszerűen $\eta(t)$-ként hivatkozunk rá. Azaz $z(\eta(t))$ mindig $z(\eta_z(t))$-t jelent.
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, és

$$\begin{aligned} x &: I + [-K,0] \to \mathbb{R}, \\ y &: I + [-K,0] \to \mathbb{R}, \\ z &: I + [-1,0] \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ekkor definiáljuk a következőket:

$$\left.\begin{array}{ll} x_t : [-K,0] \to \mathbb{R} & \text{, hogy } x_t(s) = x(t+s) \\ y_{t,\eta} : [\eta_y(t) - t,0] \to \mathbb{R} & \text{, hogy } y_{t,\eta}(s) = y(t+s) \\ z_{t,1} : [-1,0] \to \mathbb{R} & \text{, hogy } z_{t,1}(s) = z(t+s) \end{array}\right. \quad \text{, ha } t \in I.$$

Ekkor $x(t - r) = x(t - r(x_t))$ formában is írható.

A fázistérnek a $C = C_{L_0}([-K,0], [-r_0, r_0])$ teret választjuk a szuprémum normával. A kezdeti függvények Lipschitz-folytonossága és $r$ Lipschitz-tulajdonsága miatt minden $\varphi \in C$ kezdeti függvényhez létezik $\alpha \in (0, \infty]$ és egyetlen nem folytatható megoldás: $x : [-K, \alpha) \to \mathbb{R}$, ami teljesíti (1.1)-et $(0, \alpha)$-n és $x_0 = \varphi$ (lásd [1]).
Ezt a megoldást $x^\varphi$-vel jelöljük. A kezdeti adatoktól való függés a következő módon teljesül: $\varphi \in C$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta > 0 : |x^\psi(s) - x^\varphi(s)| < \varepsilon$, minden $\psi \in C$ esetén, melyre $\|\psi - \varphi\| < \delta$, $s \in [-K, t]$-re.
Ha $\varphi \in C$ és $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - nem feltétlen egyértelmű - megoldása (1.1)-nek az egész számegyenesen, $x_0 = \varphi$, akkor is alkalmazzuk az $x = x^\varphi$ jelölést. Továbbá, ha egy ilyen $x = x^\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos megoldás, akkor ezt $x \rightleftharpoons \varphi$, illetve $x^\varphi \rightleftharpoons \varphi$-vel jelöljük.

**2.1. Lemma.** *Ha $x : [-K, \alpha) \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely teljesíti (1.1)-et $t > 0$-ra, akkor $\sup_{t \in [0,\alpha)} \|x_t\| \leq \max\{r_0, \|x_0\|\}$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\exists\, \delta > 0$, $t \in [0, \alpha) : \|x_t\| > \max\{r_0, \|x_0\|\} + \delta$. Ekkor $\exists\, t_0 > 0$ minimális, hogy $|x(t_0)| = \max\{r_0, \|x_0\|\} + \delta$. Tegyük fel, hogy $x(t_0) > 0$. Így $\dot{x}(t_0) \geq 0$, mivel $t_0$ minimális. Ugyanakkor $|x(\eta(t_0))| < \max\{r_0, \| x_0\|\} + \delta = x(t_0)$, így $f$ disszipatív tulajdonsága miatt $\dot{x}(t_0) = f(x(t_0), x(\eta(t_0))) < 0$, ami ellentmondás. $x(t_0) < 0$ esetén hasonlóan járhatunk el. $\square$

**2.2. Következmény.** *Legyen $\varphi \in C$, $x = x^{\varphi} : [-K, \alpha) \to \mathbb{R}$ nem folytatható megoldása (1.1)-nek. Ekkor $\alpha = \infty$. Továbbá definiálhatjuk az*

$$F : \mathbb{R}^{+} \times C \in (t, \varphi) \mapsto x_t^{\varphi} \in C$$

*folytonos szemidinamikai rendszert. Mivel $f(0,0) = 0$, így $0 \in C$ egyensúlyi helyzete $F$-nek. Bár nincs visszafele egyértelműség, a 0 visszafele is egyértelmű a következő állítás miatt.*

**2.3. Állítás.** *Ha $x : [-K, \infty) \to \mathbb{R}$ megoldása (1.1)-nek, akkor $\exists\, y : [-K, \infty) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\dot{y}(t) = c(t)y(\eta_x(t))$, $t \in (K, \infty)$, és az is teljesül, hogy* $\operatorname{sgn} y(t) = \operatorname{sgn} x(t)$, *$c(t) < 0$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\beta(t) = \int_0^1 f_x'(sx(t), x(\eta(t)))\ ds$ és $\gamma(t) = \int_0^1 f_y'(0, sx(\eta(t)))\ ds$, ha $t \geq 0$. Ekkor mivel $x(t)$ (1.1) megoldása, ezért

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(\eta(t))) = \beta(t)x(t) + \gamma(t)x(\eta(t)).$$

Igaz, hogy $\beta(t), \gamma(t)$ folytonosak. Továbbá $\gamma(t) < 0$, amiatt, hogy $\gamma(t) = B$,
ha $x(\eta(t)) = 0$ és az egyenlet a második változóban negatív visszacsatolású. Legyen

$$y(t) = \exp\left(-\int_0^t \beta(s)\ ds\right) x(t),\ t \geq 0.$$

Ekkor $\operatorname{sgn} y(t) = \operatorname{sgn} x(t)$, illetve

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \exp\left(-\int_0^t \beta(s)\ ds\right)\dot{x}(t) - \beta(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\ ds\right)x(t)\\
&= \exp\left(-\int_0^t \beta(s)\ ds\right)(\beta(t)x(t) + \gamma(t)x(\eta(t))) - \beta(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\ ds\right)x(t)\\
&= \gamma(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\ ds\right)x(\eta(t)) = c(t)y(\eta_x(t)), \text{ ha } t \geq K,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ahol $c(t) = \gamma(t)\exp\left(-\int_{\eta_x(t)}^t \beta(s)\ ds\right) < 0$. $\square$

## A globális attraktor

**2.4. Definíció.** *Globális attraktornak nevezzük az olyan $\mathcal{A} \subset \mathrm{C}$ részhalmazt, mely kompakt, invariáns, azaz $F(t, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $t \geq 0$ és vonzza $C$ összes korlátos részhalmazát, azaz $\forall B \subset C$ korlátosra és $\forall U \supset \mathcal{A}$ nyíltra $\exists\, t \geq 0 : F([t, \infty) \times B) \subset U$.*

**2.5. Állítás.** *Létezik $\mathcal{A}$ összefüggő, kompakt, globális attraktor.*

*Bizonyítás.* Mivel a fázistér kompakt és a megoldások az egész pozitív félegyenesen értelmezettek, így $F(t,.)$ korlátos és pont-disszipatív. Így alkalmazva a 4.1.2-es tételt [7]-ből, kapjuk $\mathcal{A}$ létezését. □

**2.6. Állítás.** $\mathcal{A} = \{\varphi \in C : \exists x$ *korlátos megoldása (1.1)-nek,* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = \varphi\} =: B$.

*Bizonyítás.* Legyen $\varphi \in B$, ekkor $\exists x \rightleftharpoons \varphi$, és legyen $X = \{x_t : t \in \mathbb{R}\}$. Nyilvánvaló, hogy $F(t, X) = X$, $t \geq 0$ és az is, hogy $X$ korlátos. Emiatt minden $U \supset \mathcal{A}$ nyíltra igaz, hogy $X \subset U$. $\mathcal{A}$ zártsága implikálja, hogy $X \subset \mathcal{A}$, azaz $B \subset \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ kompaktsága és invarianciája miatt $\mathcal{A} \subset$ B. □

Ha egy $\varphi \in C$ esetén $x^\varphi$ korlátos megoldás, mely teljesíti, hogy $x_0 = \varphi$, akkor

$$\omega(\varphi) = \{\psi \in C : \text{ létezik } (t_n)_0^\infty \subset \mathbb{R}^+, \text{ ahol } t_n \to \infty \text{ és } x^\varphi_{t_n} \to \psi, \text{ amint } n \to \infty\}$$

nemüres, kompakt, összefüggő, invariáns abban az értelemben, hogy $\forall \psi \in \omega(\varphi)$ létezik egy $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldás, melyre $x_0 = \psi$ és $x_t \in \omega(\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$.
Egy korlátos $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásra legyen

$$\alpha(x) = \{\psi \in C : \text{ létezik } (t_n)_0^\infty \subset \mathbb{R}, \text{ ahol } t_n \to -\infty \text{ és } x_{t_n} \to \psi, \text{ amint } n \to \infty\}$$

ez a limeszhalmaz szintén nemüres, kompakt, összefüggő és invariáns.

**2.7. Állítás.** *Minden* $x : [-K, \infty) \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvényre, mely teljesíti (1.1)-et* $(0, \infty)$*-en, létezik* $t_0 \geq 0$ *olyan, hogy* $x_s \in C$, $\forall s \geq t_0$.

*Bizonyítás.* A 2.1 Állítás miatt látható, hogy $x$ szükségképpen korlátos. Legyen $l = \overline{\lim}_{t\to\infty}|x(t)|$. Ha $l < r_0$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, és $l = \overline{\lim}_{t\to\infty}x(t)$. Ekkor $f$ disszipatív tulajdonsága miatt $\exists\, \delta > 0$ :

$$f(x, y) < -\delta, \text{ ha } (x, y) \in [l - \delta, l + \delta] \times [-l - \delta, l + \delta].$$

$l$ definíciójából következően $\exists\, T > 0 : x(s) \leq l + \delta$, $\forall s \geq T$.

Állítjuk, hogy $\exists\, t : \eta_x(t) \geq T$, $x(t) < l - \delta$. Ha ilyen nem lenne, akkor $\dot{x}$ végig $-\delta$ alatt maradna és így ellentmondáshoz jutnánk. Tehát ilyen $t$ létezik. Viszont ekkor

$$x(s) < l - \delta,\, s \geq t$$

adódik, hiszen, ha egy $s \geq t$ esetén $x(s) = l$ lenne először $t$ után, akkor ott, egyrészt mivel $x$ növekszik, $\dot{x}(s) \geq 0$, másrészt $\delta$ választása miatt $\dot{x}(s) < 0$. Tehát $x(s) < l - \delta$, $s \geq t$ valóban, azonban ez ellentmond $l$ definíciójának.

$l = \overline{\lim}_{t\to\infty}(-x(t))$ esetben analóg érvelés alkalmazható. □

**2.8. Állítás.** *Ha $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egész egyenesen értelmezett korlátos folytonosan differenciálható függvény, mely teljesíti (1.1)-et $\mathbb{R}$-en, akkor $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| \leq r_0$.*

*Bizonyítás.* Mivel $x(t)$ korlátos, ezért létezik $K_x > 0$, hogy $|x(t)| < K_x$. Tegyük fel indirekten, hogy $K_x > r_0$. A 2.7 Állításban látotthoz hasonlóan, ha $s \in [r_0, K_x]$, akkor létezik $\delta(s)$ olyan, hogy

$$f(x, y) < -\delta(s), \text{ ha } (x, y) \in (s - \delta(s), s + \delta(s)) \times (-s - \delta(s), s + \delta(s)) = T_+(s)$$

illetve

$$f(x, y) > \delta(s), \text{ ha } (x, y) \in (-s - \delta(s), -s + \delta(s)) \times (-s - \delta(s), s + \delta(s)) = T_-(s)$$

Ekkor

$$T(s) = T_+(s) \cup T_-(s),\ s \in [r_0, K_x]$$

nyílt fedése a kompakt

$$T = \{(x, y) : K_x \geq |x| \geq \max\{r_0, |y|\}\}\text{-nak.}$$

Emiatt létezik: $s_1, \dots s_n$ véges sok index, hogy $T_s = \bigcup_{i=1}^n T(s_i) \supset T$. Legyen

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \sup\{\kappa > 0 : |t| \in [r_0, K_x] \text{ esetén } (t, |t| + \kappa), (t, -|t| - \kappa) \in T_s\}$$

illetve $\delta = \min_{1\leq i\leq n}\{\delta(s_i), \delta_0\}$. Erre igaz, hogy minden

$$(x, y) : \{|x| \in [r_0, K_x], |y| \in [0, |x| + \delta]\} \text{ esetén } |f(x, y)| > \delta.$$

Legyen $t_0$ olyan, hogy $r_0 < \|x_{t_0}\| \leq K_1 \leq K_x$. Ilyenkor igaz, hogy

$$|x(t)| < K_1 - \delta, \text{ ha } t > t_0 + 1.$$

Hiszen, ha $t \geq t_0$ olyan, hogy $|x(t)| \geq K_1 - \delta$, akkor mivel $|x(\eta(t))| \leq K_1$ a 2.1 Állítás miatt, így

$$\dot{x}(t) < -\delta, \text{ ha } x(t) > 0 \text{ és } \dot{x}(t) > \delta, \text{ ha } x(t) < 0.$$

Ezért létezik $s_0 \in [t_0, t_0 + 1)$, hogy $|x(s_0)| < K_1 - \delta$ és a 2.7 Állításnál alkalmazott érveléssel bizonyítható, hogy minden $s > s_0$ esetén $|x(s)| < K_1 - \delta$.

Összegezve azt kaptuk, hogy, ha a $x$ egy szakaszán a maximum nagyobb mint $r_0$, akkor $1$ egységnyi idő alatt a függvény véglegesen az előző (maximum - $\delta$) alá csökken. Így az $(r_0, K_x]$ abszolutértékekről véges (csak $K_x$-től függő) idő alatt lecsökken $x$ nagysága $r_0$ alá. Mivel a függvényünk az egész egyenesen értelmezett, így nem lehet, hogy bárhol is meghaladja az $r_0$ abszolutértéket, mert figyelembe véve az azt megelőző véges ($K_x$-től függő hosszúságú) szakaszát és, hogy végig a $K_x$ korlát alatt marad, ellentmondásra jutunk. $\square$

## A hozzárendelt lineáris egyenlet

$F$-hez, és (1.1)-hez természetes módon hozzárendelünk egy lineáris, konstans késleltetésű differenciálegyenletet (lásd [6]):

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + By(t-1), \tag{2.2}$$

ahol

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|_{(x,y)=(0,0)},\ B = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|_{(x,y)=(0,0)} \tag{2.3}$$

és $y_0 = \varphi$. Ekkor (H4) $B < 0, A + B < 0$ feltételek mellett a (2.2)-hoz tartozó $(T(t))_{t\geq 0}$ folyam generátorának spektruma komplex konjugált pár sajátértékekből áll. Legyen $M^*$ a nem negatív valós részű sajátértékek száma. Továbbá, legyen

$$N^* = \begin{cases} M^*, & \text{ha 0 hiperbolikus,} \\ M^* + 1, & \text{különben.} \end{cases}$$

# 3. A késleltetések

Az egyenletünket háromfajta késleltetéssel vizsgáljuk. $r$ mindig egy $K$ hosszú szakasztól függ, azonban ezt két jelöléssel is kifejezzük: $r(x_t) = r(x,t)$ de ugyanazt értjük alatta.

## A threshold késleltetés

Több helyen is találkozhatunk az úgynevezett *threshold* késleltetéssel, például fertőzések, immunválaszok modellezésénél, ahol a késleltetés abból a szükséges időből adódik, amíg a fertőzés, vagy az antigén koncentráció eléri a megfelelő szintet a szervezetben (lásd [9], [10]). Iterálva a késleltetést, annak deriváltja korlátos lesz és ez kulcsfontosságú a később bevezetett előjelszámláló funkcionálnak az attraktoron való korlátosságának a bizonyításánál. A mi esetünkben a következő módon adjuk meg:

$$\int_{t-r}^{t} a(x(s))\,ds = 1, \tag{3.1}$$

ahol

- $a(.) > 0$ folytonos függvény,
- $a(0) = 1$.

Legyen

$$K = \sup_{y\in[-r_0,r_0]} \frac{1}{a(y)}.$$

Mivel $a$ folytonos, $K > 0$ véges. Így $C$-n $r$ jól definiált. $a$ pozitivitása implikálja, hogy $t - r(x,t)$ $t$-ben monoton növekvő.

**3.1. Lemma.** *Ha $t_n, t \in \mathbb{R}$ és $x^n, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldások az egész egyenesen, $n \in \mathbb{N}$ és $|t_n - t| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x^n_t - x_t\| \to 0$, amint $n \to \infty$, akkor $r(x^n, t_n) \to r(x,t)$, ahogy $n \to \infty$.*

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned}
0 = 1 - 1 &= \int_{t_n - r(x^n,t_n)}^{t_n} a(x^n(s))\ ds - \int_{t-r(x,t)}^{t} a(x(s))\ ds = \\
&= \int_{t_n - r(x^n,t_n)}^{t_n} a(x^n(s))\ ds - \int_{t-r(x,t)}^{t} a(x^n(s))\ ds + \int_{t-r(x,t)}^{t} a(x^n(s))\ ds - \\
&- \int_{t-r(x,t)}^{t} a(x(s))\ ds = \int_{t}^{t_n} a(x^n(s))\ ds + \int_{t_n - r(x^n,t_n)}^{t-r(x,t)} a(x^n(s))\ ds + \\
&+ \int_{t-r(x,t)}^{t} (a(x^n(s)) - a(x(s)))\ ds
\end{aligned}$$

Az első integrált vizsgálva:

$$\left|\int_t^{t_n} a(x^n(s))\ ds\right| \leq |t_n - t| \max\{|a(x^n(s))| : s \in \mathbb{R}\} \to 0, \text{ amint } n \to \infty.$$

Hasonlóan a harmadikra:

$$\left|\int_{t-r(x,t)}^{t} (a(x^n(s)) - a(x(s)))\ ds\right| \leq r(x,t) \max_{s\in[t-r(x,t),t]} |a(x^n(s)) - a(x(s))| \to 0,$$

ha $n \to \infty$, mivel az $a$ folytonos függvény kompakt intervallumon egyenletesen folytonos. Következésképpen

$$\int_{t_n - r(x^n,t_n)}^{t-r(x,t)} a(x^n(s))\ ds \to 0, \text{ amint } n \to \infty.$$

Létezik $\xi_n \in [t - r(x,t), t_n - r(x^n, t_n)]$, melyre

$$\int_{t_n - r(x^n,t_n)}^{t-r(x,t)} a(x^n(s))\ ds = (t - t_n + r(x^n, t_n) - r(x,t))a(x^n(\xi_n)) =$$

$$= (t - t_n)a(x^n(\xi_n)) + (r(x^n, t_n) - r(x,t))a(x^n(\xi_n)).$$

Az összeg első tagja ismételten tart 0-hoz, hiszen

$$|(t - t_n)a(x^n(\xi_n))| \leq |t - t_n| \max\{|a(x^n(s))| : s \in \mathbb{R}\} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Emiatt kapjuk, hogy $(r(x^n, t_n) - r(x,t))a(x^n(\xi_n)) \to 0$, ha $n \to \infty$, ebből pedig:

$$0 \leftarrow |(r(x^n, t_n) - r(x,t))a(x^n(\xi_n))| \geq |(r(x^n, t_n) - r(x,t))| \min\{|a(x^n(s))| : s \in \mathbb{R}\},$$

azaz

$$|(r(x^n, t_n) - r(x,t))| \to 0, \text{ amint } n \to \infty.$$

□

## A vezérlési probléma

A vezérlési probléma modelljében egy egyenesen mozgó robot próbálja megtalálni az origót és $-w$-nél egy fal található, $w > 0$. A robot a fal irányába jelet sugároz és a visszaverődött hullám alapján becsüli helyzetét. A késleltetés abból adódik, hogy a $t$ pillanatban érkező jel egy korábbi állapotról hordoz információt:

$$cr = |x(t - r) + w| + |x(t) + w|. \tag{3.2}$$

Általában az egyenlet a következő formájú:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - r)) = g\left(\frac{x(t) + x(t - r)}{2}\right)$$

valamely $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvényre.

Legyen $K = \frac{2r_0+2w}{c} > 0$. Tegyük fel, hogy

- $c > 0$ "nagy" (fénysebesség),
- $L_0 < c$.

$g$-re így a következő feltételek adódnak:

- $xg(x) < 0$,
- $\sup\{|g(x)| : |x| \leq r_0\} < c$.

**3.2. Lemma.** *Ha $\varphi \in C$, akkor $r$ jól definiált.*

*Bizonyítás.* Legyen $R = \{t \in [0, K] : ct = |\varphi(0) + w| + |\varphi(-t) + w|\}$. Mivel $c0 = 0 \leq |\varphi(0) + w| + |\varphi(0) + w|$ és $cK = 2r_0 + 2w \geq |\varphi(0) + w| + |\varphi(-K) + w|$ és a két oldal folytonosan változik $[0, K]$-n, $R$ nemüres. Most tegyük fel, hogy $t_1, t_2 \in R$. Ekkor

$$c|t_1 - t_2| = |\varphi(-t_1) + w| - |\varphi(-t_2) + w| \leq |\varphi(-t_1) - \varphi(-t_2)| \leq L_0|t_1 - t_2|.$$

Azonban $L_0 < c$ miatt $t_1 = t_2$, azaz $R$ egy elemű, s így $r$ valóban jól definiált. □

**3.3. Lemma.**

*(i) Ha $t_n, t \in \mathbb{R}$ és $x^n, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldások az egész egyenesen, $n \in \mathbb{N}$ és $|t_n - t| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_t^n - x_t\| \to 0$, amint $n \to \infty$, akkor $r(x^n, t_n) \to r(x, t)$, ahogy $n \to \infty$.*

*(ii) $t - r(x, t)$ monoton nő $t$-ben.*

*Bizonyítás.* Az (i) igazolásához tekintsük a következőt:

$$\begin{aligned}
c|r(x_n, t_n) - r(x, t)| &\leq |x_n(t_n - r(x_n, t_n)) - x(t - r(x, t))| + |x_n(t_n) - x(t)| \leq \\
&\leq |x_n(t_n - r(x_n, t_n)) - x_n(t - r(x, t))| + |x_n(t - r(x, t)) - \\
&- x(t - r(x, t))| + |x_n(t_n) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \leq \\
&\leq L_0|t_n - t + r(x, t) - r(x_n, t_n)| + \|x_n - x\| + L_0|t_n - t| + \|x_n - x\| \leq \\
&\leq 2L_0|t_n - t| + 2\|x_n - x\| + L_0|r(x, t) - r(x_n, t_n)|.
\end{aligned}$$

Amiből kapjuk, hogy

$$|r(x_n, t_n) - r(x, t)| \leq \frac{2(L_0 + 1)}{c - L_0}(|t_n - t| + \|x_n - x\|).$$

(ii) bizonyítása:

Legyen $t_1 > t_2$. Ekkor

$$(t_1 - r(x,t_1)) - (t_2 - r(x,t_2)) = t_1 - t_2 + \frac{|x(t_1) - w|}{c} - \frac{|x(t_2)+w|}{c} + \\ + \frac{|x(t_1 - r(x,t_1)) + w|}{c} - \frac{|x(t_2 - r(x,t_2)) + w|}{c}.$$

Ebből

$$(t_1 - r(x,t_1)) - (t_2 - r(x,t_2)) - \frac{|x(t_1 - r(x,t_1)) + w| - |x(t_2 - r(x,t_2)) + w|}{c} = \\ = t_1 - t_2 + \frac{|x(t_1) + w| - |x(t_2)+w|}{c}.$$

Mivel

$$\left|\frac{|x(t_1)+w| - |x(t_2)+w|}{c}\right| \leq \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{c} \leq \frac{L_0}{c}|t_1 - t_2| < |t_1 - t_2|,$$

ezért az egyenletünk jobb oldalának az előjele az $t_1 - t_2$ előjele, azaz pozitív. A bal oldalon hasonlóan

$$\left|\frac{|x(t_1 - r(x,t_1)) + w| - |x(t_2 - r(x,t_2)) + w|}{c}\right| \leq \frac{|x(t_1 - r(x,t_1)) - x(t_2 - r(x,t_2))|}{c}$$

$$\leq \frac{L_0}{c}|(t_1 - r(x,t_1)) - (t_2 - r(x,t_2))| < |(t_1 - r(x,t_1)) - (t_2 - r(x,t_2))|.$$

Így az előzőek alapján pozitív baloldal előjele nem más mint $(t_1 - r(x,t_1)) - (t_2 - r(x,t_2))$ előjele, ami így pozitív, azaz $t - r(x,t)$ monoton nő $t$-ben. □

**3.4. Lemma.** *Feltehető, hogy a jelsebesség* $2w$.

*Bizonyítás.* Legyen $y(t) = x\left(\frac{2w}{c}t\right)$. Ekkor

$$\dot{y}(t) = \frac{2w}{c} g\left(\frac{x\left(\frac{2w}{c}t\right) + x\left(\frac{2w}{c}t - r(x, \frac{2w}{c}t)\right)}{2}\right) = \frac{2w}{c} g\left(\frac{y(t) + y(t - \frac{c}{2w}r(x, \frac{2w}{c}t))}{2}\right).$$

Legyen $g_1(t) = \frac{2w}{c}g(t)$, és $r_1(y,t) = \frac{c}{2w}r(x, \frac{2w}{c}t)$. Azaz

$$\dot{y}(t) = g_1\left(\frac{y(t) + y(t - r_1)}{2}\right)$$

és

$$cr_1 = \frac{c}{2w}\left[|x(\frac{2w}{c}t - \frac{c}{2w}r) + w| + |x(\frac{2w}{c}t) + w|\right] = \\ = \frac{c}{2w}\left[|y(t - r_1) + w| + |y(t) + w|\right].$$

Ebből kapjuk, hogy

$$2wr_1 = |y(t - r_1) + w| + |y(t) + w|,$$

azaz a transzformált egyenlet ugyanúgy teljesíti a feltételeket, és itt a jelsebesség $2w$. Továbbá $r_1(0,t) = 1$. □

## Lipschitz-folytonos állapotfüggés

$$r = r(x(t)) > 0 \tag{3.3}$$

és $r$ Lipschitz-folytonos egy $L_r$ Lipschitz-konstanssal, azaz

$$|r(a) - r(b)| \leq L_r|a - b|.$$

Tegyük fel továbbá, hogy

- $r$ korlátos: $\exists\, K > 0 : r(a) \leq K$,
- $r(0) = 1$,
- $t - r(x(t))$ monoton növő. (erre elegendő feltétel pl. [1]-ben)

**3.5. Lemma.** *Ha $t_n, t \in \mathbb{R}$ és $x^n, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldások az egész egyenesen, $n \in \mathbb{N}$ és $|t_n - t| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_t^n - x_t\| \to 0$, amint $n \to \infty$, akkor $r(x^n, t_n) \to r(x, t)$, ahogy $n \to \infty$.*

*Bizonyítás.*

$$|r(x_n(t_n)) - r(x(t))| \leq L_r|x_n(t_n) - x(t)| \leq L_r|x_n(t_n) - x_n(t)| + L_r|x_n(t) - x(t)| \leq$$
$$\leq L_r L_0 |t_n - t| + L_r\|x_n - x\| \leq (L_r(1 + L_0))\,(|t_n - t| + \|x_n - x\|)$$

□

# 4. Az előjelváltást számláló $V$ funkcionál

## A funkcionál és alapvető tulajdonságai

Legyen $\varphi \in C(I, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ és $I \supset [a, b]$. Definiáljuk az előjelváltást számláló függvényt a következő módon:

$$sc(\varphi, [a, b]) = 0, \text{ ha } \varphi(s) \geq 0 \text{ vagy } \varphi(s) \leq 0 \text{ minden } s \in [a, b].$$

Különben:

$$\begin{aligned} sc(\varphi, [a, b]) = \sup\{k \in \mathbb{N} : k \geq 1, \exists\, (s^i)_0^k \subset [a, b], \\ s^0 < s^1 < \ldots < s^k, \varphi(s^{i-1})\varphi(s^i) < 0 \text{ minden } 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Legyen

$$\tilde{V}(\varphi, [a, b]) = \begin{cases} sc(\varphi, [a, b]), & \text{ha az páratlan, vagy } \infty, \\ sc(\varphi, [a, b]) + 1, & \text{különben.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Továbbá, ha $z : \mathrm{Dom}(z) \to \mathbb{R}$ folytonos, ahol $\mathrm{Dom}(z) \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum, akkor legyen

$$V(z) := \tilde{V}(z, \mathrm{Dom}(z)). \tag{4.3}$$

Definiáljuk az $[a, b]$-n reguláris függvényosztályt a következő módon:

$$\begin{aligned} H_{[a,b]} = \{\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R}),\ & \varphi(b) \neq 0, \text{ vagy } \varphi(a)\dot{\varphi}(b) < 0, \\ & \varphi(a) \neq 0, \text{ vagy } \dot{\varphi}(a)\varphi(b) > 0, \\ & \varphi \text{ minden zéróhelye egyszeres. } \} \end{aligned} \tag{4.4}$$

$\tilde{V}$ a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

**4.1. Lemma.**

*(i)* *$\tilde{V}$ alulról féligfolytonos, a következő értelemben. Ha $\varphi, \varphi^n$ nem nulla, folytonos függvények rendre $[a, b], [a^n, b^n]$-n és*

$$\max_{s \in [a,b] \cap [a^n, b^n]} |\varphi(s) - \varphi^n(s)| \to 0,\ a^n \to a,\ b^n \to b, \text{ ahogy } n \to \infty,$$

*akkor*

$$\tilde{V}(\varphi, [a, b]) \leq \liminf_{n \to \infty} \tilde{V}(\varphi^n, [a^n, b^n]).$$

*(ii)* *Ha $\varphi \in H_{[a,b]}$, akkor $\tilde{V}(\varphi, [a, b]) < \infty$.*

*(iii)* *Legyen $x : [-K, \infty) \to \mathbb{R}$ megoldása (1.1)-nek. Ekkor $V(x_{t,\eta})$ monoton csökkenő $t \geq 0$ esetén.*

*(iv) Tegyük fel, hogy* $z : [\eta_z(c), d] = I \to \mathbb{R}$ *folytonos,* $(c, d]$*-n differenciálható, és* $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$ *folytonosak úgy, hogy*

$$\dot{z}(t) = a(t)z(t) + b(t)z(\eta(t))$$

*teljesül* $(c, d]$*-n. Ha* $z(t) \neq 0$, $t \in [c, d]$ *és* $\eta^3(t) \in I$ *és* $V(z_{\eta^3(t),\eta}) = V(z_{t,\eta}) < \infty$, *akkor* $z_{t,\eta} \in H_{[-r(z_t),0]}$.

*(v) Ha* $\exists \delta > 0 : \varphi \in C^1([a - \delta, b + \delta], \mathbb{R})$ *és* $\varphi|_{[a,b]} \in H_{[a,b]}$, *akkor* $\exists \gamma \in (0, \delta)$ *olyan, hogy, ha*

$$|a - c| < \gamma,\ |b - d| < \gamma,\ \psi \in C^1([c, d], \mathbb{R}),\ \|\psi - \varphi\|_{C^1([c,d],\mathbb{R})} < \gamma,$$

*akkor*

$$\tilde{V}(\psi, [c, d]) = \tilde{V}(\varphi, [a, b]).$$

*(vi) Legyen* $N \in 2\mathbb{N} + 1$ *és* $a_0, b_0, b_1 > 0$ *pozitív konstansok,* $b_0 \leq b_1$. *Léteznek* $L \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{R}^+$, *olyanok, hogyha* $t_0 \in \mathbb{R}$ *és* $z : [\eta_z^{L+1}(t_0), t_0] \to \mathbb{R}$ *folytonos,* $(\eta^L(t_0), t_0]$*-n differenciálható,* $b : [\eta_z^L(t_0), t_0] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, melyre*

$$b_0 \leq -b(t) \leq b_1,\ |a(t)| \leq a_0,\ \textit{ha}\ t \in [\eta_z^L(t_0), t_0]$$

*és* $\dot{z}(t) = a(t)z(t) + b(t)z(\eta(t))$ *teljesül* $(\eta^L(t_0), t_0]$*-n és* $z_{\eta^L(t_0),\eta} \neq 0$, $V(z_{\eta^L(t_0),\eta}) \leq N$, *akkor igaz, hogy*

$$\|z_{t_0,\eta}\| \geq \frac{1}{k}\|z_{\eta(t_0),\eta}\|.$$

*Bizonyítás.* A bizonyítások megtalálhatóak [1]-ben, itt csak (iii)-at igazoljuk.
Legyen $0 < t_1 < t_2$, célunk belátni, hogy $V(x_{t_1,\eta}) \geq V(x_{t_2,\eta})$. Állítjuk, hogy elegendő azt bizonyítani, hogy

$$\forall t \in [0, \infty) : \exists\, \varepsilon^0(t) > 0 : \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon^0(t)] : V(x_{t,\eta}) \geq V(x_{t+\varepsilon,\eta}). \tag{4.5}$$

Legyen

$$t^* = \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \{t : V(x_{t_1,\eta}) \geq V(x_{s,\eta}) : t_1 \leq s \leq t\}.$$

Az előző állítás szerint $t_2 \geq t^* > t_1$. Válasszunk egy sorozatot a következő módon: $t_1 \leq s^n \nearrow t^*$. Ekkor $V(x_{t_1,\eta}) \geq V(x_{s^n,\eta})$. Használva a $\tilde{V}$ (i) tulajdonságát kapjuk, hogy $V(x_{t_1,\eta}) \geq \liminf_{n\to\infty} V(x_{s^n,\eta}) \geq V(x_{t^*,\eta})$, azaz ha $t^* < t_2$, akkor a fenti állítás szerint ellentmondásba kerülünk $t^*$ definíciójával, tehát $t^* = t_2$.

A segédállítást a következő módon bizonyítjuk: Ha $V(x_{t_1,\eta}) = \infty$, akkor teljesül. Ha véges és $x(t_1) \neq 0$, akkor $x$ folytonossága miatt létezik ilyen $\varepsilon^0(t_1)$. Tehát az az eset marad, hogy $x(t_1) = 0$. Mivel $V(x_{t_1,\eta})$ véges, ezért $\exists\, R = [\eta(t_1), \eta(t_1) + \delta]$, olyan, hogy $x$ nem vált előjelet $R$-en. Tegyük fel, hogy itt $x(t) \geq 0$. Ekkor

$$\exists\, \varepsilon^0 = \varepsilon^0(t_1) : t \in [t_1, t_1 + \varepsilon^0] \Longrightarrow \eta(t) \in R.$$

$x$-hez (2.1) szerint van megfelelő $y(t)$, melyre teljesül, hogy:

$$\dot{y}(t) = c(t)y(\eta_x(t)), \text{ tobábbá } \operatorname{sgn} y(t) = \operatorname{sgn} x(t) \text{ és } c(t) < 0.$$

Ekkor $\dot{y}(t) \leq 0 : t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ és $y(t_1) = x(t_1) = 0$. Így

$$y(t) \leq 0, \text{ ha } t \in [t_1, t_1 + \varepsilon].$$

Ha végig $=$ van, akkor $x = 0$ ugyanott szintén, s így $V(x_{t_1,\eta}) = V(x_{t,\eta})$ ezen az intervallumon. Ha $\exists\, \bar{t} : y(\bar{t}) < 0$, akkor $y(\eta_x(\bar{t})) > 0$, amiből kapjuk, hogy $x(\eta(\bar{t})) > 0$ és $x(\bar{t}) < 0$. Létezik

$$\gamma \in (0, r(x_{t_1})) : x(t) \not\equiv 0, \text{ha } t \in [t_1 - \gamma, t_1], \text{ de nem vált előjelet.}$$

Ha itt $x(t) \leq 0$, akkor $sc(x, [\eta(t_1), t_1]) = sc(x, [\eta(t_1), t_1 + \varepsilon^0])$. Ekkor nyilvánvalóan $V(x_{t_1,\eta}) = V(x_{s,\eta})$. Ha viszont $x(t) \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} sc(x, [\eta(t_1), t_1]) + 1 = sc(x, [\eta(t_1), t_1 + \varepsilon^0]) \geq \\ \geq sc(x, [\eta(t_1 + s), t_1 + s]) : s \in [t_1, t_1 + \varepsilon], \end{aligned}$$

s mivel $sc(x, [\eta(t_1), t_1])$ páros, ezért $V(x_{t_1,\eta}) \geq V(x_{s,\eta})$. Ezzel a segédállítást igazoltuk.

$\square$

# 5. $V$ korlátossága az attraktoron

**5.1. Tétel.** *A $V$ funkcionál korlátos a $\mathcal{A}\backslash\{0\}$-n.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következőkre:

## Lehetőség a nemkorlátosságra a $0$ környezetében

**5.2. Lemma.** *Legyen $(\varphi^n)_0^\infty \subset \mathcal{A}\backslash\{0\}$ olyan, hogy $\varphi^n \to \varphi \in \mathcal{A}$ és $V(\varphi^n_{0,\eta}) \to \infty$ amint $n \to \infty$. Ekkor $\exists\, \varphi \rightleftharpoons x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\sigma \in [\eta(0),0]$ úgy, hogy $x(\eta^k(\sigma)) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. ($\eta = \eta_x$)*

*Bizonyítás.* Bontsuk két esetre a problémát!

*1.eset:* $\varphi$-nek véges sok 0-helye van: $\{\sigma_1, \ldots \sigma_k\}$. Ekkor választható $\sigma \in \{\sigma_1, \ldots \sigma_k\}$ és $(n_k)_0^\infty$ úgy, hogy

$$sc(\varphi^{n_k}, [\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon] \cap [-K,0]) \to \infty, \text{ amint } k \to \infty$$

teljesül $\forall \varepsilon > 0$ esetén.

Mivel $\mathcal{A}$ kompakt így $(\varphi^{n_k})_{k=0}^\infty \rightleftharpoons (x^k)_0^\infty$ egyenletesen korlátos, és (1.1) miatt $(\dot{x}^k)_0^\infty$ is az, így az Arzèla-Ascoli tétel, majd a Cantor-diagonalizáció alkalmazásával kapunk egy $(x^{k_l})_{l=0}^\infty$ részsorozatot, melyre $x^{k_l} \to x$ lokálisan egyenletesen. (1.1) miatt $x$ folytonosan differenciálható és $\dot{x}^{k_l} \to \dot{x}$ lokálisan egyenletesen. Ekkor $x \rightleftharpoons \varphi$. Mivel $\varphi^{n_{k_l}} \to \varphi$ és $\dot{\varphi}^{n_{k_l}} \to \dot{\varphi}$, így $x(\sigma) = 0$, illetve $\dot{x}(\sigma) = 0$. A negatív visszacsatolásból következik, hogy $x(\eta(\sigma)) = 0$. Állítjuk, hogy $\dot{x}(\eta(\sigma)) = 0$ is teljesül. A bizonyításhoz tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor $\exists\, \varepsilon > 0$ :

$$|\dot{x}(t)| > \frac{1}{2}|\dot{x}(\eta_x(\sigma))| > 0, t \in [\eta(\sigma) - \varepsilon, \eta(\sigma) + \varepsilon]$$

és $\exists N_0$, hogy $l \geq N_0$ esetén

$$|\dot{x}^{k_l}(t)| > \frac{1}{4}|\dot{x}(\eta_x(\sigma))| > 0, t \in [\eta_x(\sigma) - \varepsilon, \eta_x(\sigma) + \varepsilon].$$

Ugyanakkor $\exists\, N_1 \geq N_0 : l \geq N_1$ :

$$[\eta_{x^{k_l}}(\sigma) - \frac{1}{2}\varepsilon, \eta_{x^{k_l}}(\sigma) + \frac{1}{2}\varepsilon] \subseteq [\eta_x(\sigma) - \varepsilon, \eta_x(\sigma) + \varepsilon]$$

és $\exists\, \delta > 0$ :

$$\eta^{-1}_{x^{k_l}}([\eta_{x^{k_l}}(\sigma) - \frac{1}{2}\varepsilon, \eta_{x^{k_l}}(\sigma) + \frac{1}{2}\varepsilon]) \supset [\sigma - \delta, \sigma + \delta],$$

illetve hasonlóan:

$$\eta_x^{-1}([\eta_x(\sigma) - \varepsilon, \eta_x(\sigma) + \varepsilon]) \supset [\sigma - \delta, \sigma + \delta].$$

Ekkor $x^{k_l}$ legfeljebb egy zéróhellyel rendelkezik $\eta_{x^{k_l}}([\sigma-\delta,\sigma+\delta])$-n, (2.1) alapján a megfelelő $y^{k_l}$ függvények szintén legfeljebb egy zéróhellyel rendelkeznek itt, így legfeljebb kettővel a $[\sigma-\delta,\sigma+\delta]$ intervallumon, azonban ekkor ott $x^{k_l}$-nek is legfeljebb két zéróhelye lehet, $l \geq N_1$. Azonban ez ellentmond a feltevésünknek, így $\dot{x}(\eta(\sigma)) = 0$ adódik.

Szintén (2.1) alapján

$$sc(x^{k_l}, [\eta_x(\sigma)-\varepsilon, \eta_x(\sigma)+\varepsilon]) \to \infty \text{ amint } l \to \infty.$$

Így az egész érvelés alkalmazható újból $x^{k_l}$-re illetve $\eta_x(\sigma)$-ra. Azaz összegezve azt kapjuk, hogy $x(\eta^k(\sigma)) = \dot{x}(\eta^k(\sigma)) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$.

*2.eset:* $\varphi$-nek végtelen sok 0-helye van: Legyen $\sigma$ ezeknek egy torlódási pontja. Innen a bizonyítás hasonló módon folytatható. □

**5.3. Lemma.** *Legyen* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *korlátos megoldása (1.1)-nek. Ha* $\exists\, \sigma \in [\eta(0),0]$ *melyre* $x(\eta^k(\sigma)) = 0$ *minden* $k \in \mathbb{N}$*, akkor* $x \equiv 0$.

*Bizonyítás.* (i) A threshold késleltetés esetén:
Legyen $y_k(t) = x(\eta^k(t+\sigma))$.

$$\begin{aligned} |\dot{y}^k(t)| &= \left| f(x(\eta^k(t+\sigma)), x(\eta^{k+1}(t+\sigma)) \frac{d}{dt}(\eta^k(t+\sigma)) \right| \\ &= \left| [f(y_k(t), y_{k+1}(t)) - f(0,0)]\, \frac{d}{dt}(\eta^k(t+\sigma)) \right| \\ &\leq L_1 c_2 |y_k(t)| + L_1 c_2 |y_{k+1}(t)|. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ahol $c_2$ egy felső korlát $|\frac{d}{dt}(\eta^k(t+\sigma))|$-ra:

$$\frac{d}{dt}(\eta^k(t+\sigma)) = \dot{\eta}(\eta^{k-1}(t+\sigma))\dot{\eta}(\eta^{k-2}(t+\sigma))\ldots\dot{\eta}(t+\sigma),$$

amire viszont a késleltetés definíciójából deriválással kapható, hogy:

$$\dot{\eta}(t) = \frac{a(x(t))}{a(x(\eta(t)))},$$

azaz

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt}(\eta^k(t+\sigma))\right| &= \left| \frac{a(x(t))}{a(x(\eta(t+\sigma)))} \frac{a(x(\eta(t+\sigma)))}{a(x(\eta^2(t+\sigma)))} \cdots \frac{a(x(\eta^{k-1}(t+\sigma)))}{a(x(\eta^k(t+\sigma)))} \right| = \\ &= \left| \frac{a(x(t+\sigma))}{a(x(\eta^k(t+\sigma)))} \right| < c_2(x) = c_2. \end{aligned}$$

(ii) A vezérlési probléma esetén: Legyen $y_k(t) = x(\eta^k(\sigma)+t) = x(\eta^k(\sigma)+t) - x(\eta^k(\sigma))$.

$$\begin{aligned}|\dot{y}^k(t)| = \left|f(x(\eta^k(\sigma)+t), x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)))\right| = |[f(x(\eta^k(\sigma)+t), x(\eta(\eta^k(\sigma)+t))) - \\ f(x(\eta^k(\sigma)), x(\eta^{k+1}(\sigma)))]| \le L_1|y_k(t)| + L_1|x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)) - x(\eta^{k+1}(\sigma))|\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg külön az utolsó tagot:

$$\begin{aligned}&|x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)) - x(\eta^{k+1}(\sigma))| = \\ &=|x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)) - x(\eta^{k+1}(\sigma)+t) + x(\eta^{k+1}(\sigma)+t) - x(\eta^{k+1}(\sigma))| \le \\ &\le L_0|\eta_x(\eta_x^k(\sigma)+t) - (\eta_x^{k+1}(\sigma)+t)| + |y_{k+1}(t)| = \\ &=L_0|\eta_x^k(\sigma) + t - r(x, \eta_x^k(\sigma)+t) - \eta_x^k(\sigma) - t + r(x, \eta_x^k(\sigma))| + |y_{k+1}(t)| = \\ &=L_0|r(x, \eta_x^k(\sigma)+t) - r(x, \eta_x^k(\sigma))| + |y_{k+1}(t)| \le \\ &\le \frac{L_0}{c}|x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)) - x(\eta^{k+1}(\sigma))| + \frac{L_0}{c}|x(\eta^k(\sigma)+t) - x(\eta^k(\sigma))| + |y_{k+1}(t)|\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}|x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)) - x(\eta^{k+1}(\sigma))| \le \frac{c}{c-L_0}\left(\frac{L_0}{c}|y_k(t)| + |y_{k+1}(t)|\right) = \\ \frac{L_0}{c-L_0}|y_k(t)| + \frac{c}{c-L_0}|y_{k+1}(t)|.\end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&|\dot{y}^k(t)| \le L_1|y_k(t)| + L_1\left(\frac{L_0}{c-L_0}|y_k(t)| + \frac{c}{c-L_0}|y_{k+1}(t)|\right) = \\ &L_1\left(1 + \frac{L_0}{c-L_0}\right)|y_k(t)| + L_1\frac{c}{c-L_0}|y_{k+1}(t)| \le \\ &L_1\left(1 + \frac{c}{c-L_0}\right)(|y_k(t)| + |y_{k+1}(t)|)\end{aligned}$$

Legyen $c_2 = 1 + \frac{c}{c-L_0}$.

(iii) A Lipschitz-folytonos késleltetés esetén:

Legyen $y_k(t) = x(\eta^k(\sigma)+t) = x(\eta^k(\sigma)+t) - x(\eta^k(\sigma))$.

$$\begin{aligned}&|\dot{y}^k(t)| = \left|f(x(\eta^k(\sigma)+t), x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)))\right| = \\ &\left|\left[f(x(\eta^k(\sigma)+t), x(\eta(\eta^k(\sigma)+t))) - f(x(\eta^k(\sigma)), x(\eta^{k+1}(\sigma)))\right]\right| \le \\ &\le L_1|y_k(t)| + L_1|y_{k+1}(t) + x(\eta(\eta^k(\sigma)+t)) - x(\eta^{k+1}(\sigma)+t)| \le \\ &\le L_1|y_k(t)| + L_1|y_{k+1}(t)| + L_0|\eta_x(\eta_x^k(\sigma)+t) - (\eta_x^{k+1}(\sigma)+t)| \le \\ &\le L_1(|y_k(t)| + |y_{k+1}(t)|) + L_0|r(x(\eta^k(\sigma)+t)) - r(x(\eta^k(\sigma)))| \le \\ &\le L_1(|y_k(t)| + |y_{k+1}(t)|) + L_0L_r|y_k(t)| \le \\ &\le L_1(1 + L_0L_r)(|y_k(t)| + |y_{k+1}(t)|)\end{aligned}$$

Legyen $c_2 = (1 + L_0 L_r)$.

Mivel $x$ korlátos megoldása (1.1)-nek, ezért $\exists M \geq 0 : |y_k(t)| \leq M$, $|\dot{y}_k(t)| \leq M$ minden $t \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén. Így (5.1) alapján

$$|y^k(t)| \leq L_1 c_2 \int_0^t |y_k(s)| + |y_{k+1}(s)| \; ds, \text{ minden } t \geq 0. \tag{5.2}$$

Legyen továbbá $Y(t) = (y_0(t), \ldots, y_k(t), \ldots) \in l^\infty$. A komponensek és deriváltjaik egyenletes korlátosságából adódóan $Y$ folytonos. Kapjuk továbbá a (5.2) egyenlőtlenségből, hogy:

$$\|Y(t)\|_\infty \leq 2L_1 c_2 \int_0^t \|Y(s)\|_\infty \; ds, \text{ minden } t \geq 0. \tag{5.3}$$

Alkalmazva a Gronwall-Bellmann-Lemmát, kapjuk, hogy $\|Y(t)\|_\infty \equiv 0$, azaz $y_k(t) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}^+{}_0$, amiből $x(t) \equiv 0$ következik. □

**5.4. Állítás.** *Legyen* $(\varphi^n)_0^\infty \subset \mathcal{A}\backslash\{0\}$ *olyan, hogy* $\varphi^n \to \varphi \in A$, $V(\varphi_0^n) \to \infty$, *mikor* $n \to \infty$. *Ekkor* $\varphi = 0$.

*Bizonyítás.* Az 5.2 Lemma alapján $\exists x \rightleftharpoons \varphi$ és $\exists \sigma \in [\eta(0),0]$, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $x(\eta^j(\sigma)) = 0$. Az 5.3 Lemma implikálja, hogy $x \equiv 0 \Longrightarrow \varphi \equiv 0$. □

## A 0-ban hozzárendelt lineáris egyenlettel való kapcsolat

**5.5. Állítás.** $\exists U$ *nyílt környezete* 0*-nak* $\mathcal{A}$*-ban olyan, hogy ha* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(1.1) nemtriviális korlátos megoldása, akkor igaz, hogy:*

*(i) Ha* $x_t \in \overline{U}$, $t \leq 0 \Longrightarrow V(x_{t,\eta}) \leq N^*$, $t \in \mathbb{R}$.

*(ii) Ha* $x_t \in \overline{U}$, $t \geq 0 \Longrightarrow V(x_{t,\eta}) \geq N^*$, $t \in \mathbb{R}$.

*Bizonyítás.* (i) Indirekten bizonyítunk:
Tegyük fel, hogy $\exists\, (\varphi^n)_0^\infty \subset \mathcal{A}\backslash\{0\} : \sup_{(-\infty,0]} \|x_t^n\| \to 0$ , ahogy $n \to \infty$, és $V(x_{t_n,\eta}^n) > N^*$ teljesül valamely $t_n \in \mathbb{R}$-re, ahol $x^n \rightleftharpoons \varphi^n$. Mivel $\exists\, s_n \in (-\infty,0]$, melyre $|x^n(s_n)| > \frac{1}{2} \sup_{(-\infty,0]} \|x_t^n\|$, s mivel $V$ monoton csökkenő és (1.1) autonóm ezért feltehetjük, hogy $|x(0)| > \frac{1}{2} \sup_{(-\infty,0]} \|x_t^n\|$ és $V(x_{t,\eta}) > N^*$ teljesül minden $t \leq 0$ esetén. (2.1) alapján tudjuk, hogy létezik a következő formájú felbontás:

$$\dot{x}^n(t) = \beta^n(t) x^n(t) + \gamma^n(t) x^n(\eta_{x^n}(t))$$

itt teljesül, hogy

$$\beta^n(t) \to A, \gamma^n(t) \to B,$$

mivel $x^n \to 0$, ha $n \to \infty$ és $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Legyen

$$y^n(t) = \frac{x^n(t)}{\|x_0\|}.$$

Ekkor

$$\dot{y}^n(t) = \beta^n(t)y^n(t) + \gamma^n(t)y^n(\eta_{x^n}(t)) \tag{5.4}$$

is teljesül és tudjuk, hogy

$$\tilde{V}(y^n, [\eta_{x^n}(t), t]) > N^*$$

és $\|y_t^n\| < 2$, ha $t \leq 0$ illetve $\|y_0^n\| = 1$. Így $y^n$ egyenletesen korlátos, és az előző felbontás miatt egyenletesen folytonos is. Emiatt, alkalmazva az Arzèla-Ascoli tételt, majd a Cantor-diagonalizációt, kapunk egy

$$y^{n_k} \to y, \quad \dot{y}^{n_k} \to \dot{y}$$

lokálisan egyenletesen konvergens részsorozatot az egész számegyenesen. Az előbbi megfontolások miatt $\|y_0\| = 1$, így $y$ nem azonosan $0$. A késleltetések elemzésénél látottak miatt $\eta_{x^n}(t) \to t-1$, amint $n \to \infty$. Így alkalmazva a határátmenetet az (5.4) felbontásra, figyelembe véve, hogy mivel $|y^n(t)| < 2$, így létezik $L_y$, hogy minden $y_n$ $L_y$-Lipschitz folytonos, kapjuk, hogy

$$y(t) = Ay(t) + By(t-1).$$

Így $y$ egy nemtriviális megoldása a hozzárendelt lineáris egyenletnek, így annak a megoldásoperátorának a generátorának a sajátértékeinek egy polinomjával jól közelíthető (lásd [1]). Mivel $y$ korlátos $(-\infty,0]$-án, ezért csak nemnegatív valós részű sajátértékek szerepelhetnek a polinomban. Azaz $\exists\, 0 \leq N < k$, ahol $k$ a nemnegatív valós részű sajátérték párok száma, $\exists\, \varepsilon > 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_N \neq 0$, hogy

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N} e^{\Re\lambda_i\, t}(a_i \cos(\Im\lambda_i\, t + b_i)) + \mathbf{O}(\mathrm{e}^{(\Re\lambda_N + \varepsilon)\,t}), \text{ amint t} \to -\infty.$$

Mivel $\Re\lambda_N < \Re\lambda_{N-1} < \ldots < \Re\lambda_0$, ezért

$$y(t) = e^{\Re\lambda_N\, t}\left[(a_i \cos(\Im\lambda_N\, t + b_i)) + o(1)\right], \text{ amint } t \to -\infty.$$

Tudjuk, (lásd [1]), hogy $2j\pi < |\Im\lambda_j| < 2j\pi + \pi$. Így $V(y_{t,1}) \leq 2N + 1$ minden elég nagy negatív $t$-re. Azonban $V$ monotonitása miatt akkor $V(y_{t,1}) \leq 2N + 1 \leq N^*$, $t \in \mathbb{R}$. Ekkor alkalmazva $\tilde{V}$ (iv) tulajdonságát kapjuk, hogy $\exists\, T < 0$, hogy $y_{T,1} \in H[-1,0]$.

A (v) tulajdonság szerint, felhasználva $y^{n_k}$ lokálisan egyenletes $C_1$-konvergenciáját kapjuk, hogy

$$N^* < \lim_{k\to\infty} \tilde{V}(x^{n_k}, [\eta_{x^{n_k}}(t), t]) = \lim_{k\to\infty} \tilde{V}(y^{n_k}, [\eta_{x^{n_k}}(t), t]) = V(y_{t,1}) \leq N^*.$$

Ami azonban ellentmondás.

(ii) bizonyítása:

Legyen $N = N^* - 1, a_0 = |A| + 1, b_0 = \frac{|B|}{2}, b_1 = 2|B|$. Ezekhez $\tilde{V}$ (vi) tulajdonsága alapján léteznek megfelelő $L, k$ számok.

Indirekten tegyük fel, hogy $\exists(\varphi^n)_0^\infty \subset \mathcal{A}\backslash\{0\}$ : $\sup_{[0,\infty)} \|x_t^n\| \to 0$, ahogy $n \to \infty$, és $V(x^n_{t_n,\eta}) < N^*$ teljesül valamely $t_n \in \mathbb{R}$-re, ahol $x^n \rightleftharpoons \varphi^n$. (2.1) alapján tudjuk, hogy létezik a következő formájú felbontás:

$$\dot{x}^n(t) = \beta^n(t)x^n(t) + \gamma^n(t)x^n(\eta_{x^n}(t))$$

Világos , hogy létezik $\varepsilon > 0$, hogy ha $\|x_{t,\eta}\| < \varepsilon$, akkor $|\beta^n(t)| < a_0$ és $b_0 \leq |\gamma^n(t)| \leq b_1$.

Felhasználva $V$ monotonitását, (1.1) autonomitását és, hogy $\exists\, s_n \in [\eta_{x^n}(0), \infty)$, melyre $|x^n(s_n)| > \frac{1}{2}\sup_{[\eta_{x^n}(0),\infty)} \|x_t^n\|$, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $(\varphi^n)_0^\infty \subset \mathcal{A}\backslash\{0\}$ olyan, hogy $\sup_{[0,\infty)} \|x_t^n\| \to 0$, ahogy $n \to \infty$,

$$|\beta^n(t)| < a_0 \text{ és } b_0 \leq |\gamma^n(t)| \leq b_1,\, x_t^n \neq 0,\, V(x^n_{\eta^L(0)}) < N^*,$$

minden $t \geq -LK, n \in \mathbb{N}$ és

$$|x^n(0)| > \frac{1}{2} \sup_{[\eta_{x^n}(0),\infty)} \|x_t^n\|.$$

Alkalmazva $\tilde{V}$ (vi) tulajdonságát kapjuk, hogy $\|x^n_{t,\eta}\| \geq \frac{1}{k}\|x^n_{\eta(t),\eta}\|$, minden $t \geq 0$ esetén. Azaz $\|x^n_{t,\eta}\| \geq (\min_{t\in[0,\eta^{-1}_{x^n}(0)]} \|x^n_{t,\eta}\|) \exp(t \log(\frac{1}{k+1}))$ teljesül, ha $t \geq 0$, ami azt jelenti, hogy $x$ nem csökkenhet gyorsabban minden exponenciális függvénynél. Elvégezve az (i) részhez hasonlóan a következő transzformációt:

$$y^n = \frac{x^n}{\|x_0\|},$$

majd az Arzéla-Ascoli tétel és a Cantor-diagonalizáció alkalmazásával kapott

$$y^{n_k} \to y, \quad \dot{y}^{n_k} \to \dot{y}$$

lokálisan egyenletesen konvergens sorozatra a határátmenetet:

$$\dot{y}^{n_k}(t) = \beta^{n_k}(t)y^{n_k}(t) + \gamma^{n_k}(t)y^{n_k}(\eta_{x^{n_k}}(t)),$$

kapjuk, hogy $y$ a hozzárendelt linearizált egyenlet nemtriviális megoldása, hiszen szükségképpen $\|y_0\| = 1$. Így szem előtt tartva $y$ korlátosságát $[0, \infty)$-n kapjuk, hogy közelíthető a nempozitív valós részű sajátértékek egy polinomjával,
azaz $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0,\ a \neq 0, b \in \mathbb{R}$, hogy

$$y(t) = e^{\Re\lambda_{k_1} t}(a\cos(\Im\lambda_{k_1} t + b)) + \mathbf{O}(\mathrm{e}^{(\Re\lambda_{k_1} - \varepsilon)\, \mathrm{t}}), \text{ amint t} \to \infty,$$

ahol $\Re\lambda_{k_1} \leq 0$, emiatt $|\Im\lambda_{k_1}| > 2k_1\pi \geq 2k\pi$, s így $V(y_{t,1}) > 2k$ minden elég nagy $t$-re. $V$ monotonitása és $N^*$ definíciója miatt $V(y_{t,1}) \geq N^*$, ha $t \in \mathbb{R}$. Ismét hasonlóan az előző részhez, felhasználva $\tilde{V}$ (iv) és (v) tulajdonságát igazolható, hogy

$$N^* > \lim_{k\to\infty} V(x^{n_k}_{t,\eta}) = V(y_{t,1}) \geq N^*, \text{ ha } t \geq 0.$$

Ami ismét ellentmondás. □

*Bizonyítás.* (tétel) Tegyük fel, hogy $\exists\, (\varphi^n)_0^\infty$ melyre $V(\varphi^n_{0,\eta}) \to \infty$. $\mathcal{A}$ kompaktsága miatt feltehető, hogy $\varphi^n \to \varphi \in \mathcal{A}$. Ekkor az 5.4 Állítás alapján $\varphi = 0$.
Így $\exists N_0 : V(\varphi^n_{0,\eta}) > N^*$, és $\varphi^n \in U$ is teljesül, ha $n \geq N_0$.

Legyen $k \geq N_0$ rögzített! Ekkor $\exists\, x^k \rightleftharpoons \varphi^k$, $x^k_t \in \mathcal{A}$. $V$ monotonitása miatt

$$V(x^k_{t,\eta}) > N^*, \text{ ha } t \leq 0.$$

Az 5.5 Állításból következik, hogy $\exists\, t \leq 0 : x^k_t \notin \overline{U}$.
A folytonosság miatt $\exists\, t_k < 0 : \psi := x^k_{t_k} \in \partial U$.

$$(\psi^k)^\infty_{k=N_0} \subset \mathcal{A} \cap \partial U,$$

ami kompakt, így feltehető, hogy

$$\psi^k \to \psi \in \mathcal{A} \cap \partial U.$$

Erre $V(\psi^k_{0,\eta}) = V(x^k_{t_k,\eta}) \geq V(\varphi^k_0) \to \infty$. Ismét alkalmazva az 5.4 Állítást $\psi = 0$ adódik, azonban $0 \notin \partial U$, azaz ellentmondást kaptunk. □

# 6. A Morse-felbontás

## A felbontás megadása

$(S_N)_{N=1}^M$ diszjunkt, kompakt, invariáns részhalmazai $\mathcal{A}$-nak, melyek az összekötő pályákkal együtt kiadják az $\mathcal{A}$ attraktort. Az $S_N$ halmazokat nevezzük Morse-halmazoknak, illetve összességüket Morse-felbontásnak. A triviális felbontás, azaz $\mathcal{A}$ mindig létezik.

**6.1. Definíció.** *A Morse-felbontása az $\mathcal{A}$ globális attraktornak egy véges, rendezett részhalmazrendszer $S_0 < S_1 < \ldots < S_M$, melynek tagjai kompaktak, invariánsak és páronként diszjunktak. Teljesül továbbá, hogy minden $\varphi \in \mathcal{A}$ és minden $x \rightleftharpoons \varphi$ esetén léteznek $N, K \in \{0, \ldots, M\}$, melyekre $N \geq K$ és $\alpha(x) \subseteq S_N$, $\omega(\varphi) \subseteq S_K$ illetve $N = K$ esetén igaz az, hogy $x_t \in S_N$, $t \in \mathbb{R}$.*

A következő módon definiáljuk a Morse-halmazokat. Ha $N \in 2\mathbb{N} + 1$ és $N \neq N^*$, akkor

$$S_N := \{\varphi \in \mathcal{A} \backslash \{0\} : \exists\, \varphi \rightleftharpoons x : V(x_t) = N, t \in \mathbb{R} \text{ és } 0 \notin \alpha(x) \cup \omega(\varphi)\}.$$

Ha $N = N^*$, akkor

$$S_{N^*} := \{0\}, \text{ ha az origó hiperbolikus,}$$

különben

$$S_{N^*} := \{\varphi \in \mathcal{A} \backslash \{0\} : \exists\, \varphi \rightleftharpoons x : V(x_t) = N^*, t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

Más N-re legyen $S_N := \emptyset$

**6.2. Tétel.** *Az így megadott $S_N$ halmazok, $\mathcal{A}$ egy Morse-felbontását adják.*

Mivel $V$ korlátos $\mathcal{A} \backslash \{0\}$ -n, ezért csak véges sok nem üres halmaz van az $S_N$-ek között. Legyen $M = \min\{i \in \mathbb{N} : S_j = \emptyset, \forall j > i\}$. A definícióból következik, hogy a Morse-halmazok diszjunktak. Először az invarianciájukat bizonyítjuk:

## Az invariancia és a Morse-tulajdonság

**6.3. Lemma.** *Ha* $(\varphi^n)_0^\infty \subset \mathcal{A}$*, és* $\varphi \in \mathcal{A}$*, úgy, hogy* $\varphi^n \to \varphi$ *amint* $n \to \infty$*, akkor* $(\varphi^n)_0^\infty$*-nek van* $C^1$ *normában* $\varphi$*-hez konvergáló részsorozata.*

*Bizonyítás.* $\exists\, x^n \rightleftharpoons \varphi^n$ továbbá $x_t^n \in \mathcal{A}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Mint korábban is tettük, ebből konstruálható egy lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat: $x^{n_k} \to x$, ahogy $k \to \infty$. Erre az $x$-re így teljesül, hogy $x \rightleftharpoons \varphi$, $x_t \in \mathcal{A}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Mivel $(x_{-K}^{n_k})_{k=0}^\infty \subset \mathcal{A}$ és $\mathcal{A}$ kompakt, ezért $\exists x_{-K}^{n_{k_l}} \to \psi \in \mathcal{A}$, amint $l \to \infty$, konvergens részsorozat. Ekkor a kezdeti adatoktól való folytonos függés és (1.1) miatt:

$$\|x_0^{n_{k_l}} - x_K^\psi\|_1 \to 0 \text{ amint } l \to \infty.$$

Azonban $x_0^{n_{k_l}} = \varphi^{n_{k_l}} \to \varphi$, ha $l \to \infty$. Így szükségképpen $\varphi = x_K^\psi$ és ebből
$\|\varphi_0^{n_{k_l}} - \varphi\|_1 \to 0$ következik. □

**6.4. Állítás.**

*(i) Ha* $\varphi \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$*,* $N \in 2\mathbb{N}+1$*,* $x \rightleftharpoons \varphi$ *és* $\lim_{t\to\infty} V(x_{t,\eta}) = N$*, akkor* $V(\psi_{0,\eta}) = N$*,* $\forall \psi \in \omega(\varphi)\backslash\{0\}$*.*

*(ii) Ha* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *korlátos megoldása (1.1)-nek,* $N \in 2\mathbb{N}+1$*,* $V(x_{t,\eta}) \to N$*, amint* $t \to -\infty$*, akkor* $V(\psi_{0,\eta}) = N$*,* $\forall \psi \in \alpha(x)\backslash\{0\}$*.*

*Bizonyítás.* (i) bizonyítása: Legyen $\psi \in \omega(\varphi)\backslash\{0\}$, $x \rightleftharpoons \varphi$. Ekkor $\exists\, 0 \le t_n \nearrow \infty$, hogy $\lim_{n\to\infty} x_{t_n} = \psi$. A 6.3 Lemma alapján $\exists\, t_{n_k}$ :

$$\|x_{t_{n_k}} - \psi\|_1 \to 0, \text{ ahogy } k \to \infty.$$

Igaz, hogy egy $\omega(\varphi) \ni \psi \rightleftharpoons y$ korlátos megoldásra $y_t \in \omega(\varphi)$. Az 5.1 Tétel és $\tilde{V}$ (iv) tulajdonsága alapján $\exists\, T_1 < 0 : y_{T_1,\eta} \in H_{[-r(y_{T_1}),0]}$, $T_2 > 0 : y_{T_2,\eta} \in H_{[-r(y_{T_2}),0]}$. Mivel $y_{T_1} \in \omega(\varphi)$, ezért $\exists\, (t_n^{'})_0^\infty : x_{t_n^{'}} \to y_{T_1}$, ha $n \to \infty$. Alkalmazva ismét a 6.3 Lemmát kapjuk, hogy $\exists\, \|x_{t'_{n_k}} - y_{T_1}\|_1 \to 0$ részsorozat.
Ugyanakkor $\|x_{t_{n_k}+T_2} - y_{T_2}\|_1 \to 0$ is teljesül. Kapjuk, hogy:

$$V(y_{T_1,\eta}) = \lim_{k\to\infty} V(x_{t'_{n_k},\eta}) = N = \lim_{k\to\infty} V(x_{t_{n_k}+T_2,\eta}) = V(y_{T_2,\eta}).$$

Felhasználva $V$ monotonitását kapjuk, hogy $V(y_{t,\eta}) = N$ minden $t \in [T_1, T_2]$, speciálisan $V(\psi_{0,\eta}) = N$.

(ii) hasonló érveléssel bizonyítható. □

**6.5. Állítás.**

*(i) Ha* $x^\varphi \rightleftharpoons \varphi \in \mathcal{A}\setminus\{0\}$*,* $V(x^\varphi_{t,\eta}) \not\to N^*$*, amint* $t \to \infty$*, akkor* $\omega(\varphi) = \{0\}$*, vagy* $0 \notin \omega(\varphi)$*.*

*(ii) Ha* $x$ *korlátos megoldása (1.1)-nek,* $V(x_{t,\eta}) \not\to N^*$*, amint* $t \to -\infty$*, akkor* $\alpha(x) = \{0\}$*, vagy* $0 \notin \alpha(x)$*.*

*Bizonyítás.* (i) bizonyítása: Legyen $x^\varphi \rightleftharpoons \varphi \in \mathcal{A}\setminus\{0\}$, $x^\varphi_t \in \mathcal{A}$. Bizonyítjuk, hogy ha $\omega(\varphi) \neq \{0\}$, akkor $0 \notin \omega(\varphi)$.

Tegyük fel, hogy $0 \in \omega(\varphi) \neq \{0\}$. Legyen $U_1$ nyílt, melyre $A \supset U \supseteq U_1 \supset \{0\}$, ahol $U$ az amit az 5.5 állításban megadtunk, illetve $\omega(\varphi) \nsubseteq \overline{U}_1$. Ekkor $x^\varphi_t$ végtelen sokszor belép és kilép $\overline{U}_1$-ből, amint $t \to \infty$. Mivel $0 \in \omega(\varphi)$, így $\exists\, t_n \nearrow \infty$, $x_{t_n} \to 0$, amint $n \to \infty$. Az is igaz, hogy $\exists\, \sigma_n$ és $\tau_n$, hogy $t_n - \sigma_n \to \infty$, $(t_n - \sigma_n, t_n + \tau_n)$ diszjunktak, $x^\varphi_t \in U_1$, ha $t \in (t_n - \sigma_n, t_n + \tau_n)$ és $x^\varphi_{t_n - \sigma_n}, x^\varphi_{t_n + \tau_n} \in \partial U_1$. Teljesül az is, hogy $\sigma_n, \tau_n \to \infty$, $n \to \infty$. $\exists N_0$, hogy, ha $n \geq N_0$, akkor:

$$y^n : \mathbb{R} \ni t \mapsto x^\varphi(t_n - \sigma_n + t) \in \mathbb{R}$$

$$z^n : \mathbb{R} \ni t \mapsto x^\varphi(t_n + \tau_n + t) \in \mathbb{R}$$

Mindkét sorozatra alkalmazva az Arzèla-Ascoli tételt majd a Cantor diagonalizációt lokálisan egyenletesen konvergens részsorozatokat kapunk:

$$y^{n_k} \to y,\ \dot{y}^{n_k} \to \dot{y},\ \text{amint } k \to \infty$$

$$z^{n_k} \to z,\ \dot{z}^{n_k} \to \dot{z},\ \text{amint } k \to \infty$$

Az előzőek alapján igaz, hogy: $y_t \in \overline{U}_1$, $t \geq 0$, $y_0 \in \partial U_1$ és $z_t \in \overline{U}_1$, $t \leq 0$, $z_0 \in \partial U_1$. $V$ monotonitása és az 5.5 Állítás miatt

$$V(y_{t,\eta}) \geq N^* \geq V(z_{t,\eta}), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Speciálisan $V(y_{0,\eta}) \geq N^* \geq V(z_{0,\eta})$ és $y_0, z_0 \in \omega(\varphi)\setminus\{0\}$, így

$$N^* = V(y_{0,\eta}) = V(z_{0,\eta}) = \lim_{t\to\infty} V(x^\varphi_{t,\eta}) \neq N^*,$$

és ez ellentmondás.

(ii) hasonló érveléssel bizonyítható. □

**6.6. Állítás.** *Legyen* $N \in (2\mathbb{N}+1)\backslash\{N^*\}$.

*(i) Ha* $\varphi \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, $V(x^{\varphi}_{t,\eta}) \to N$, *ahogy* $t \to \infty$, *akkor* $\omega(\varphi) = \{0\}$ *vagy* $\omega(\varphi) \subset S_N$.

*(ii) Ha* $x$ *korlátos megoldása (1.1)-nek,* $V(x_{t,\eta}) \to N$, *ahogy* $t \to -\infty$, *akkor* $\alpha(x) = \{0\}$ *vagy* $\alpha(x) \subset S_N$.

*Bizonyítás.* (i) bizonyítása: Tegyük fel, hogy $\omega(\varphi) \neq \{0\}$. Ekkor a 6.5 Állítás alapján $0 \notin \omega(\varphi)$. Legyen $\omega(\varphi) \ni \psi \rightleftharpoons y$, ekkor $y_t \in \omega(\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$. Az is igaz, hogy

$$\alpha(y) \cup \omega(\psi) \subset \omega(\varphi),$$

ebből $0 \notin (\alpha(y) \cup \omega(\psi))$. A 6.4 Állítás miatt $V(y_{t,\eta}) = N$, ha $t \in \mathbb{R}$, azaz $\psi \in S_N$.

(ii) hasonló érveléssel bizonyítható. □

Ezzel igazoltuk az invarianciát, illetve a Morse-tulajdonságot. A kompaktság maradt még kérdéses, ehhez viszont elegendő $S_N$ zártságának megmutatása, hiszen az a kompakt $\mathcal{A}$ részhalmaza.

## A kompaktság

**6.7. Lemma.** $\forall N \in 2\mathbb{N}+1\backslash\{N^*\} : \exists V$ *nyílt környezete az origónak,* $\mathcal{A}$*-ban, melyre* $S_N \cap V = \emptyset$.

*Bizonyítás.* Indirekten tegyük fel, hogy létezik páratlan

$$N \neq N^*, \text{ és } (x^n)_0^\infty \rightleftharpoons (\varphi^n)_0^\infty \subset S_N,$$

melyre teljesülnek a következők: $\varphi^n \to 0$, ahogy $n \to \infty$ és $V(x^n_{t,\eta}) = N$, $t \in \mathbb{R}$ és $0 \notin (\alpha(x^n) \cup \omega(\varphi^n))$.

Tegyük fel, hogy $N > N^*$. Ha $\exists\, n : \omega(\varphi^n) \subseteq \overline{U}$, akkor $\forall y \rightleftharpoons \psi \in \omega(\varphi^n)$, $y_t \in \omega(\varphi^n)$ esetén teljesül, hogy $y_t \in \overline{U}$. Emiatt $V(y_{t,\eta}) \leq N^*$, $t \leq 0$. Azonban $N = V(\psi_{0,\eta})$ a 6.4 Állítás alapján, így mivel ellentmondáshoz jutottunk, következik, hogy $\forall n : \omega(\varphi^n) \nsubseteq \overline{U}$.

Emiatt $\exists\, \sigma_n \nearrow \infty$ és minden elég nagy $n$-re $x^n_t \in U$, $t \in [0, \sigma_n)$, és $x^n_{\sigma_n} \ni \partial U$. Ekkor az $y_n : t \mapsto x^n(t+\sigma_n)$ függvénysorozatból az eddig megszokott módon, az Arzèla-Ascoli tétel, illetve a Cantor-diagonalizáció segítségével, kapunk egy lokálisan egyenletesen konvergens részsorozatot:

$$y^{n_k} \to y,\ \dot{y}^{n_k} \to \dot{y} \text{ amint } k \to \infty.$$

Teljesül, hogy $y_0 \in \partial U, y_t \in \overline{U}$, ha $t \leq 0$. Ekkor az 5.5 Állítás és $V$ monotonitása biztosítja, hogy $V(y_{t,\eta}) \leq N^*$, $t \in \mathbb{R}$. Alkalmazva a 6.3 Lemmát:

$$\exists T > 0 : y_{T,\eta} \in H_{[-r(y_T),0]} \text{ és } \exists n_k : \|y^{n_k}_T - y_T\|_1 \to 0, \text{ ha } k \to \infty.$$

Ebből $V(x^{n_k}_{\sigma_{n_k}+T,\eta}) \to V(y_{T,\eta})$, így $N^* \geq V(y_{T,\eta}) = N > N^*$ azaz ellentmondást kaptunk. $\square$

**6.8. Állítás.** *$S_N$ zárt, ha $N \in (2\mathbb{N}+1) \cup \{N^*\}$.*

*Bizonyítás.* Legyen $(\varphi^n)_0^\infty \subset S_N$, $\varphi^n \to \varphi \in \mathcal{A}$. Ha $\varphi = 0$ akkor a 6.7 Lemma szerint $N = N^*$ és definíció szerint $0 \in S_{N^*}$. Ha $\varphi \neq 0$ akkor tekintsük a megfelelő megoldásokat: $\varphi^n \rightleftharpoons x^n$, $x^n_t \in S_N$, $V(x^n_{t,\eta}) = N$.

Az Arzèla-Ascoli tétel, a Cantor diagonalizáció és $\mathcal{A}$ kompaktságának felhasználásával kapunk egy:

$$x^{n_k} \to x, \dot{x}^{n_k} \to \dot{x}$$

lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat, ahol az is igaz, hogy $x \rightleftharpoons \varphi$, $x_t \in \mathcal{A}$, ha $t \in \mathbb{R}$. Mivel $\varphi \neq 0$, ezért $x_{t,\eta} \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Az 5.1 Tétel és $\tilde{V}$ (iv) tulajdonságának alkalmazásával $\exists T_1 < 0, T_2 > 0 : x_{T_1}, x_{T_2} \in H_{[-K,0]}$ és

$$V(x_{T_1,\eta}) = \lim_{t\to-\infty} V(x_{t,\eta}), V(x_{T_2,\eta}) = \lim_{t\to\infty} V(x_{t,\eta}),$$

és $\|x^{n_k}_{T_1} - x_{T_1}\|_1 \to 0$, $\|x^{n_k}_{T_2} - x_{T_2}\|_1 \to 0$, ha $k \to \infty$. Ebből kapjuk, hogy

$$V(x_{t,\eta}) = N, t \in \mathbb{R}.$$

Ha $N = N^*$, akkor $\varphi \in S_{N^*}$. Ha $N \neq N^*$, akkor a 6.7 Lemma alapján létezik $V$ nyílt környezete az origónak $\mathcal{A}$-ban, hogy $x^n_t \in \mathcal{A}\backslash\mathrm{V}$, $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Ebből

$$x_t \in \overline{\mathcal{A}\backslash\mathrm{V}} = \mathcal{A}\backslash\mathrm{V}, \text{ ha t} \in \mathbb{N},$$

s így emiatt

$$(\alpha(x) \cup \omega(\varphi)) \subseteq \mathcal{A}\backslash\mathrm{V}.$$

Következésképpen $0 \notin (\alpha(x) \cup \omega(\varphi))$ azaz $\varphi \in S_N$, és ezzel beláttuk, hogy $S_N$ zárt. $\square$

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Krisztin Tibornak a dolgozat megírásához nyújtott rengeteg segítségét, továbbá minden gimnáziumi és egyetemi tanáromnak, hogy utamat egyengették, Szüleimnek, Hugaimnak és Barátnőmnek pedig a támogatást.

# Nyilatkozat

Alulírott Bartha Ferenc Ágoston matematikus szakos hallgató, kijelentem, hogy a dolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem Matematikai Tanszékcsoport Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszékén készítettem.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2008. május 15. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

aláírás

# Hivatkozások


[1] Tibor Krisztin, Ovide Arino, The Two-Dimensional Attractor of a Differential Equation with State-Dependent Delay, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **Vol. 13, No. 3** (2001), 453–522.

[2] Mónika Polner, Morse decomposition for delay-differential equations with positive feedback, *Nonlinear Analysis*, (2002) 377–397.

[3] J. Mallet-Paret, Morse decomposition for differential delay equations, *J. Differential Equations*, **72** (1988), 270–315.

[4] J. Mallet-Paret and R. D. Nussbaum, Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state-dependent time lags: I., *Arch. Rational Mech. Anal.* **120** (1992), 99–146.

[5] J. Mallet-Paret and R. D. Nussbaum, Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state-dependent time lags: II., *J. Reine Angew. Math.* **477** (1992), 129–197.

[6] K.L. Cooke, W. Huang, On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations, *Proc. Am. Math. Soc.* **124**, 1417–1426.

[7] J.K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988

[8] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Lecture Notes, Vol. 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978

[9] P. Waltman, *Deterministic Treshold Models in the Theory of Epidemics*, Lecture Notes in Biomath., Vol. 1, Springer, New York, 1974

[10] H. L. Smith, Hopf bifurcation in a system of a functional equations modeling the spread of infectious disease, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 370–385.