Valószínűségszámítás és matematikai statisztika (valószínűségszámítás rész)

Barczy Mátyás, Pap Gyula

Debreceni Egyetem, Szegedi Tudományegyetem

2014

Ajánlott irodalom:

- Denkinger Géza
  Valószínűségszámítás
  Nemzeti Tankönyvkiadó, 1997.

- Denkinger Géza
  Valószínűségszámítási Gyakorlatok
  Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.

- Fazekas István
  Valószínűségszámítás
  Debrecen, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2000.

- Pap Gyula
  Valószínűségszámítás előadáskövető anyagok
  `http://www.math.u-szeged.hu/~papgy/`

Ajánlott irodalom:

- Solt György
  Valószínűségszámítás
  Műszaki Könyvkiadó, 1969.

- Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András, Rényi Alfréd, Szász Domokos
  Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény
  Nemzeti Tankönyvkiadó, 2001.

- N. Shiryaev
  Probability, 2nd edition
  Springer-Verlag, 1995.

Véletlen események

Valószínűsége **véletlen eseményeknek** van,

- melyekről nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem;
- és amelyek
  - vagy **véletlen jelenségek** megfigyelésével kapcsolatosak (amikor a körülményeket nem tudjuk befolyásolni),
  - vagy pedig **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak (amikor befolyásolni tudjuk a körülményeket).

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztunk m darabot ($m \leqslant n$), és megszámoljuk, hogy hány selejtes van;
  lehetséges kimenetelek: az $\Omega := \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ halmaz elemei;
- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámoljuk, hogy hány találatunk van;
  lehetséges kimenetelek: az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei;
- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- **Elemi események:** a kísérlet/megfigyelés lehetséges kimenetelei. Jelölés: ω.
- **Eseménytér:** az elemi események halmaza; jelölés: Ω.
- **Esemény:** az eseménytér bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmaza, amit úgy értünk, hogy ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következik be, akkor
  - $\omega \in A$ esetén bekövetkezik az A esemény is,
  - $\omega \notin A$ esetén az A esemény nem következik be.
- **Biztos esemény:** amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az $\Omega \subset \Omega$ részhalmazzal.
- **Lehetetlen esemény:** amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset \subset \Omega$ üres részhalmazzal.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Logikai műveletek eseményekkel

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét:** ez pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\overline{A}$.
- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A + B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, mely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

A logikai műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $$A + B = B + A,$$ $$A \cdot B = B \cdot A.$$
- asszociativitás: $$A + (B + C) = (A + B) + C,$$ $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$
- idempotencia: $$A + A = A,$$ $$A \cdot A = A.$$
- disztributivitás: $$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$$ $$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C).$$
- de Morgan-féle azonosságok: $$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$$ $$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$
- különbség: $$A - B = A \cdot \overline{B}.$$

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizárják egymást)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

$\Rightarrow$

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

A következő állítások ekvivalensek:

- $A \Rightarrow B$;
- $A \subset B$;
- $\overline{B} \subset \overline{A}$;
- $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **(esemény)algebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$ rendszere.

Ha $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ eseményalgebra, akkor $\mathcal{A}$ tartalmazza a lehetetlen eseményt is, és zárt a különbségképzésre és a véges metszetképzésre is.

Természetes az a feltevés, hogy egy kísérlettel kapcsolatos események rendszere eseményalgebrát alkot.

σ-algebra

Egy eseményalgebrát σ**-algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

Példák:

1. Egy pénzdarab feldobása esetén
$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$
De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így
$$\Omega = \{0, 1\}.$$
A kísérlethez tartozó eseményalgebra:
$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}.$$
Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

2. n-szer **egymás után dobva** egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \Big\{\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}\Big\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$ és a kísérlethez tartozó eseményalgebra $\mathcal{A} = 2^\Omega$, melyre $|\mathcal{A}| = 2^{2^n}$.

Ha n darab egyforma pénzdarabot **egyidőben dobunk fel**, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetelekre szorítkozni: ezek száma $n + 1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

3. Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy **visszatevéssel** vagy **visszatevés nélkül** húzunk (az utóbbi esetben $k \leqslant n$ szükséges), és aszerint, hogy a **sorrend számít** vagy a **sorrend nem számít.**

   Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$|\Omega| = n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$
hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n-1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.
- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leqslant n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$|\Omega| = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$
amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$|\Omega| = n^k,$$
hiszen minden húzásnál n lehetőség van.
- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leqslant n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$|\Omega| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$
hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetõségek száma

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, mégpedig úgy, hogy az első egyes elé írt nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb., az $(n-1)$-edik egyes után írt nullák száma jelenti az n-edik fajta elemből húzottak számát; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

4. Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos között úgy, hogy sorban $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma
$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!},$$
hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került n_1, n_2, $\ldots$, n_k kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

5. Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor
$$\Omega = \{\mathrm{f}, \mathrm{if}, \mathrm{iif}, \mathrm{iiif}, \ldots, \mathrm{i}_\infty\},$$
ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, független kísérletetet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik; ez egy **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, 1, \ldots, n$; jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága:** $r_n(A) := \dfrac{k_n(A)}{n}$; ez is **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n} = 1$;

Tapasztalat:
ha n-et növeljük, azaz egyre több kísérletet hajtunk végre, akkor az A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy $\mathrm{P}(A)$ szám körül; amit majd A **valószínűségének** hívunk.

Relatív gyakoriság tulajdonságai

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

- $0 \leqslant r_n(A) \leqslant 1$ tetszőleges A esemény esetén.
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$.
- ha A és B egymást kizáró események, akkor
$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$
- ha $A_1, A_2, \ldots$ egymást páronként kizáró események, akkor
$$r_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n(A_j).$$
- $r_n(\overline{A}) = 1 - r_n(A)$ tetszőleges A esemény esetén.
- ha $A \subset B$ események, akkor $r_n(A) \leqslant r_n(B)$.

2. Valószínűség

Valószínűségi mező (Kolmogorov)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az elemi eseményekből álló eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra (az események rendszere);
- $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés (halmazfüggvény), melyre
  1. $\mathrm{P}(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
  2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,
  3. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
     $$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j).$$
     (Ezt a tulajdonságot σ**-additivitásnak** nevezzük).

Egy A esemény esetén a $\mathrm{P}(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** (valószínűségi mértéknek) nevezzük.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$. (Hiszen ha $\mathrm{P}(\emptyset) > 0$ volna, akkor a σ-additivitásban $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk.)
- Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j).$$

  (Használjuk a σ-additivitást $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.)
  Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük.
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
  (Hiszen $\Omega = A \cup \overline{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitással $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A})$.)

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor
$$\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B), \qquad \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A).$$
(Hiszen $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A) \geqslant \mathrm{P}(A).$)
Az első tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük.
- Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B),$$
hiszen
$$A \cup B = \big[A \setminus (A \cap B)\big] \cup \big[B \setminus (A \cap B)\big] \cup (A \cap B)$$
diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \big[\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)\big] + \big[\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\big] + \mathrm{P}(A \cap B).$$
Ez a tulajdonság a **szita-formula** speciális esete 2 eseményre.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ + \mathrm{P}(A \cap B \cap C),\end{aligned}$$

hiszen

$$\mathrm{P}\left((A \cup B) \cup C\right) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\left((A \cup B) \cap C\right)$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left((A \cup B) \cap C\right) &= \mathrm{P}\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) \\ &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right),\end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
Ez a tulajdonság a **szita-formula** speciális esete 3 eseményre.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- **Szita-formula (Poincaré-formula):** Tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Azaz, események n tagú uniójának a valószínűsége az események legfeljebb n tagú metszeteinek a valószínűségeivel kifejezhető.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

Továbbá,

$$\sum_{k=1}^{2\ell}(-1)^{k-1}S_k^{(n)} \leqslant \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{2\ell-1}(-1)^{k-1}S_k^{(n)}, \qquad \ell \in \mathbb{N},$$

ahol $S_k^{(n)} := 0$, ha $k > n$. Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűséget a szita-formulában kifejező

$$S_1^{(n)} - S_2^{(n)} + S_3^{(n)} - S_4^{(n)} + \cdots$$

előjeles összeg páratlan számú tagot tartalmazó részletösszegei felülről, míg a páros számú tagot tartalmazó részletösszegei alulról közelítik.

Speciálisan, $\ell = 1$ választással: $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$, $n \in \mathbb{N}$, melyet a valószínűség σ-szubadditivitásának hívunk.

2. Valószínűség

Legyen Ω nemüres halmaz. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$.

Ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ és $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \uparrow A$.

Ha $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ és $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \downarrow A$.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_n \uparrow A$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A).$$
Ezt a tulajdonságot **alulról folytonosságnak** nevezzük.
- Tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_n \downarrow A$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A).$$
Ezt a tulajdonságot **felülről folytonosságnak** nevezzük.

2. Valószínűség

Diszkrét valószínűségi mező

Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

Valószínűségek kiszámolása diszkrét valószínűségi mezőben

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i\,:\,\omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}).$$

Ezért diszkrét valószínűségi mezőben elég megadni az elemi események valószínűségeit, a

$$p_i := \mathrm{P}(\{\omega_i\}), \qquad i = 1, 2, \dots N \text{ vagy } \infty$$

számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Az is igaz, hogy ha $\{p_1, p_2, \dots\}$ nemnegatív, 1 összegű számok, akkor a fentieknek megfelelően bevezetett $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvény valószínűség.
Ha a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok nemnegatívak és 1 összegűek, akkor azt mondjuk, hogy **(diszkrét) eloszlást** alkotnak.

Példa. *Feldobunk egy olyan pénzdarabot egymás után 10-szer, melynél az írás valószínűsége $\frac{1}{3}$, a fej valószínűsége $\frac{2}{3}$.*

(a) *Adjunk meg egy, a feladatnak megfelelő valószínűségi mezőt!*

(b) *Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi fejet kapunk, mint írást?*

(c) *Mennyi a valószínűsége, hogy k fejet kapunk, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$?*

(d) *Mennyi a valószínűsége, hogy több fejet kapunk, mint írást?*

(a): Legyen $\Omega := \{F, I\}^{10}$, azaz Ω az összes 10 hosszúságú fej-írás sorozatok halmaza. Az elemi események tehát a 10 hosszúságú fej-írás sorozatok. Legyen $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$, és $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, melyre

$$\mathrm{P}(\{\omega\}) := \left(\frac{1}{3}\right)^{k_I(\omega)} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k_I(\omega)}, \qquad \omega \in \Omega,$$

ahol $k_I(\omega)$ az ω sorozatban levő írások száma.
Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ nem klasszikus valószínűségi mező.

(b): Ekkor

$$\mathrm{P}(\{5 \text{ fejet és } 5 \text{ írást kapunk}\}) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 .$$

(c): Ekkor tetszőleges $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ esetén

$$\mathrm{P}(\{k \text{ fejet és } 10-k \text{ írást kapunk}\}) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

(d): Ekkor

$$\mathrm{P}(\{\text{több fejet kapunk, mint írást}\}) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$

2. Valószínűség

Egyenletes eloszlás véges halmazon

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\},$$

és az elemi események egyenlő esélyűek, azaz

$$\mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \mathrm{P}(\{\omega_2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}.$$

Valószínűségek véges halmazon egyenletes eloszlás esetén

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}.$$

Ez a **valószínűség kiszámításának klasszikus képlete.**

Klasszikus valószínűségi mező

Olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, ahol

- Ω véges, azaz $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ alakú, ahol $N \in \mathbb{N}$,
- $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$,
- $$\mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \mathrm{P}(\{\omega_2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}.$$

Azaz, véges sok elemi esemény van, az elemi események tetszőleges halmaza esemény, és az elemi események egyenlő valószínűségűek.

Példák:

1. *Két szabályos érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?*

   Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

   $$\Omega = \{\text{ff}, \text{fi}, \text{if}, \text{ii}\}$$

   eseményteret kapjuk, legyen $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$, az elemi események egyforma valószínűségűek. Így az

   $$A = \{\text{fi}, \text{if}\}$$

   esemény valószínűsége

   $$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Példák:

2. *Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)*

   Nyilván $n > 365$ esetén (a ,,skatulya-elv" miatt) ez a biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

   Ha pedig $n \leqslant 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$= 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16, \\ 0.476 & \text{ha } n = 22, \\ 0.507 & \text{ha } n = 23, \\ 0.891 & \text{ha } n = 40, \\ 0.970 & \text{ha } n = 50, \\ 0.990 & \text{ha } n = 57. \end{cases}$$

Egyenletes eloszlás $\mathbb{R}^k$ véges mértékű részhalmazain

Ω: $\mathbb{R}^k$ egy véges (Lebesgue-)mértékű részhalmaza,
$\mathcal{A}$: Ω Borel-halmazaiból álló σ-algebra,
P: ,,minden pont egyenlő esélyű", pontosabban egy $A \in \mathcal{A}$ részhalmaz valószínűsége A mértékével arányos, azaz

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz k-dimenziós (Lebesgue-)mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén hossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Ez a **geometriai valószínűségi mező**, illetve a **valószínűség geometriai kiszámítási módja**.

Példa. *Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?*

Az eredmény a $[0,1]\times[0,1]$ négyzet azon részhalmazának területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 0<x<y<1, \\ 1-y<x+(y-x)=y, \\ x<(y-x)+(1-y)=1-x, \\ y-x<x+(1-y), \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0<y<x<1, \\ 1-x<y+(x-y)=x, \\ y<(x-y)+(1-x)=1-y, \\ x-y<y+(1-x), \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} 0<x<\frac{1}{2}<y<1, \\ y-x<\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0<y<\frac{1}{2}<x<1, \\ x-y<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért a keresett valószínűség $1/4$.

Példa. *Egy kikötőbe a nap 24 órája alatt két hajó A és B érkezik egymástól függetlenül, véletlen időpontokban. A munkások az A hajót 1, a B hajót 2 óra alatt tudják kirakodni. Az előbb érkező hajó kirakodását azonnal megkezdik. Amennyiben a másik hajó úgy érkezik, hogy a munkások az elsővel még nem végeztek, a később érkező hajó kénytelen várakozni. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik hajónak sem kell várnia?*

Jelölje ξ az A hajó érkezési idejét (órában), η pedig a B hajó érkezési idejét (órában). Ekkor (ξ, η) egyenletes eloszlású a $[0, 24] \times [0, 24]$ négyzeten. Legyen

$$\begin{aligned} S &:= \{\text{egyik hajónak sem kell várnia}\} \\ &= \Big\{(\xi,\eta) \in [0,24] \times [0,24] \mid \xi + 1 < \eta\Big\} \cup \Big\{(\xi,\eta) \in [0,24] \times [0,24] \mid \eta + 2 < \xi\Big\}. \end{aligned}$$

Így a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(S) = \frac{\frac{22^2}{2} + \frac{23^2}{2}}{24^2} = \frac{506,5}{576} \approx 0,879.$$

3. Feltételes valószínűség, független események

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A \mid B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

(Mivel a B esemény bekövetkezett, $k_n(B) > 0$ és $r_n(B) > 0$.)

Feltételes valószínűség

Az A esemény **feltételes valószínűsége** a B feltétel mellett (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)},$$

feltéve, hogy $\mathrm{P}(B) > 0$.

A feltételes valószínűséget úgy is ki lehet számítani, hogy az eseményteret leszűkítjük a feltételben szereplő eseményre.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$ egy esemény, melyre $\mathrm{P}(B) > 0$. Ekkor $(B, \mathcal{A}_B, \mathrm{P}_B)$ is valószínűségi mező, ahol $\mathcal{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$, és $\mathrm{P}_B : \mathcal{A}_B \to [0, 1]$, $\mathrm{P}_B(C) := \mathrm{P}(C \mid B)$, $C \in \mathcal{A}_B$.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$ egy esemény, melyre $\mathrm{P}(B) > 0$. Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}_B)$ is valószínűségi mező, ahol $\mathrm{P}_B : \mathcal{A} \to [0, 1]$, $\mathrm{P}_B(C) := \mathrm{P}(C \mid B)$, $C \in \mathcal{A}$.

Példák:

1. *Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha feltételezzük, hogy egy gyerek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy lány, és tudjuk, hogy*
   - *az idősebb gyerek fiú;*
   - *legalább az egyik gyerek fiú ?*

   Definíció szerint számolva: Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}, \mathrm{LL}\},$$

melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek, ahol pl. FL annak felel meg, hogy az 1. (idősebb) gyerek fiú és a 2. (fiatalabb) gyerek lány. Továbbá, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Legyenek

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}\}, \\ B_1 &:= \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}\}, \\ B_2 &:= \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}\}. \end{aligned}$$

Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{\mathrm{FF}\}$.

Így

$$P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cap B_1) = P(A \cap B_2) = \frac{1}{4}.$$

és ezért

$$P(A \mid B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Az eseménytér leszűkítésének módszere:
Ekkor $(B_1, \mathcal{A}_{B_1}, P_{B_1})$ és $(B_2, \mathcal{A}_{B_2}, P_{B_2})$ az alábbiak:

$$B_1 = \{FF, FL\}, \qquad B_2 = \{FF, FL, LF\},$$

$$\mathcal{A}_{B_i} = \{A \cap B_i : A \in \mathcal{A}\} = 2^{B_i}, \qquad i = 1, 2,$$

és $\mathrm{P}_{B_i} : \mathcal{A}_{B_i} \to [0,1]$, $\mathrm{P}_{B_i}(C) = \mathrm{P}(C \mid B_i)$, $C \in \mathcal{A}_{B_i}$, $i = 1,2$, melyekre teljesül, hogy

$$\mathrm{P}_{B_1}(\{\mathrm{FF}\}) = \mathrm{P}_{B_1}(\{\mathrm{FL}\}) = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}_{B_2}(\{\mathrm{FF}\}) = \mathrm{P}_{B_2}(\{\mathrm{FL}\}) = \mathrm{P}_{B_2}(\{\mathrm{LF}\}) = \frac{1}{3}.$$

Így $A = \{FF\} \in \mathcal{A}_{B_i}$, $i = 1,2$, és

$$\mathrm{P}(A \mid B_1) = \mathrm{P}_{B_1}(A) = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(A \mid B_2) = \mathrm{P}_{B_2}(A) = \frac{1}{3}.$$

2. *Az 52 lapos francia kártyát kiosztjuk 4 embernek, mindenki 13 lapot kap. Tudjuk, hogy az egyik ember 2 ászt kapott. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van (csak egy partnere van)?* Az összes leosztások száma $\frac{52!}{(13!)^4}$, ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$ olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig
$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$$
olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van. Tehát a keresett feltételes valószínűség (az eseménytér leszűkítésének módszerét használva)
$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{2}{19}.$$

Láncszabály

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}),$$

feltéve, hogy $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

A jobb oldal

$$P(A_1)\, \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\, \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})},$$

ahol $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ miatt $P(A_1) > 0$, $P(A_1 \cap A_2) > 0, \ldots,$ $P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-2}) > 0$.

Példa. *Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?*

Jelölje $i = 1, 2, 3$ esetén A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(\overline{A}_2 \mid A_1) = \frac{24}{31}, \qquad \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32{\cdot}31{\cdot}30$, és a kimenetelek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8\cdot24\cdot7}{32\cdot31\cdot30} = \frac{7}{155}$.

Teljes eseményrendszer

Az eseménytér megszámlálható páronként diszjunkt felbontása eseményekre, azaz események $A_1, A_2, \ldots$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és uniójuk az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \qquad \text{és} \qquad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i \mathrm{P}(A_i) = 1.$$

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap \big(\bigcup_i A_i\big) = \bigcup_i (B \cap A_i),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

Példa. *Három gép csavarokat gyárt. A selejt aránya az első gépnél 1 %, a másodiknál 2 %, a harmadiknál 3 %. Az össztermék 50 %-át az első gép, 30 %-át a második, 20 %-át pedig a harmadik állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?*

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, $i = 1, 2, 3$ esetén pedig A_i azt, hogy a kihúzott csavar az i-edik gépen készült. Ekkor

$$\mathrm{P}(B|A_1) = 0.01, \qquad \mathrm{P}(B|A_2) = 0.02, \qquad \mathrm{P}(B|A_3) = 0.03,$$
$$\mathrm{P}(A_1) = 0.5, \qquad \mathrm{P}(A_2) = 0.3, \qquad \mathrm{P}(A_3) = 0.2,$$

így

$$\mathrm{P}(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

3. Feltételes valószínűség, független események

Bayes-formula

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Bizonyítás: $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)$.

Bayes-tétel

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathrm{P}(B) > 0$, akkor

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)}{\sum_j \mathrm{P}(B \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)}.$$

Bizonyítás: A Bayes-formulával $\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(B)}$. A teljes valószínűség tételével $\mathrm{P}(B) = \sum_j \mathrm{P}(B \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)$.

Példa. *Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?*

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{0.5 \cdot 0.01}{0.017} = \frac{5}{17}, \qquad \mathrm{P}(A_2 \mid B) = \frac{6}{17}, \qquad \mathrm{P}(A_3 \mid B) = \frac{6}{17}.$$

Példa. *Vándorlásai közben Odüsszeusz egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénba, a másik Mükénébe, a harmadik pedig Spártába vezet. Azt is tudta, hogy az athéniak átlagosan minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek fele hazudozó, a spártaiak pedig becsületesek, sosem hazudnak. Kockadobással döntötte el, hogy melyik utat válassza, egyforma valószínűséget adva mindegyiknek. Ezután addig ment míg egy városba nem ért. Itt az első szembejövő embertől megkérdezte, hogy mennyi kettő meg kettő, és válaszként 4-et kapott. Mennyi a valószínűsége, hogy Athénba érkezett?*

Vezessük a következő eseményeket:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\text{Odüsszeusz Athénbe érkezett}\},\\
A_2 &:= \{\text{Odüsszeusz Mükénébe érkezett}\},\\
A_3 &:= \{\text{Odüsszeusz Spártába érkezett}\},\\
B &:= \{\text{Odüsszeusz kérdésére igaz választ kapott}\}.
\end{aligned}$$

A $\mathrm{P}(A_1 \mid B)$ feltételes valószínűséget kell meghatározni.

Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{3},$$

és

$$\mathrm{P}(B \mid A_1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_3) = 1.$$

A Bayes-tétel alapján

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(B \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(B \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{11} \approx 0,1818. \end{aligned}$$

Független események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **függetlenek**, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha A, B és $\overline{B}$ **pozitív** valószínűségű események, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $P(A \mid B) = P(A)$;
- $P(B \mid A) = P(B)$;
- A és $\overline{B}$ függetlenek;
- $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$.

Ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$, akkor A tetszőleges B eseménytől független.

Példa. *Egy szabályos dobókockával n-szer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első m dobás során nincs 6-os, B pedig azt, hogy az első n dobás közt nincs 1-es, ahol $m < n$. Független-e A és B?*

Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \frac{5^m \cdot 6^{n-m}}{6^n} = \frac{5^m}{6^m}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{5^n}{6^n},$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(\{\text{az első } m \text{ dobás között nincs 1-es és 6-os,} \\ &\qquad\qquad \text{az utolsó } n-m \text{ dobás között nincs 1-es}\}) \\ &= \frac{4^m \cdot 5^{n-m}}{6^n} = \frac{4^m}{6^m} \cdot \frac{5^{n-m}}{6^{n-m}}.\end{aligned}$$

Meg kell vizsgálni, hogy teljesül-e, hogy $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

Ekkor

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4^m}{6^m} \cdot \frac{5^{n-m}}{6^{n-m}} = \frac{5^m}{6^m} \cdot \frac{5^n}{6^n}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{4^m}{6^m} = \frac{5^{2m}}{6^{2m}} \quad \Longleftrightarrow \quad m \ln(4/6) = 2m \ln(5/6)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln(2/3) = \ln(25/36) \quad \Longleftrightarrow \quad 24 = 25,$$

mely ellentmondás, ezért A és B nem függetlenek.

3. Feltételes valószínűség, független események

Páronként független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két különböző esemény független.

(Teljesen) független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $i_1, i_2, \ldots, i_k$ **páronként különböző** indexekre

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\,\mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként független, de nem (teljesen) független.

Páronként függetlenség $\not\Rightarrow$ függetlenség

Dobjunk fel egy szabályos pénzdarabot kétszer egymás után. Legyen

$$A := \{\text{az első dobás fej}\}, \quad B := \{\text{a második dobás fej}\},$$
$$C := \{\text{a két dobás eredménye különböző}\}.$$

Mivel

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(\text{az első dobás fej, a második dobás írás}) = \frac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(\text{az első dobás írás, a második dobás fej}) = \frac{1}{4},$$

kapjuk, hogy A, B és C páronként függetlenek. Azonban,

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C),$$

így A, B és C nem függetlenek.

4. Valószínűségi változók

Valószínűségi változó / véletlen mennyiség, eloszlásfüggvény

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, akkor a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezés **valószínűségi változó/ véletlen változó/ véletlen mennyiség**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\xi < x\} := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.
Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathrm{P}(\{\xi < x\}), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Eloszlásfüggvény jellemzése

Egy $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változónak, ha

1. F monoton növekvő,
2. F balról folytonos,
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Példa. *Ledobunk egy pontot véletlenszerűen a* $[0,2]$ *intervallumra. Valaki felírja a ledobott pont helyét a jegyzőkönyvbe, ha a ledobott pont a* $[0,1]$ *intervallumba esik, és a* 0 *értéket írja be, ha ez a pont az* $(1,2]$ *intervallumba esik. Jelölje* ξ *a jegyzőkönyvbe írt szám értékét! Adjuk meg* ξ *eloszlásfüggvényét!*

Jelölje η a ledobott pont helyét! Ekkor $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \mathrm{P}(\xi < x) \\
&= \begin{cases} \mathrm{P}(\emptyset) & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \mathrm{P}\left(\{\eta \in (1,2]\} \cup \{\eta \in [0,x)\}\right) & \text{ha } 0 < x \leqslant 1, \\ \mathrm{P}\left(\{\eta \in (1,2]\} \cup \{\eta \in [0,1]\}\right) = \mathrm{P}(\Omega) & \text{ha } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \frac{1+x}{2} & \text{ha } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Eloszlásfüggvény

Legyen ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel.
Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathrm{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi < c\} = F_\xi(c) = \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x), \qquad \mathrm{P}\{\xi \leqslant c\} = \lim_{x \downarrow c} F_\xi(x) = F_\xi(c+0),$$

így $\mathrm{P}\{\xi = c\}$ az F_ξ ugrása a c pontban, azaz

$$\mathrm{P}\{\xi = c\} = \lim_{x \downarrow c} F_\xi(x) - \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x) = F_\xi(c+0) - F_\xi(c).$$

4. Valószínűségi változók

Diszkrét véletlen változó

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

A ξ diszkrét véletlen változó **eloszlása** az a P_ξ mérték a ξ lehetséges értékeinek $X := \{x_1, x_2, \ldots\}$ halmazán, melyre $\mathrm{P}_\xi(\{x_i\}) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\})$, $x_i \in X$.

Diszkrét véletlen változó eloszlásfüggvénye

Egy ξ diszkrét véletlen változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely a lehetséges értékeknél ugrik, és az ugrás nagysága az illető érték valószínűsége. Ha a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X := \{x_1, x_2, \ldots\}$, akkor

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} \mathrm{P}_\xi(\{x_i\}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

1. *Két szabályos kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ. Határozzuk meg ξ eloszlását!*

   Ekkor ξ diszkrét véletlen változó; lehetséges értékeinek halmaza:

   $$X = \{2, 3, \dots, 12\},$$

   eloszlása:

   $$P\{\xi = k\} = \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant k \leqslant 7, \\ \dfrac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leqslant k \leqslant 12. \end{cases}$$

2. **Binomiális eloszlás.**

n független kísérlet, $n \in \mathbb{N}$
A esemény, $p := \mathrm{P}(A) \in [0, 1]$
A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$ diszkrét véletlen változó;
ξ lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in X,$$

melyet (n, p) **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

Példa. *Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Jelölje* ξ *azt, hogy hányszor kapunk páratlan számot. Határozzuk meg* ξ *eloszlását, és annak a valószínűségét, hogy a 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat!*

Ekkor ξ binomiális eloszlású $(n, p) = (10, 0.5)$ paraméterrel.

Továbbá,

$$\mathrm{P}(\{\text{10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat}\})$$
$$= \mathrm{P}(\xi = 5) = \binom{10}{5}(0.5)^5 \cdot (0.5)^{10-5} = \binom{10}{5}(0.5)^{10} \approx 0.24609.$$

3. **Elsőrendű negatív binomiális eloszlás.**

   kísérlet, A esemény, $p := \mathrm{P}(A) \in (0,1]$
   Addig ismételjük egymás után függetlenül a kísérletet, míg A először bekövetkezik.
   $\xi :=$ az ehhez szükséges ismétlések száma;
   lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \ldots, \infty\},$$

   eloszlása: $k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

   így

$$\mathrm{P}\{\xi = \infty\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi = k\} = 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = 0.$$

   Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű** p **paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** (vagy geometriai eloszlásnak) nevezzük.

Példa. *Minimáliában egy vonaljegy 300 Forintba kerül, és ha valakit jegy nélkül talál az ellenőr, akkor 8000 Forint bírságot kell fizetnie. Tegyük fel, hogy minden járaton egymástól függetlenül* 10% *eséllyel találkozunk ellenőrrel. Addig bliccelünk amíg egyszer el nem kap az ellenőr, jelölje a blicceléseink számát* ξ*. Adjuk meg* ξ *eloszlását! Mi a valószínűsége, hogy a büntetés kifizetése után még mindig jobban járunk anyagilag, mintha minden eddigi alkalommal jegyet vettünk volna?*

Ekkor ξ geometriai eloszlású 0.1 paraméterrel, azaz ξ értékkészlete $\{1, 2, \ldots\}$ és

$$\mathrm{P}(\xi = k) = 0.9^{k-1} 0.1, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Amikor elkap az ellenőr összesen 300ξ Forintot spórolhatunk meg, azonban ki kell fizetnünk a 8000 Forintos bírságot (az ellenőr azon utazás díját nem fizetteti ki pluszban, amikor elkapott).

Így akkor járunk jól anyagilag, ha $300\xi - 8000 > 0$, melynek valószínűsége:

$$\mathrm{P}(300\xi - 8000 > 0) = \mathrm{P}\left(\xi > \frac{80}{3}\right) = \mathrm{P}(\xi \geqslant 27),$$

ahol felhasználtuk, hogy ξ egészértékű. A valószínűség σ-additivitása alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi \geqslant 27) &= \sum_{k=27}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=27}^{\infty} 0.9^{k-1} 0.1 = \sum_{j=0}^{\infty} 0.9^{j+26} 0.1 \\ &= 0.1 \cdot 0.9^{26} \sum_{j=0}^{\infty} 0.9^{j} = 0.1 \cdot 0.9^{26} \frac{1}{1-0.9} = 0.9^{26} \approx 0.0646.\end{aligned}$$

4. **Hipergeometrikus eloszlás.**

   Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van $(M < N)$.
   Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót $(n \leqslant N)$.
   $\xi :=$ a kihúzott piros golyók száma;
   lehetséges értékeinek halmaza: olyan k értékek, melyekre teljesül $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \leqslant M$, és $n - k \leqslant N - M$,
   eloszlása:

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

   Ekkor ξ eloszlását $(n, M, N - M)$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

5. **Poisson eloszlás.**

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak". Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Ekkor ξ lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \dots, 50\}$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k}, \qquad k \in X,$$

ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy konkrét mazsola a kiválasztott szeletbe kerül $1/40$. Tehát ξ eloszlása n-edrendű $1/N$ paraméterű binomiális eloszlás.
Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét, ill. ezzel arányosan a mazsolák számát?

Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztához, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a szóbanforgó binomiális eloszlás n-edrendű és $p_n := 1/N = \lambda/n$ paraméterű, ahol $\lambda := 5/4 (= \frac{n}{N})$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Ha egy η véletlen változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ **paraméterű Poisson-eloszlás.**

Valóban diszkrét valószínűségeloszlást adtunk meg, mert a megadott számok pozitívak (így nemnegatívak) és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Véletlen változó sűrűségfüggvénye

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel-mérhető) függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ véletlen változó, illetve ξ eloszlása **abszolút folytonos**.
(Abszolút folytonos véletlen változó esetén annak sűrűségfüggvénye nem egyértelműen meghatározott!)

Sűrűségfüggvény jellemzése

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye valamely ξ véletlen változónak, ha (Borel)-mérhető, Lebesgue majdnem mindenütt nemnegatív és $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Példa. *Egy* $\sqrt{2}$ *átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög belsejében véletlenszerűen választunk egy pontot. Legyen* ξ *a kiválasztott pont és az átfogó távolsága. Határozzuk meg* ξ *sűrűségfüggvényét!*

Ekkor ξ eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\frac{1\cdot 1}{2} - \frac{(1-\sqrt{2}x)^2}{2}}{\frac{1\cdot 1}{2}} & \text{ha } 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 & \text{ha } x > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 1 - (1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2) = 2\sqrt{2}x - 2x^2 & \text{ha } 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 & \text{ha } x > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Így ξ sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$,

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} - 4x & \text{ha } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Abszolút folytonos véletlen változó

Legyen ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor F_ξ folytonos, és tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathrm{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Általánosabban: tetszőleges $B \subset \mathbb{R}$ (Borel-halmaz) esetén

$$\mathrm{P}\{\xi \in B\} = \int_B f_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi = c\} = 0.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F_\xi'(x) = f_\xi(x).$$

Egyenletes eloszlás az (a, b) intervallumon

Ha az (a, b) intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset (a, b)$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_\xi(x) = \frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b)}(x) + \mathbb{1}_{[b,\infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leqslant x < b, \\ 1 & \text{ha } x \geqslant b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ véletlen változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük az (a, b) intervallumon. Továbbá az

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{(a,b)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ-nek. Jelölés: $\xi \sim U(a, b)$.

Normális eloszlás

Ha a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye (Gauss-görbe, haranggörbe)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel**. Jelölés: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Standard normális: $m = 0$ és $\sigma = 1$, jelölés: $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Standard normális eloszlásfüggvénye: Φ**.**

A $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$, $x \in \mathbb{R}$, függvény értékeinek közelítései táblázatokban megtalálhatók.

Legyenek $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$.
Ha $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$, akkor $\sigma \cdot \eta + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Továbbá, ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. (Ekkor a $\frac{\xi - m}{\sigma}$ véletlen változót a ξ standardizáltjának hívjuk.)

4. Valószínűségi változók

Legyen $m := 0$ és $\sigma := 1$. Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, abból következik, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[-\mathrm{e}^{-r^2/2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi,$$

ahol a második lépésben egy integráltranszformációt hajtottunk végre:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r \in [0,\infty),\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Ezen transzformáció Jacobi mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix},$$

melynek determinánsa $r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$.

Példa. *Legyen ξ normális eloszlású véletlen változó $m = 3$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Mekkora legyen legalább az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha azt szeretnénk, hogy ξ a $(2, A)$ intervallumba legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel essen?*

Ekkor

$$P(\xi \in (2, A)) \geqslant \frac{1}{2} \iff P\left(\frac{\xi - 3}{2} \in \left(\frac{2-3}{2}, \frac{A-3}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2} \iff \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Felhasználva, hogy $\Phi(-1/2) = 1 - \Phi(1/2)$, kapjuk, hogy

$$P(\xi \in (2, A)) \geqslant \frac{1}{2} \iff \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) \geqslant 1 + \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mivel Φ szigorúan monoton növekvő, kapjuk, hogy

$$P(\xi \in (2, A)) \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{A-3}{2} \geqslant \Phi^{-1}\left(1.5 - \Phi(1/2)\right) \iff A \geqslant 2\Phi^{-1}\left(1.5 - \Phi(1/2)\right) + 3,$$

ahol $\Phi(1/2) \approx 0.6915$, így
$2\Phi^{-1}(1.5 - \Phi(1/2)) + 3 \approx 2\Phi^{-1}(0.8085) + 3 \approx 4.74.$

Exponenciális eloszlás

Jelölje a ξ véletlen változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal:** ha $t, h \geqslant 0$, akkor

$$\mathrm{P}\{\xi \geqslant t+h \,|\, \xi \geqslant t\} = \mathrm{P}\{\xi \geqslant h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$\mathrm{P}\{\xi \geqslant t+h \,|\, \xi \geqslant t\} = \frac{\mathrm{P}(\{\xi \geqslant t+h\} \cap \{\xi \geqslant t\})}{\mathrm{P}\{\xi \geqslant t\}},$$

és $\mathrm{P}(\{\xi \geqslant t+h\} \cap \{\xi \geqslant t\}) = \mathrm{P}\{\xi \geqslant t+h\}$, ezért a $G(t) := \mathrm{P}\{\xi \geqslant t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t+h)}{G(t)} = G(h), \qquad \text{azaz} \qquad G(t+h) = G(t)G(h), \quad t \geqslant 0, h \geqslant 0.$$

Exponenciális eloszlás

Be lehet látni, hogy ha G *folytonos*, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \text{ha } t \geqslant 0.$$

Mivel $P\{\xi \geqslant t\} = 1$, ha $t \leqslant 0$, kapjuk, hogy ξ eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= P\{\xi < x\} = 1 - P\{\xi \geqslant x\} = 1 - G(x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Létezik sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Jelölés: $\xi \sim Exp(\lambda)$.

Exponenciális eloszlás

Bomlási állandó: tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\{t \leqslant \xi < t+h \,|\, \xi \geqslant t\} &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\mathrm{P}(\{t \leqslant \xi < t+h\} \cap \{\xi \geqslant t\})}{\mathrm{P}\{\xi \geqslant t\}} \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\mathrm{P}\{t \leqslant \xi < t+h\}}{\mathrm{P}\{\xi \geqslant t\}} \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(1-e^{-\lambda(t+h)}) - (1-e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t}} \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} (1-\mathrm{e}^{-\lambda h}) = \lambda.
\end{aligned}$$

Azaz tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén,

$$\mathrm{P}\{t \leqslant \xi < t+h \,|\, \xi \geqslant t\} \sim \lambda h \qquad \text{amint } h \downarrow 0.$$

Példa. *Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél tovább kell várni a tapasztalatok szerint* 0.1. *Feltételezve, hogy a várakozási idő hossza exponenciális eloszlású, mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érve 3 percen belül sorra kerülünk?*

Jelölje ξ várakozási idő hosszát percben. Ekkor ξ exponenciális eloszlású valamely $\lambda > 0$ paraméterrel. A megadottak alapján $\mathrm{P}(\xi > 6) = 0.1$, és így

$$0.1 = 1 - \mathrm{P}(\xi \leqslant 6) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 6) = 1 - F_\xi(6) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 6}) = \mathrm{e}^{-6\lambda}.$$

Ezért

$$\mathrm{P}(\xi < 3) = F_\xi(3) = 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda} = 1 - \sqrt{\mathrm{e}^{-6\lambda}} = 1 - \sqrt{0.1} \approx 0.68377.$$

4. Valószínűségi változók

Véletlen vektor

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad \text{azaz} \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ véletlen változók;
eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_k) := \mathrm{P}\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_k < x_k\}, \quad (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Peremeloszlás/marginális eloszlás

Egy $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ véletlen változó peremeloszlásai/marginális eloszlásai alatt ξ_i, $i = 1, \ldots, k$, eloszlásait értjük.

Peremeloszlások eloszlásfüggvényei

Ha ξ és η együttes eloszlásfüggvénye $F_{\xi,\eta}$, akkor
ξ eloszlásfüggvénye $F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$,
és η eloszlásfüggvénye $F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F_{\xi,\eta}(x, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Példa. *A* (ξ, η) *véletlen vektor eloszlásfüggvénye* $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$,

$$F(x,y) := \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y} & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) *Határozzuk meg* ξ *és* η *eloszlásfüggvényét!*

(b) *Számítsuk ki a* $\mathrm{P}(\xi < 1, \eta < 1)$ *valószínűséget!*

Ekkor

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \end{cases}$$

és

$$F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{ha } y > 0, \\ 0 & \text{ha } y \leqslant 0. \end{cases}$$

Így ξ és η exponenciális eloszlásúak 1 paraméterrel.

Nyilván, $F(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$, $x, y > 0$.

Továbbá, $\mathrm{P}(\xi < 1, \eta < 1) = F(1,1) = (1 - e^{-1})^2 \approx 0.3995$.

Diszkrét véletlen vektor

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ véletlen vektor **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható. A ξ diszkrét véletlen vektor **eloszlása** az a P_ξ mérték a ξ lehetséges értékeinek $Z := \{z_1, z_2, \ldots\}$ halmazán, melyre
$\mathrm{P}_\xi(\{z_i\}) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = z_i\}), \ z_i \in Z.$

Ha $(\xi, \eta) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ diszkrét, akkor ξ és η is diszkrét. Ha ξ és η lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots,$ illetve $y_1, y_2, \ldots,$ akkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \ldots\}$.
Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a $\mathrm{P}\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\}, \ i, j = 1, 2, \ldots$ valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i\} = \sum_j \mathrm{P}\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\}, \quad \mathrm{P}\{\eta = y_j\} = \sum_i \mathrm{P}\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\}.$$

A diszkrét esetben ξ és η együttes eloszlását, azaz (ξ, η) eloszlását, szokás **kontingencia táblázat**tal is megadni.

Példa. *Egy dobozban 4 jó, 3 hibás és 3 selejtes termék van. Egymás után visszatevés nélkül kiveszünk két terméket. Legyen*

$$\xi := \begin{cases} 0 & \text{ha elsőre selejteset húzunk,} \\ 1 & \text{ha elsőre hibásat húzunk,} \\ 2 & \text{ha elsőre jót húzunk,} \end{cases} \qquad \eta := \begin{cases} 0 & \text{ha másodikra selejteset húzunk,} \\ 1 & \text{ha másodikra hibásat húzunk,} \\ 2 & \text{ha másodikra jót húzunk.} \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ *és* η *együttes eloszlását!*

Ekkor

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{15}, \qquad P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{1}{10},$$

$$P(\xi = 0, \eta = 2) = \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}, \qquad P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{1}{10},$$

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{15}, \qquad P(\xi = 1, \eta = 2) = \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15},$$

$$P(\xi = 2, \eta = 0) = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}, \qquad P(\xi = 2, \eta = 1) = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15},$$

$$P(\xi = 2, \eta = 2) = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}.$$

A ξ és η együttes eloszlását megadó kontingencia táblázat:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	
0	1/15	1/10	2/15	3/10
1	1/10	1/15	2/15	3/10
2	2/15	2/15	2/15	6/15
	3/10	3/10	6/15	1

Polinomiális eloszlás

n független kísérletet hajtunk végre egy $A_1, A_2, \dots, A_r$ teljes eseményrendszerre, $p_i := \mathrm{P}(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$). Ekkor A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$, és $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ diszkrét véletlen vektor; lehetséges értékeinek halmaza:

$$\big\{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : k_i \geqslant 0,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n\big\},$$

eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = k_1,\, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

melyet $(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk.

Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!}\, p_i^{k_i}(1-p_i)^{n-k_i}, \quad k_i = 0, \dots, n.$$

Példa. Tekintsük a Poisson-eloszlás motivációjánál tárgyalt mazsolás példát: n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztához, mely esetben $N = 20 \cdot n/25 = n/\lambda$ szelet készül, ahol $\lambda = 5/4$.

Jelölje ξ_1, illetve ξ_2 két kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Ekkor (ξ_1, ξ_2) eloszlása $(n, \frac{\lambda}{n}, \frac{\lambda}{n}, 1 - \frac{2\lambda}{n})$ paraméterű polinomiális eloszlású. Így ξ_1 és ξ_2 is $(n, \frac{\lambda}{n})$ paraméterű binomiális eloszlású.

Továbbá, tetszőleges $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ esetén

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_2}\left(1-\frac{2\lambda}{n}\right)^{n-k_1-k_2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k_1-k_2+1)}{k_1!k_2!n^{k_1+k_2}}\lambda^{k_1+k_2}\left(1-\frac{2\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{2\lambda}{n}\right)^{-k_1-k_2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k_1!k_2!} \cdot \lambda^{k_1+k_2} \cdot \mathrm{e}^{-2\lambda} \cdot 1 \\
&= \frac{\lambda^{k_1}}{k_1!}\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k_2}}{k_2!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = k_1) \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi_2 = k_2).
\end{aligned}$$

A fentiek alapján elegendően nagy n esetén a kiválasztott két szeletben a mazsolák számának együttes eloszlása közelíthető (η_1, η_2) eloszlásával, ahol η_1 és η_2 független λ paraméterű Poisson eloszlású véletlen változók.

Polihipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban N darab színes golyó van; a színek száma r, az i-edik színből N_i golyó van $(N = N_1 + \cdots + N_r)$. Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leqslant N$), és ξ_i jelöli az i-edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén teljesül $0 \leqslant k_i \leqslant N_i$ és $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, továbbá

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = k_1,\, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, N_1, \ldots, N_r)$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i}\binom{N-N_i}{n-k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

Véletlen vektor sűrűségfüggvénye

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (Borel-mérhető) függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ véletlen vektor, illetve ξ eloszlása **abszolút folytonos.**

Sűrűségfüggvény jellemzési tétele

Egy $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye valamely k-dimenziós véletlen változónak, ha (Borel) mérhető, Lebesgue-majdnem mindenütt nemnegatív és $\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Ha ξ abszolút folytonos eloszlású véletlen vektor, akkor eloszlásfüggvénye folytonos.

Véletlen vektor sűrűségfüggvénye

Legyen ξ abszolút folytonos véletlen vektor f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Tetszőleges $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, k$, esetén

$$\mathrm{P}\{a_i \leqslant \xi_i < b_i,\ i = 1, \ldots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_k}^{b_k} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k.$$

Tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$\mathrm{P}\{(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in B\} = \underset{B}{\int \cdots \int} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k.$$

Ha F_ξ k-szor folytonosan differenciálható, akkor

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\partial^k F_\xi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1 \ldots \partial x_k}.$$

Ha a (ξ, η) véletlen vektornak létezik $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor a ξ, illetve η véletlen változónak is létezik sűrűségfüggvénye, mégpedig

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{m.m. } x \in \mathbb{R},$$
$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad \text{m.m. } y \in \mathbb{R}.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásainak / marginális eloszlásainak** a sűrűségfüggvényei.

Példa. *A* (ξ,η) *véletlen változó sűrűségfüggvénye legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} A(x+\frac{y}{2}) & \text{ha } 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $A>0$*. Határozzuk meg* A *értékét, illetve* ξ *és* η *sűrűségfüggvényeit!*

Ekkor $A \geqslant 0$ és

$$1 = \int_0^1 \left(\int_0^2 A\left(x+\frac{y}{2}\right)\,\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = A\int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= A\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x = A\left[2\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = 2A,$$

így $A=\frac{1}{2}$.

Továbbá,

$$
\begin{aligned}
f_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin (0,1), \\ \int_0^2 \frac{1}{2}\left(x+\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[xy+\frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = x+\frac{1}{2} & \text{ha } x \in (0,1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
f_\eta(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} 0 & \text{ha } y \notin (0,2), \\ \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x+\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{y}{2}x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{y}{4}+\frac{1}{4} & \text{ha } y \in (0,2). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Kétdimenziós egyenletes eloszlás

A (ξ, η) véletlen vektort egy $T \subseteq \mathbb{R}^2$ (Borel-mérhető) halmazon egyenletes eloszlásúnak nevezünk, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{|T|} & \text{ha } (x, y) \in T, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $|T|$ a T területét jelöli. Ekkor tetszőleges $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (Borel-mérhető) részhalmaz esetén

$$P((\xi, \eta) \in B) = \int_B f_{(\xi,\eta)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{|B \cap T|}{|T|}.$$

Független véletlen változók

A ξ és η véletlen változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi < x,\, \eta < y\} = \mathrm{P}\{\xi < x\}\,\mathrm{P}\{\eta < y\},$$

azaz $F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Független véletlen változók

Ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét véletlen változó $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall i, j \qquad \mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} = \mathrm{P}\{\xi = x_i\}\,\mathrm{P}\{\eta = y_j\}.$$

Ha létezik (ξ, η)-nak $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y).$$

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha a ξ és η véletlen változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi+\eta$ eloszlása a ξ és η **eloszlásának konvolúciója.**

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha ξ és η független diszkrét véletlen változók, és a lehetséges értékeik nemnegatív egész számok, akkor a

$$\{\xi+\eta=k\}=\bigcup_{j=0}^{k}(\{\xi=j\}\cap\{\eta=k-j\})$$

páronként diszjunkt felbontás alapján

$$\mathrm{P}\{\xi+\eta=k\}=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{P}\{\xi=j\}\,\mathrm{P}\{\eta=k-j\},\qquad k=0,1,\ldots$$

Ha a ξ és η független véletlen változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor $\xi+\eta$-nak is létezik sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(u)f_\eta(x-u)\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(x-u)f_\eta(u)\,\mathrm{d}u,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Példák:

1. Ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, ahol $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig $(n_1 + n_2, p)$ paraméterekkel:

$$\mathrm{P}(\xi + \eta = k) = \sum_{\substack{i,j\,:\,i+j=k\\ 0\leqslant i\leqslant n_1, 0\leqslant j\leqslant n_2}} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j}$$

$$= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n_1 + n_2.$$

2. Ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ paraméterekkel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

5. Várható érték

Intuíció:

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét véletlen változót $x_1, \dots, x_N$ lehetséges értékekkel.

n független kísérletet hajtunk végre.

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$\frac{k_n(A_k)}{n} = r_n(A_k) \approx \mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}\{\xi = x_k\},$$

ezért az x_k értéket körülbelül $n \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, hiszen $k_n(A_k) = n \cdot r_n(A_k) \approx n \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$.
Így **a megfigyelt értékek átlaga körülbelül**

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot n \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}.$$

5. Várható érték

Véletlen változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az

$$\mathrm{E}(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\} < \infty$.

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor az

$$\mathrm{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)\, \mathrm{d}x$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\, \mathrm{d}x < \infty$.

Példák:

1. Ha ξ n-edrendű és p-paraméterű binomiális eloszlású, akkor
$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$
2. Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor $\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{6}$, hiszen

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 1 - (1-2x)^2 & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_0^{1/2} x(4-8x)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

3. *Az A és B játékosok a következő játékot játsszák. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n-edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B-től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A-tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?*

   A játék 1 valószínűséggel véges sok lépésben véget ér, mert a játék befejezéséig történt dobások száma geometriai eloszlású $\frac{1}{2}$ paraméterrel. Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei $2, -4, 8, -16, \ldots$ és $\mathrm{P}\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}$, $\ldots$ Mivel

$$|2| \cdot \frac{1}{2} + |-4| \cdot \frac{1}{4} + |8| \cdot \frac{1}{8} + |-16| \cdot \frac{1}{16} + \cdots$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty,$$

   így ξ várható értéke nem létezik!

4. Legyen ξ olyan véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$ (Cauchy-eloszlás). Ekkor nem létezik $\mathrm{E}(\xi)$, mert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \infty$.

   Valóban,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[\ln(1+x^2)]_0^\infty = \infty.$$

5. Várható érték

A várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η (diszkrét vagy abszolút folytonos) véletlen változók (hogy várható értékük létezik és véges) és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $\mathrm{E}(a\xi) = a\,\mathrm{E}(\xi)$ (homogenitás)
- $\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi) + \mathrm{E}(\eta)$ (additivitás)
- $\mathrm{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathrm{E}\,\xi + b\,\mathrm{E}\,\eta$ (linearitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathrm{E}(\xi\eta) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta)$
- ha $\xi \leqslant \eta$, akkor $\mathrm{E}(\xi) \leqslant \mathrm{E}(\eta)$ (monotonitás)
- ha $\xi \geqslant 0$, akkor $\mathrm{E}(\xi) \geqslant 0$ (nemnegativitás)
- ha $\xi \geqslant 0$ és $\mathrm{E}(\xi) = 0$, akkor $\mathrm{P}(\xi = 0) = 1$
- $|\,\mathrm{E}(\xi)| \leqslant \mathrm{E}(|\xi|)$
- $\mathrm{E}(|\xi\eta|) \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(\xi^2)\ \mathrm{E}(\eta^2)}$ (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség)

5. Várható érték

Véletlen változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel-mérhető) függvény.

Ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{E}(g(\xi)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathrm{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x) \, \mathrm{d}x,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Példa. *Legyen* ξ *egy abszolút folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye:*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x^{-2} & ha \;\; x > 1, \\ 0 & ha \;\; x \leqslant 1. \end{cases}$$

Határozzuk meg $\frac{1}{\xi}$ *várható értékét!*

Ekkor

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^{-3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}.$$

Ellenőrizhető az is, hogy $\frac{1}{\xi}$ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

5. Várható érték

Véletlen vektor függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Borel-mérhető) függvény.

Ha ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \ldots,$ illetve $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{E}(g(\xi,\eta)) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} g(x_k, y_\ell) \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k, \eta = y_\ell\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha (ξ,η) abszolút folytonos véletlen vektor $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathrm{E}(g(\xi,\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{\xi,\eta}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Véletlen változó varianciája / szórásnégyzete

Legyen ξ egy véletlen változó, hogy $\mathrm{E}(\xi)$ létezik és véges. Ekkor

$$\mathrm{var}(\xi) := \mathrm{D}^2(\xi) := \mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}(\xi))^2\right].$$

Variancia / szórásnégyzet kiszámolása

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\xi) &= \mathrm{E}\left[\xi^2 - 2\xi\,\mathrm{E}(\xi) + (\mathrm{E}(\xi))^2\right] = \mathrm{E}(\xi^2) - 2\cdot\mathrm{E}(\xi)\cdot\mathrm{E}(\xi) + [\mathrm{E}(\xi)]^2\\ &= \mathrm{E}(\xi^2) - [\mathrm{E}(\xi)]^2,\end{aligned}$$

így ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{var}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}\right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvény-nyel, akkor

$$\mathrm{var}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Variancia / szórásnégyzet tulajdonságai

Ha ξ és η véletlen változók és $a, c \in \mathbb{R}$, akkor

- $\mathrm{var}(\xi) \geqslant 0$
- ha $\mathrm{var}(\xi) = 0$, akkor $\mathrm{P}(\xi = \mathrm{E}\,\xi) = 1$
- $\mathrm{var}(\xi + a) = \mathrm{var}(\xi)$ (eltolásinvariancia)
- $\mathrm{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \mathrm{var}(\xi)$
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathrm{var}(\xi + \eta) = \mathrm{var}(\xi) + \mathrm{var}(\eta)$ (additivitás)

Véletlen változó szórása

Legyen ξ egy véletlen változó, hogy $\mathrm{E}(\xi)$ létezik és véges. Ekkor

$$\mathrm{D}(\xi) := \sqrt{\mathrm{D}^2(\xi)} = \sqrt{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}(\xi))^2\right]} = \sqrt{\mathrm{E}(\xi^2) - (\mathrm{E}(\xi))^2}.$$

5. Várható érték

p paraméterű Bernoulli-eloszlás

Tekintsünk egy kísérletet, ebben egy A eseményt, melyre $p := \mathrm{P}(A)$. Ekkor

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét véletlen változó; lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p, \qquad \mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást p **paraméterű Bernoulli-eloszlásnak** nevezzük, mely nemmás mint elsőrendű p paraméterű binomiális eloszlás.

Nyilván

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\xi) &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \\ \mathrm{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p, \\ \operatorname{var} \xi &= \mathrm{E}(\xi^2) - [\mathrm{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned}$$

n-edrendű, p-paraméterű binomiális eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$; n független kísérlet; A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$ diszkrét véletlen változó; lehetséges értékeinek halmaza: $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ha

$$\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak. Ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{E}(\xi_1) + \cdots + \mathrm{E}(\xi_n) = np,$$
$$\mathrm{var}(\xi) = \mathrm{var}(\xi_1) + \cdots + \mathrm{var}(\xi_n) = np(1-p).$$

p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$, melyre $0 < p < 1$. Jelölje $\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek számát; lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, \infty$, eloszlása: $\mathrm{P}\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Mivel $\infty \cdot \mathrm{P}(\xi = \infty) = \infty \cdot 0 := 0$, kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2},$$

így

$$\mathrm{E}(\xi) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k + k(k-1)\right] \cdot p(1-p)^{k-1}$$
$$= p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2},$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\mathrm{var}(\xi) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

λ paraméterű Poisson-eloszlás

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \dots, \qquad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda,$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \big[k + k(k-1)\big] \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2,$$

$$\mathrm{var}(\xi) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Egyenletes eloszlás az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazon

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\mathrm{var}(\xi) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}.$$

Ekkor $\frac{\xi}{N}$ egyenletes eloszlású az $\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$ halmazon, és

$$\mathrm{E}\left(\frac{\xi}{N}\right) = \frac{N+1}{2N} \to \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \mathrm{D}^2\left(\frac{\xi}{N}\right) = \frac{N^2-1}{12N} \to \frac{1}{12} \quad \text{amint } N \to \infty.$$

Egyenletes eloszlás az (a, b) intervallumon

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor $\xi \sim a + (b-a)\cdot\eta$, ahol η egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, hiszen

$$\mathrm{P}\{a + (b-a)\cdot\eta < x\} = \mathrm{P}\left\{\eta < \frac{x-a}{b-a}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \frac{x-a}{b-a} \leqslant 0, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } 0 < \frac{x-a}{b-a} \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha } \frac{x-a}{b-a} > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\eta) = \int_0^1 y \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}(\eta^2) = \int_0^1 y^2 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{var}(\eta) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = a + (b-a)\,\mathrm{E}(\eta) = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{var}(\xi) = (b-a)^2 \,\mathrm{var}(\eta) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

λ paraméterű exponenciális eloszlás

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{ahol } \lambda > 0.$$

Ekkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E(\xi) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Standard normális eloszlás

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\mathsf{E}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K \to -\infty \\ L \to +\infty}} \left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\eta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1,\end{aligned}$$

$$\mathrm{var}(\eta) = \mathsf{E}(\eta^2) - \big[\,\mathsf{E}(\eta)\big]^2 = 1.$$

5. Várható érték

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \qquad \text{(ez } \xi \text{ standardizáltja)}$$

standard normális eloszlású, hiszen η eloszlásfüggvénye

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < x\right\} = \mathsf{P}\{\xi < \sigma \cdot x + m\} = F_\xi(\sigma \cdot x + m),$$

ahol $x \in \mathbb{R}$, így η sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = \sigma \cdot F_\xi'(\sigma x + m) = \sigma \cdot f_\xi(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

ahol $x \in \mathbb{R}$, ezért

$$\mathsf{E}(\xi) = \sigma \cdot \mathsf{E}(\eta) + m = m, \qquad \mathrm{var}(\xi) = \sigma^2 \cdot \mathrm{var}(\eta) = \sigma^2.$$

5. Várható érték

Momentumok, ferdeség, csúcsosság / lapultság

Legyen ξ véletlen változó, k pozitív egész. Ekkor

- ***k*-adik momentum:** $\mathrm{E}(\xi^k)$
- ***k*-adik centrális momentum:** $\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^k\right]$
- ***k*-adik abszolút momentum:** $\mathrm{E}\left(|\xi|^k\right)$
- ***k*-adik abszolút centrális momentum:** $\mathrm{E}\left[|\xi - \mathrm{E}\,\xi|^k\right]$
- **ferdeség:** $\dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^3\right]}{\left(\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2\right]\right)^{3/2}} = \dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^3\right]}{\left(\mathrm{var}(\xi)\right)^{3/2}}$
- **csúcsosság:** $\dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^4\right]}{\left(\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2\right]\right)^{2}} - 3 = \dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^4\right]}{\left(\mathrm{var}(\xi)\right)^{2}} - 3$

Tehát $\mathrm{E}(\xi)$ az első momentum, $\mathrm{var}(\xi)$ pedig a második (abszolút) centrális momentum.

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa. Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $\mathsf{E}(\eta) = 0$, $\mathrm{var}(\eta) = 1$,

$$\mathsf{E}(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 3\,\mathsf{E}(\eta^2) = 3,\end{aligned}$$

ezért η ferdesége és csúcsossága is 0.

Ha ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor $\xi = \sigma\,\eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége és csúcsossága is 0.

Véletlen változók kovarianciája

Ha ξ és η véletlen változók, hogy $\mathsf{E}(\xi^2) < \infty$ és $\mathsf{E}(\eta^2) < \infty$, akkor

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) := \mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}\,\xi)(\eta - \mathsf{E}\,\eta)\right].$$

Kovariancia kiszámítása és addíciós képlet

Ha ξ és η véletlen változók, hogy $\mathsf{E}(\xi^2) < \infty$ és $\mathsf{E}(\eta^2) < \infty$, akkor

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}(\xi)\,\mathsf{E}(\eta),$$

$$\mathrm{var}(\xi \pm \eta) = \mathrm{var}(\xi) \pm 2\,\mathrm{cov}(\xi,\eta) + \mathrm{var}(\eta).$$

Valóban,

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\xi,\eta) &= \mathsf{E}(\xi\eta - \xi\,\mathsf{E}\,\eta - \eta\,\mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\xi\,\mathsf{E}\,\eta) \\ &= \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}(\xi)\,\mathsf{E}(\eta) - \mathsf{E}(\eta)\,\mathsf{E}(\xi) + \mathsf{E}(\xi)\,\mathsf{E}(\eta) \\ &= \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}(\xi)\,\mathsf{E}(\eta).\end{aligned}$$

Véletlen változók korrelációs együtthatója

Feltéve, hogy $0 < \mathrm{var}(\xi) < \infty$ és $0 < \mathrm{var}(\eta) < \infty$,

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) := \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{var}(\xi) \cdot \mathrm{var}(\eta)}}.$$

Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$, azaz $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **és** η **korrelálatlanok.**

Ha

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) > 0, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{cov}(\xi, \eta) > 0,$$

akkor ξ **és** η **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) < 0, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{cov}(\xi, \eta) < 0,$$

akkor ξ **és** η **negatívan korreláltak.**

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz (lásd a következő példát).

Példa. Legyen a (ξ, η) véletlen vektor egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontokon, azaz

$$\mathrm{P}\{\xi=-1, \eta=0\}=\mathrm{P}\{\xi=0, \eta=-1\}=\mathrm{P}\{\xi=0, \eta=1\}=\mathrm{P}\{\xi=1, \eta=0\}=\frac{1}{4}.$$

Ekkor $\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{E}(\eta) = 0$ és $\mathrm{E}(\xi\eta) = 0$ miatt

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi\eta) - \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta) = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$\mathrm{P}\{\xi = -1\} = \mathrm{P}\{\xi = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}\{\xi = 0\} = \frac{1}{2},$$
$$\mathrm{P}\{\eta = -1\} = \mathrm{P}\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{2},$$

ezért ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$\mathrm{P}\{\xi = 1,\, \eta = 0\} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}\{\xi = 1\} \cdot \mathrm{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{8}.$$

Kovariancia és korrelációs együttható tulajdonságai

- $\operatorname{var}(\xi) = \operatorname{cov}(\xi, \xi)$
- Ha ξ és η véletlen változók, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi), \qquad \operatorname{corr}(\xi, \eta) = \operatorname{corr}(\eta, \xi) \qquad \text{(szimmetria)}$$

- Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ és $\eta_1, \ldots, \eta_m$ véletlen változók és $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) \qquad \text{(bilinearitás)}$$

- $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| \leqslant 1$, és $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $\mathrm{P}\{\eta = a \cdot \xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = -1$.

5. Várható érték

$(n, M, N-M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban M piros és $N-M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leqslant N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \leqslant M$, és $n-k \leqslant N-M$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$ akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$,

és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ véletlen változók $\frac{M}{N}$-paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \neq j$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi_i = 1,\, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}, \qquad \mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

$$\mathsf{E}(\xi) = \mathsf{E}(\xi_1) + \cdots + \mathsf{E}(\xi_n) = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\xi) &= \operatorname{cov}(\xi, \xi) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(\xi_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),\end{aligned}$$

ahol

$$\operatorname{var}(\xi_i) = \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right), \qquad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{M(M-N)}{N^2(N-1)},$$

így

$$\operatorname{var}(\xi) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

5. Várható érték

Véletlen mátrix

$$\xi = (\xi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\, 1\leqslant j\leqslant \ell} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times\ell},$$

ahol $\xi_{i,j} : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$ véletlen változók.

Véletlen mátrix várható érték mátrixa

Legyen $\xi = (\xi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\, 1\leqslant j\leqslant \ell} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times\ell}$ véletlen mátrix.
Ha tetszőleges $i \in \{1, \dots, k\}$ és $j \in \{1, \dots, \ell\}$ esetén $\mathsf{E}(|\xi_{i,j}|) < \infty$, akkor ξ **várható érték mátrixa**

$$\mathsf{E}(\xi) := \big(\mathsf{E}(\xi_{i,j})\big)_{1\leqslant i\leqslant k,\, 1\leqslant j\leqslant \ell} \in \mathbb{R}^{k\times\ell}.$$

Várható érték mátrix tulajdonságai

Legyen $\xi = (\xi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\, 1\leqslant j\leqslant \ell} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times\ell}$ véletlen mátrix, melyre tetszőleges $i \in \{1, \dots, k\}$ és $j \in \{1, \dots, \ell\}$ esetén $\mathsf{E}(|\xi_{i,j}|) < \infty$.
Ha $A \in \mathbb{R}^{r\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times s}$, akkor $\mathsf{E}(A\xi B) = A\,\mathsf{E}(\xi)B$.

Véletlen vektor kovarianciamátrixa (szórásmátrixa)

Legyen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ha $\mathsf{E}(\|\xi\|^2) < \infty$, azaz $\mathsf{E}(\xi_1^2) < \infty, \ldots, \mathsf{E}(\xi_d^2) < \infty$, akkor ξ **kovarianciamátrixa**

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) := \mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi))(\xi - \mathsf{E}(\xi))^\top\right] \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

melynek elemei $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) := \mathsf{E}\left[(\xi_i - \mathsf{E}(\xi_i))(\xi_j - \mathsf{E}(\xi_j))\right]$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$.

Kovarianciamátrix tulajdonságai

Legyen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, $\mathsf{E}(\|\xi\|^2) < \infty$.

- $\operatorname{cov}(\xi, \xi)$ szimmetrikus: $\operatorname{cov}(\xi, \xi)^\top = \operatorname{cov}(\xi, \xi)$.
- $\operatorname{cov}(\xi, \xi)$ pozitív szemidefinit, azaz $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$ esetén
$$x^\top \operatorname{cov}(\xi, \xi) x = \langle \operatorname{cov}(\xi, \xi) x, x \rangle = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j \geqslant 0.$$
- Ha $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$ és $b \in \mathbb{R}^r$, akkor $\operatorname{cov}(A\xi + b, A\xi + b) = A \operatorname{cov}(\xi, \xi) A^\top$.

Feltételes valószínűség

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$, hogy $\mathrm{P}(B) > 0$. Ekkor a $\mathrm{P}_B : \mathcal{A} \to [0,1]$, $\mathrm{P}_B(A) := \mathrm{P}(A \mid B)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvény valószínűségi mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren, azaz $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}_B)$ valószínűségi mező.

Feltételes valószínűség

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$, hogy $\mathrm{P}(B) > 0$. Legyen továbbá $\mathcal{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$. Ekkor $\mathcal{A}_B$ σ-algebra és a $\mathrm{P}_B : \mathcal{A}_B \to [0,1]$, $\mathrm{P}_B(A) := \mathrm{P}(A \mid B)$, $A \in \mathcal{A}_B$, halmazfüggvény valószínűségi mérték a $(B, \mathcal{A}_B)$ mérhető téren, azaz $(B, \mathcal{A}_B, \mathrm{P}_B)$ valószínűségi mező.

Diszkrét véletlen változó feltételes eloszlása, feltételes várható értéke, feltételes varianciája

Legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Ha X diszkrét véletlen változó $\mathrm{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, eloszlással, akkor X-nek a B-re vonatkozó **feltételes eloszlása**

$$\mathrm{P}(X = x_k \,|\, B) = \mathrm{P}_B(X = x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

feltételes várható értéke

$$\mathrm{E}(X|B) := \sum_k x_k \cdot \mathrm{P}(X = x_k \,|\, B) = \sum_k x_k \cdot \mathrm{P}_B(X = x_k),$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum\limits_k |x_k| \cdot \mathrm{P}(X = x_k \,|\, B) < \infty$, **feltételes varianciája** pedig

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X|B) &:= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X|B))^2 | B\right] = \mathrm{E}(X^2|B) - \left[\mathrm{E}(X|B)\right]^2 \\ &= \sum_k x_k^2 \cdot \mathrm{P}(X = x_k \,|\, B) - \left(\sum_k x_k \cdot \mathrm{P}(X = x_k \,|\, B)\right)^2,\end{aligned}$$

amennyiben a $\sum_k x_k^2 \cdot \mathrm{P}(X = x_k \,|\, B)$ sor konvergens.

6. Feltételes várható érték

- Ha X diszkrét véletlen változó, akkor a $\mathrm{P}(X = x_k \mid B)$, $k \in \mathbb{N}$, számok eloszlást alkotnak, hiszen nemnegatívak, és összegük 1:

$$\sum_k \mathrm{P}(X = x_k \mid B) = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \sum_k \mathrm{P}(\{X = x_k\} \cap B)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \mathrm{P}\left(\bigcup_k (\{X = x_k\} \cap B)\right) = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_k \{X = x_k\}\right) \cap B\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \mathrm{P}(\Omega \cap B) = 1.$$

- Speciálisan, ha B egy olyan esemény, melyre $\mathrm{P}(B) = 1$ (pl.: $B = \Omega$ esetén), akkor X-nek a B-re vonatkozó feltételes eloszlása, várható értéke, ill. varianciája megegyezik X eloszlásával, várható értékével, ill. varianciájával.
- Ha $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, akkor tetszőleges pozitív valószínűségű B esemény esetén $\mathrm{E}(|X| \mid B) < \infty$.

6. Feltételes várható érték

Mi a két szabályos dobókockával dobott számok eltérésének feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a dobott számok összege ℓ ?

Jelölje a dobott számokat X és Y. Nyilván $\ell \in \{2, 3, \ldots, 12\}$ és

$$\mathrm{P}(X + Y = \ell) = \begin{cases} \frac{\ell-1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant \ell \leqslant 7, \\ \frac{13-\ell}{36} & \text{ha } 7 \leqslant \ell \leqslant 12. \end{cases}$$

Továbbá $|X - Y|$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4,5, és $\ell \in \{2, \ldots, 6\}$ esetén a szóbanforgó feltételes eloszlás valószínűségei:

$$\mathrm{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 2) = 1, \qquad \mathrm{P}(|X - Y| = 1 \mid X + Y = 3) = 1,$$

$$\mathrm{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 4) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(|X - Y| = 2 \mid X + Y = 4) = \frac{2}{3},$$

$$\mathrm{P}(|X - Y| = 1 \mid X + Y = 5) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(|X - Y| = 3 \mid X + Y = 5) = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 6) = \frac{1}{5}, \qquad \mathrm{P}(|X - Y| = 2 \mid X + Y = 6) = \frac{2}{5},$$

$$\mathrm{P}(|X - Y| = 4 \mid X + Y = 6) = \frac{2}{5}.$$

6. Feltételes várható érték

A fenti feltételes valószínűségek $\ell = 6$ esetén az alábbi módon határozhatóak meg. Mivel

$$\{X+Y=6\} = \{X=1, Y=5\} \cup \{X=2, Y=4\} \cup \{X=3, Y=3\} \cup \{X=4, Y=2\} \cup \{X=5, Y=1\},$$

az $\{X+Y=6\}$ esemény bekövetkezése esetén $|X-Y|$ lehetséges értékei $0, 2, 4$, és

$$\{|X-Y|=0\} = \{X=3, Y=3\},$$
$$\{|X-Y|=2\} = \{X=2, Y=4\} \cup \{X=4, Y=2\},$$
$$\{|X-Y|=4\} = \{X=1, Y=5\} \cup \{X=5, Y=1\}.$$

Ezért

$$P(|X-Y|=0 \mid X+Y=6) = \frac{P(|X-Y|=0, X+Y=6)}{P(X+Y=6)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5},$$
$$P(|X-Y|=2 \mid X+Y=6) = \frac{P(|X-Y|=2, X+Y=6)}{P(X+Y=6)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5},$$
$$P(|X-Y|=4 \mid X+Y=6) = \frac{P(|X-Y|=4, X+Y=6)}{P(X+Y=6)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$

6. Feltételes várható érték

Abszolút folytonos véletlen változó feltételes eloszlása, feltételes várható értéke

Egy tetszőleges valós értékű X véletlen változónak a B pozitív valószínűségű eseményre vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvénye** $F_{X|B} : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_{X|B}(x) := \mathrm{P}(X < x \mid B) = \mathrm{P}_B(X < x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ha létezik egy olyan Borel-mérhető $f_{X|B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F_{X|B}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(u)\,\mathrm{d}u$$

teljesül tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $f_{X|B}$ függvényt X-nek a B-re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Az $F_{X|B}$ feltételes eloszlásfüggvény nemmás, mint X-nek a P_B valószínűségi mérték melletti eloszlásfüggvénye. Az $f_{X|B}$ feltételes sűrűségfüggvény amennyiben létezik Borel-mérhető, Lebesgue-majdnem mindenütt nemnegatív és $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|B}(u)\,\mathrm{d}u = 1$, és így (szokásos) sűrűségfüggvény.

6. Feltételes várható érték

Abszolút folytonos véletlen változó feltételes várható értéke és varianciája

Ha létezik az $f_{X|B}$ feltételes sűrűségfüggvény, akkor X-nek a B-re vonatkozó **feltételes várható értéke**

$$\mathrm{E}(X|B) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x < \infty$; **feltételes varianciája** pedig

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X|B) &:= \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X|B))^2|B\right] = \mathrm{E}(X^2|B) - \left[\mathrm{E}(X|B)\right]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,\end{aligned}$$

amennyiben $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Ha létezik az $f_{X|B}$ feltételes sűrűségfüggvény és $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, akkor tetszőleges pozitív valószínűségű B esemény esetén $\mathrm{E}(|X| \mid B) < \infty$.

6. Feltételes várható érték

Példa: Legyen X standard normális eloszlású, és $B := \{X \geqslant 0\}$.
Ekkor $\mathrm{P}(B) = 1/2$, és

$$F_{X|B}(x) = \frac{\mathrm{P}(0 \leqslant X < x)}{\mathrm{P}(X \geqslant 0)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 2\,\mathrm{P}(0 \leqslant X < x) & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ha $x > 0$, akkor tehát

$$F_{X|B}(x) = 2(\Phi(x) - \Phi(0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Így X-nek a B-re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ezért X-nek a B-re vonatkozó feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Továbbá, ha $Y := |X|$, akkor

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(|X| < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \mathrm{P}(-x < X < x) & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 2\,\mathrm{P}(0 \leqslant X < x) & \text{ha } x > 0, \end{cases} = F_{X|B}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

azaz X-nek a B-re vett feltételes eloszlása megegyezik $|X|$ eloszlásával.

Abszolút folytonos véletlen változóra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvény, feltételes várható érték

Legyen (X, Y) abszolút folytonos véletlen vektor $f_{X,Y}$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $\boldsymbol{X}$ **feltételes sűrűségfüggvénye az** $\boldsymbol{Y = y}$ **feltételre nézve (ahol** $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}}$**):**

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

ahol f_Y az Y sűrűségfüggvénye, és h tetszőleges sűrűségfüggvény.

$\boldsymbol{X}$ **feltételes eloszlásfüggvénye az** $\boldsymbol{Y = y}$ **feltételre nézve:**

$$\mathrm{P}(X < x \mid Y = y) := \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$\boldsymbol{X}$ **feltételes várható értéke az** $\boldsymbol{Y = y}$ **feltételre nézve:**

$$\mathrm{E}(X|Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrál abszolút konvergens.

Megjegyzés. Legyen (X, Y) abszolút folytonos véletlen vektor $f_{X,Y}$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $y \in \mathbb{R}$ és tekintsük X feltételes sűrűségfüggvényét az $Y = y$ feltételre nézve: $\mathbb{R} \ni x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$.
Ekkor a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát felruházva a Borel-halmazok $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-algebrájával, a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \int_B f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u$$

halmazfüggvény valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en.

Továbbá, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezen valószínűségi mérték szerint a $(-\infty, x)$ halmaz (esemény) valószínűsége éppen $\mathrm{P}(X < x \mid Y = y)$, az (x, ∞) halmaz (esemény) valószínűsége pedig

$$\int_x^\infty f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{P}(X < x \mid Y = y).$$

Abszolút folytonos véletlen változóra vonatkozó feltételes variancia, regressziós görbe

***X* feltételes varianciája az *Y* = *y* feltételre nézve:**

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X|Y=y) &:= \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X|Y=y))^2|Y=y\right] \\ &= \mathrm{E}(X^2|Y=y) - \left[\mathrm{E}(X|Y=y)\right]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x\right)^2,\end{aligned}$$

feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x < \infty$.

***X* regressziós görbéje az *Y* feltételre nézve:**

az $\mathbb{R} \ni y \mapsto \mathrm{E}(X|Y=y)$ függvény.

Ez minimalizálja az $\mathrm{E}\left[(X-f(Y))^2\right]$ mennyiséget, azaz ha $\mathrm{E}(X^2) < \infty$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Borel-mérhető függvény, hogy $\mathrm{E}\left[f(Y)^2\right] < \infty$, akkor

$$\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X|Y))^2\right] \leqslant \mathrm{E}\left[(X-f(Y))^2\right].$$

Teljes várható érték tétel teljes eseményrendszerre vonatkozóan diszkrét esetben

Ha a $B_1, B_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, X egy diszkrét véletlen változó és $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, akkor

$$\mathrm{E}(X) = \sum_k \mathrm{E}(X \mid B_k) \cdot \mathrm{P}(B_k).$$

Bizonyítás. Legyen X diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_k \mathrm{E}(X \mid B_k) \cdot \mathrm{P}(B_k) &= \sum_k \sum_j x_j \, \mathrm{P}(X = x_j \mid B_k) \cdot \mathrm{P}(B_k) \\ &= \sum_k \sum_j x_j \, \mathrm{P}(\{X = x_j\} \cap B_k) = \sum_j x_j \sum_k \mathrm{P}(\{X = x_j\} \cap B_k) \\ &= \sum_j x_j \, \mathrm{P}(X = x_j) = \mathrm{E}(X),\end{aligned}$$

ahol az $\mathrm{E}(|X|) < \infty$ feltételt a szummák felcserélésénél használtuk.

Diszkrét véletlen változó teljes eseményrendszerre vonatkozó feltételes várható értéke

Legyen X egy diszkrét véletlen változó, hogy $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, és legyen $\mathcal{G}$ egy $B_1, B_2, \ldots$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer. Ekkor ***X*-nek a $\mathcal{G}$-re vonatkozó feltételes várható értékén** az

$$\mathrm{E}(X \mid \mathcal{G}) := \sum_k \mathrm{E}(X \mid B_k) \mathbb{1}_{B_k}$$

diszkrét véletlen változót értjük.

Az $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{G})$ véletlen változó a B_k eseményen az $\mathrm{E}(X \mid B_k)$ értéket veszi fel.

Példa:

Szabályos dobókockával addig dobunk, míg az első 6-os megjelenik.
Legyen $X :=$ az ehhez szükséges dobások száma.
Ekkor X geometriai eloszlású $\frac{1}{6}$-paraméterrel, így $\mathrm{E}(X) = 6$.

Az alábbiakban a teljes várható érték tétele alapján is meghatározzuk $\mathrm{E}(X)$-t.
Ekkor $B_k := \{\text{az első dobás } k\}$, $k = 1, \ldots, 6$, pozitív (1/6) valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer.
Mivel $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, a teljes várható érték tétele alapján

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{E}(X \mid B_k) \cdot \mathrm{P}(B_k)$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mathrm{E}(X \mid B_k) = \begin{cases} 1 + \mathrm{E}(X) & \text{ha } 1 \leqslant k \leqslant 5, \\ 1 & \text{ha } k = 6. \end{cases}$$

6. Feltételes várható érték

Nyilván, $\mathrm{P}(X = 1 \mid B_6) = 1$ és így $\mathrm{E}(X \mid B_6) = 1 \cdot 1 = 1$.
Ha $1 \leqslant k \leqslant 5$, akkor

$$\mathrm{E}(X \mid B_k) = \mathrm{E}(1 + X - 1 \mid B_k) = 1 + \mathrm{E}(X - 1 \mid B_k) = 1 + \mathrm{E}(X),$$

ahol az utolsó lépés abból következik, hogy $X - 1$-nek a B_k-ra ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik X eloszlásával, ugyanis $X - 1$ értékkészlete $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathrm{P}(X - 1 = 0 \mid B_k) = 0$ és

$$\mathrm{P}(X - 1 = n \mid B_k) = \frac{\mathrm{P}(X - 1 = n, B_k)}{\mathrm{P}(B_k)} = \frac{\mathrm{P}(X = n + 1, B_k)}{\mathrm{P}(B_k)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}\big(\{\text{az első dobás } k\} \cap \{\text{a } 2., \ldots, n. \text{ dobás nem 6-os}\} \cap \{\text{az } (n+1). \text{ dobás 6-os}\}\big)}{\mathrm{P}(B_k)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \mathrm{P}(X = n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6}\big(1 + 5(1 + \mathrm{E}(X))\big),$$

amiből $\mathrm{E}(X) = 6$.

6. Feltételes várható érték

Az $\mathrm{E}(X \mid B_k)$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, feltételes várható értékeket (is) számolhatjuk direktben (definíció alapján).

Ha $1 \leqslant k \leqslant 5$, akkor $\mathrm{P}(X = 1 \mid B_k) = 0$ és

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X = n \mid B_k) \\
&= \frac{\mathrm{P}\big(\{\text{az első dobás } k\} \cap \{\text{a } 2., \dots, (n-1). \text{ dobás nem 6-os}\} \cap \{\text{az } n. \text{ dobás 6-os}\}\big)}{\mathrm{P}(B_k)} \\
&= \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \\
&= \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots .
\end{aligned}
$$

Így $k = 1, \dots, 5$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \mid B_k) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \sum_{n=2}^{\infty} (x^n)' \Big|_{x=5/6} \\
&= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n \right)' \Big|_{x=5/6} = \frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' \Big|_{x=5/6} \\
&= \frac{1}{5} \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \Big|_{x=5/6} = 7.
\end{aligned}$$

Ezért $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 5 \cdot 7) = 6.$

Továbbá, X-nek a $\mathcal{G} := \{B_1, \ldots, B_6\}$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszerre vonatkozó feltételes várható értéke az

$$\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) = 7(\mathbb{1}_{B_1} + \cdots + \mathbb{1}_{B_5}) + 1 \cdot \mathbb{1}_{B_6} = 7 \cdot \mathbb{1}_{\Omega \setminus B_6} + 1 \cdot \mathbb{1}_{B_6}$$

diszkrét véletlen változó. Azaz

$$\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} 7 & \text{ha } \omega \notin B_6, \\ 1 & \text{ha } \omega \in B_6. \end{cases}$$

6. Feltételes várható érték

Teljes valószínűség- és teljes várható érték tétele együttesen abszolút folytonos esetben

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ egy abszolút folytonos véletlen vektor $f_{X,Y}$ sűrűségfüggvénnyel.
Jelölje f_Y az Y sűrűségfüggvényét.

1. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathrm{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(X < x \mid Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

2. Ha $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, akkor

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Példa: Válasszunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot a $(0,1)$ intervallumon, jelölje ezt Y. Tekintsük a $(0, Y)$ véletlen intervallumot és legyen X egyenletes eloszlású ezen az intervallumon. Határozzuk meg X várható értékét!

A feltételek alapján Y egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, és tetszőleges $y \in (0,1)$ esetén X-nek az $Y = y$ feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{ha } x \in (0,y), \\ 0 & \text{ha } x \notin (0,y), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A teljes várható érték tétele alapján

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid Y = y)\,\mathrm{d}y,$$

ahol

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}.$$

Ezért

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

Markov-egyenlőtlenség

Ha ξ egy nemnegatív véletlen változó, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{E}(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás: Ha ξ diszkrét véletlen változó nemnegatív $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\} \geqslant \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$$
$$\geqslant \varepsilon \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} \mathrm{P}\{\xi = x_k\} = \varepsilon \cdot \mathrm{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos nemnegatív valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor $f_\xi(x) = 0$ ha $x \leqslant 0$, ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\varepsilon^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon \int_\varepsilon^\infty f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon \cdot \mathrm{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség

Tetszőleges ξ véletlen változó, melyre $\mathsf{E}(\xi)$ létezik és véges, és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás: A Markov-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}(\xi)| \geqslant \varepsilon\} = \mathsf{P}\{(\xi - \mathsf{E}(\xi))^2 \geqslant \varepsilon^2\} \leqslant \frac{\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi))^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bernoulli-féle nagy számok törvénye

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{k_n(A)}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

és azt mondjuk, hogy $\frac{k_n(A)}{n}$ **sztochasztikusan konvergál** p-hez, amint $n \to \infty$.

Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként korrelálatlan, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek véges a második momentumuk. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \mathsf{E}(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}(\xi_1) \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Bizonyítás: Legyen $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ekkor $\mathsf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}(\xi_k) = \mathsf{E}(\xi_1)$

és $\operatorname{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \operatorname{var}(\xi_k) = \frac{\operatorname{var}(\xi_1)}{n}$,

ezért a Csebisev-egyenlőtlenséggel

$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathsf{E}(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\operatorname{var}(\xi_1)}{n\varepsilon^2} \to 0$ ha $n \to \infty$. $\blacksquare$

7. Nagy számok törvényei

Mivel $k_n(A) = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, ezért ebből következik a Bernoulli-féle nagy számok törvénye.

Csebisev-egyenlőtlenséggel $\mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}$.

Példa. *Hányszor kell egy szabályos érmét feldobni, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől ($1/2$-től)?*

Jelölje a szükséges dobások számát n. Olyan n-et keresünk, melyre:

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0,1\right\} \geqslant 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,1\right\} \leqslant 0.05.$$

A fentiek alapján

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,1\right\} \leqslant \frac{1}{4 \cdot (0.1)^2 \cdot n}.$$

Így a követelmény biztosan teljesül, ha

$$\frac{1}{4 \cdot (0.1)^2 \cdot n} \leqslant 0.05, \qquad \text{azaz } n \geqslant 500,$$

vagyis az érmével legalább 500-szor kell dobni.

Nagy számok erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (teljesen) független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathrm{E}(|\xi_1|) < \infty$. Ekkor

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = \mathrm{E}(\xi_1)\right\} = 1.$$

8. Centrális határeloszlás-tételek

Jelölje φ_{m,σ^2} az (m,σ^2) paraméterű ($m\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$) normális eloszlás sűrűségfüggvényét, azaz $\varphi_{m,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Lokális határeloszlás-tétel

n független kísérlet, A esemény, $p := \mathrm{P}(A)\in(0,1)$,

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor

$$\mathrm{P}\{k_n(A)=k\} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\approx \varphi_{np,np(1-p)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}.$$

Pontosabban, ha $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ egy olyan valós számsorozat, melyre $\psi_n = o(n^{2/3})$ ha $n\to\infty$, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2/3}\psi_n = 0$, akkor

$$\sup_{k\,:\,|k-np|\leqslant\psi_n}\left|\frac{\mathrm{P}\{k_n(A)=k\}}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} - 1\right| \to 0 \qquad \text{ha } n\to\infty.$$

8. Centrális határeloszlás-tételek

Jelölje Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, azaz

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Moivre-Laplace-tétel (”globális” alak)

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathrm{P}(A) \in (0,1)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{k_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x \right\} = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sőt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty} \left| \mathrm{P}\left\{ \frac{k_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in [a,b) \right\} - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| = 0.$$

Példa. *Hányszor kell egy szabályos érmét feldobni, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől (1/2-től)?*

A fejek számának $k_n(A)$ gyakoriságára tetszőleges $a > 0$ esetén fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{k_n(A) - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \in [-a, a) \right\} = \Phi(a) - \Phi(-a),$$

így

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{a}{2\sqrt{n}}, \frac{a}{2\sqrt{n}} \right) \right\} = 2\Phi(a) - 1.$$

Ezért elég nagy n-re:

$$\mathrm{P}\left\{ \left| \frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{a}{2\sqrt{n}} \right\} \approx 2\Phi(a) - 1.$$

Mivel a

$$2\Phi(a) - 1 = 0.95, \qquad \frac{a}{2\sqrt{n}} = 0.1$$

összefüggésekből $a \approx 1.96$ (táblázat alapján) és $n \approx 96$ adódik, így

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0,1\right\} \approx 0.95 \qquad \text{ha } n \approx 96.$$

Tehát elég *körülbelül* 96-szor dobni egy szabályos érmével ahhoz, hogy a fejek számának relatív gyakorisága *körülbelül* 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől ($1/2$-től).

8. Centrális határeloszlás-tételek

Centrális határeloszlás-tétel (”globális” alak)

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathrm{E}(\xi_1^2) < \infty$ és $\mathrm{var}(\xi_1) \neq 0$. Legyen

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} < x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R},$$

azaz $\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, ha $n \to \infty$. Szimbolikusan: $\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$, ha $n \to \infty$.

Mivel $k_n(A) = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, ezért ebből következik a Moivre-Laplace-tétel (első része).