

Valószínűségelmélet

BARCZY MÁTYÁS*, PAP GYULA

* Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, HUN-REN-SZTE Analízis és Alkalmazásai Kutatócsoport

e-mail: barczy@math.u-szeged.hu (Barczy Mátyás)

Tartalomjegyzék

1. Mértékelméleti előkészítés, valószínűségi mező, véletlen (valószínűségi) változók	3
2. Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye	16
3. Várható érték	28
4. Karakterisztikus függvény, generátorfüggvény, Laplace-transzformált	60
5. Nevezetes eloszlások	90
6. Többdimenziós normális eloszlás	102
7. Véletlen vektorok sorozatának konvergenciafajtái	109
8. Feltételes valószínűség, feltételes várható érték, reguláris feltételes eloszlás	138
9. Nagy számok gyenge törvényei	164
10. Nagy számok erős törvényei	167
11. Centrális határeloszlás-tétel és Poisson konvergenciatétel	178
12. Sztochasztikus folyamatok, véges dimenziós eloszlások	194
13. Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciatétel	202
14. Poisson-folyamat (homogén, inhomogén, összetett)	217
15. Diszkrét idejű martingálok	250
A. Appendix: Legközelebbi pont és néhány tulajdonsága	267

B. Appendix: Kompakt regularitás	270
C. Appendix: Függvények és sorozatok konvolúciója	272
D. Appendix: Néhány idősoranalízisből elmaradt eredmény	281

1. Mértékelméleti előkészítés, valószínűségi mező, véletlen (valószínűségi) változók

Jelölje $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ és $\mathbb{C}$ az egész-, pozitív egész-, nemnegatív egész-, racionális, valós, nemnegatív valós-, illetve komplex számok halmazát. Ha Ω egy nemüres halmaz és $\mathcal{A}$ egy részhalmaza Ω -nak, akkor ezt $A \subset \Omega$ módon fogjuk jelölni (ahol $\subset$ nem feltétlenül szigorú tartalmazást jelöl, azaz $A \subset \Omega$ esetén $A = \Omega$ is lehetséges).

1.1. Definíció. Legyen Ω egy nemüres halmaz. Az Ω bizonyos részhalmazaiából álló $\mathcal{H}$ halmazrendszert **halmazalgebrának** nevezzük, ha

- (i) $\Omega \in \mathcal{H}$,
- (ii) zárt az unióképzésre, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{H}$,
- (iii) zárt a komplementerképzésre, azaz tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\bar{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{H}$.

Az $\mathcal{A}$ halmazalgebrát **σ -algebrának** nevezzük, ha (ii) következő erősebb változata teljesül:

- (ii') zárt a megszámlálható unióképzésre, azaz tetszőleges $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt **mérhetőségi térnek (mérhető térnek)** nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az 1.1. Definícióban az (i) feltétel helyettesíthető azzal, hogy $\mathcal{H} \neq \emptyset$, hiszen ekkor létezik $A \in \mathcal{H}$, és a (iii) tulajdonság miatt $\bar{A} \in \mathcal{H}$ is teljesül, melyből a (ii) tulajdonság miatt $\Omega = A \cup \bar{A} \in \mathcal{H}$ is fennáll. Megjegyezzük továbbá, hogy az 1.1. Definíció jelölései mellett, ha $\mathcal{H}$ az Ω nemüres halmaz bizonyos részhalmazaiából álló halmazalgebra, akkor teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $A_k \in \mathcal{H}$, $k = 1, \dots, n$, halmazok esetén $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{H}$.

1.2. Definíció. Legyen Ω nemüres halmaz és $\mathcal{H}$ az Ω bizonyos részhalmazaiából álló halmazalgebra. Azt mondjuk, hogy a $\mu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ halmazfüggvény

- **végesen additív**, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ diszjunkt halmazok esetén $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- **mérték**, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és **σ -additív**, azaz tetszőleges olyan $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok esetén, melyekre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$, teljesül, hogy

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ mérték

- **véges**, ha $\mu(\Omega) < \infty$.
- **valószínűségi mérték**, ha $\mu(\Omega) = 1$.
- **σ -véges**, ha léteznek olyan $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ halmazok, hogy $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$, és $\mu(\Omega_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, \infty]$ halmazfüggvény **előjeles mérték**, ha előáll $\mu = \mu_1 - \mu_2$ alakban, ahol μ_1, μ_2 mértékek, és legalább az egyik véges.

1.3. Megjegyzés. Az 1.2. Definíció jelölései mellett, ha $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ végesen additív halmazfüggvény, akkor teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok esetén $\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$. $\square$

1.4. Definíció. Legyen Ω nemüres halmaz. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$.

Ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ és $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \uparrow A$, ha $n \rightarrow \infty$.

Ha $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ és $A := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \downarrow A$, ha $n \rightarrow \infty$.

1.5. Állítás. Legyen Ω nemüres halmaz és $\mathcal{H}$ az Ω bizonyos részhalmazaiából álló halmazalgebra. Legyen $\mathbb{P} : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ olyan végesen additív halmazfüggvény, melyre $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Ekkor

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- (ii) tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
- (iii) tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- (iv) $\mathbb{P}$ **monoton**, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$ esetén $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, továbbá $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
- (v) a következő állítások ekvivalensek:
 - (a) $\mathbb{P}$ σ -additív.
 - (b) $\mathbb{P}$ **alulról folytonos**, azaz tetszőleges $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$, $A_n \uparrow A$ és $A \in \mathcal{H}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.
 - (c) $\mathbb{P}$ **felülről folytonos**, azaz tetszőleges $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$, $A_n \downarrow A$ és $A \in \mathcal{H}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

- (d) $\mathbb{P}$ „felülről folytonos az üres halmazon”, azaz tetszőleges $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ és $A_n \downarrow \emptyset$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

1.6. Állítás. Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér és $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ valószínűségi mérték. Ekkor

(i) $\mathbb{P}$ végesen additív;

(ii) $\mathbb{P}$ σ -szubadditív, azaz tetszőleges $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ esetén $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$.

Bizonyítás. (ii). Mivel $\mathbb{P}$ végesen additív és monoton, tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

és teljes indukcióval adódik, hogy

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k+1}^\infty A_n\right).$$

A $B_k := \bigcup_{n=k}^\infty A_n$, $k \in \mathbb{N}$, jelöléssel $B_k \downarrow \emptyset$, ha $k \rightarrow \infty$, és felhasználva, hogy $\mathbb{P}$ felülről folytonos az üres halmazon (1.5. Állítás (v) része), kapjuk, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, amiből következik az állítás. $\square$

Nyilván σ -algebrák tetszőleges, nem nulla számosságú halmazának metszete σ -algebra.

1.7. Definíció. Legyen Ω nemüres halmaz és $\mathcal{H}$ az Ω bizonyos részhalmazából álló halmazalgebra. Legyen Γ nemüres halmaz és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{H}$. Az A_γ , $\gamma \in \Gamma$, halmazokat tartalmazó σ -algebrák metszetét az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazok által generált σ -algebrának nevezzük. Jelölése: $\sigma(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az 1.7. Definícióbeli $\sigma(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ generált σ -algebra jóldefiniált ugyanis σ -algebrák tetszőleges, nem nulla számosságú metszete is σ -algebra és az Ω hatványhalmaza (azaz Ω összes részhalmazából álló halmaz) egy olyan σ -algebra, mely tartalmazza az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszert. Tulajdonképpen $\sigma(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ az a legszűkebb σ -algebra, mely tartalmazza az A_γ , $\gamma \in \Gamma$, halmazokat. Megjegyezzük továbbá, hogy az 1.7. Definícióbeli generált σ -algebra definíciója megfogalmazható tetszőleges, nem feltétlenül egy halmazalgebrához tartozó $A_\gamma \subset \Omega$, $\gamma \in \Gamma$, halmazrendszer esetén is.

1.8. Tétel. (Carathéodory kiterjesztési tétele) Legyen Ω nemüres halmaz és $\mathcal{H}$ az Ω bizonyos részhalmazából álló halmazalgebra. Legyen $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges mérték. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\nu : \sigma(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges mérték úgy, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(A) = \mu(A)$.

1.9. Definíció. *Valószínűségi mező* alatt olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast értünk, ahol $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér és $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ valószínűségi mérték.

Az Ω elemeit **elemi eseményeknek**, az $\mathcal{A}$ elemeit pedig **eseményeknek** nevezzük. Az Ω a **biztos esemény**, az $\emptyset$ üres halmaz pedig a **lehetetlen esemény**.

1.10. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ leképezés **véletlen változó (valószínűségi változó)**, ha mérhető, azaz tetszőleges $B \in \mathcal{X}$ esetén

$$\xi^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} := \{\xi \in B\} \in \mathcal{A}.$$

A $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **eloszlása** a $\mathbb{P}_\xi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_\xi(B) := \mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{X}$$

halmazfüggvény, mely nyilván valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren.

Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete, a $\xi(\Omega)$ halmaz megszámlálható. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **egyszerű**, ha értékkészlete véges halmaz.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow X$, $\eta : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változók és $\mathbb{P}(\xi = \eta) = 1$, akkor azt írjuk, hogy $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. (egyenlőek $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt).

1.11. Megjegyzés. (i). Ha $X = \mathbb{R}$, illetve $X = \mathbb{R}^d$, akkor mindig az $\mathcal{X} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$, illetve $\mathcal{X} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ választásokkal élünk. Így egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhetősége esetünkben azt jelenti, hogy $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén (felhívjuk a figyelmet, hogy ezt a mértékelméletben Borel mérhetőségnek nevezik, f mérhetőségén pedig alapértelmezés szerint Lebesgue-mérhetőséget értenek). Annak, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhetőségén Borel mérhetőséget értünk több olyan következménye is van, melyek Lebesgue mérhetőség feltételezése esetén nem feltétlenül teljesülnének. Például, egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív, Borel mérhető függvény inverze is Borel mérhető. Valóban, ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy bijektív függvény, akkor g módon jelölt inverze akkor és csak akkor Borel mérhető, ha tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) \in f(B)\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in f(B)\} = f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

teljesül, azaz tetszőleges Borel halmaz f általi képe is Borel halmaz. Ismert, hogy ez a tulajdonság tetszőleges injektív, Borel mérhető $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén (így esetünkben is) teljesül. Megjegyezzük, hogy egy olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel mérhető függvényt, melyre tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ teljesül bi-mérhetőnek nevezzük.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változó, akkor a véletlen vektor elnevezést is használjuk. Ha nem nevezzük meg egy valószínűségi változó értékkészletét, akkor úgy értjük, hogy $\mathbb{R}$ az értékkészlet.

(ii). Ha például $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egyszerű valószínűségi változó és az értékkészlete $\xi(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$, ahol $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ páronként különbözőek, akkor

$$\xi = \sum_{j=1}^k x_j \mathbb{1}_{A_j},$$

ahol $A_j := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_j\} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, k$, páronként diszjunkt események és $\bigcup_{j=1}^k A_j = \Omega$, azaz $A_1, \dots, A_k$ teljes eseményrendszert alkotnak.

(iii). Ha (E, ρ) metrikus tér, akkor azt mindig a Borel-halmazok $\mathcal{B}(E)$ σ -algebrájával látjuk el (vagyis a nyílt halmazok által generált σ -algebrával). $\square$

1.12. Definíció. Legyen Γ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)$ mérhető tér, és $\xi_\gamma: \Omega \rightarrow X_\gamma$ valószínűségi változó. A $\{\xi_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók által **generált σ -algebra**:

$$\sigma(\xi_\gamma: \gamma \in \Gamma) := \sigma(\xi_\gamma^{-1}(B): \gamma \in \Gamma, B \in \mathcal{X}_\gamma),$$

azaz a $\{\xi_\gamma^{-1}(B): \gamma \in \Gamma, B \in \mathcal{X}_\gamma\}$ halmazok által generált σ -algebra (lásd, 1.7. Definíció).

1.13. Megjegyzés. (i). A $\{\xi_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók által generált σ -algebra az a legszűkebb σ -algebra, melyre nézve az összes $\{\xi_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változó mérhető.

(ii). Legyen $(X, \mathcal{X})$ egy mérhető tér. Egyetlen $\xi: \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó által generált σ -algebra nyilván

$$\sigma(\xi) = \xi^{-1}(\mathcal{X}) := \{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\},$$

hiszen egyrészt $\{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\} \subset \sigma(\xi)$, másrészt $\{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\}$ egy σ -algebra, és így, a generált σ -algebra definíciója miatt, $\sigma(\xi) \subset \{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\}$. A $\{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\}$ halmazrendszer valóban σ -algebra, mivel az őskép képzés felcserélhető a halmazelméleti különbség képzéssel és unióképzéssel:

$$- \Omega = \xi^{-1}(X) \in \{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\},$$

$$- \text{Legyen } B \in \mathcal{X}. \text{ Ekkor}$$

$$\Omega \setminus \xi^{-1}(B) = \xi^{-1}(X) \setminus \xi^{-1}(B) = \xi^{-1}(X \setminus B),$$

$$\text{és } X \setminus B \in \mathcal{X}, \text{ hiszen } \mathcal{X} \text{ } \sigma\text{-algebra. Így } \Omega \setminus \xi^{-1}(B) \in \{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\}.$$

$$- \text{Legyenek } B_n \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}, \text{ adottak. Ekkor}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_n) = \xi^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$$

$$\text{és } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{X}, \text{ hiszen } \mathcal{X} \text{ } \sigma\text{-algebra. Így } \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_n) \in \{\xi^{-1}(B): B \in \mathcal{X}\}.$$

A fentiek alapján az $\mathcal{X}$ σ -algebrának a ξ általi ösképe σ -algebra.

A $\sigma(\xi)$ σ -algebra éppen azokból az A eseményekből áll, melyekről ξ megfigyelésével ($\xi(\omega)$ ismeretében) eldönthető, hogy bekövetkeztek-e vagy sem ($\omega \in A$ teljesül-e vagy sem).

(iii). Felhívjuk a figyelmet, hogy ha $\sigma(\xi) = \sigma(\eta)$, akkor általában véve nem igaz, hogy $\mathbb{P}(\xi = \eta) = 1$. Például, ha $\eta := \xi + 1$, akkor $\sigma(\xi) = \sigma(\eta)$, hiszen

$$\begin{aligned}\sigma(\eta) &= \{ \{ \omega \in \Omega : \eta(\omega) \in B \} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} = \{ \{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B - 1 \} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} \\ &= \{ \{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) \in C \} : C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} = \sigma(\xi),\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy egy $B \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor Borel mérhető, ha a $B - 1$ halmaz Borel mérhető. Ugyanakkor $\mathbb{P}(\xi = \eta) = \mathbb{P}(\xi = \xi + 1) = 0$.

(iv). Az 1.12. Definícióbeli generált σ -algebra definíciója megfogalmazható tetszőleges, nem feltétlenül mérhető függvényekből álló függvényrendszer esetén is. Például, egy tetszőleges $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény által generált σ -algebra $\sigma(g) := \sigma(g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$, és $\sigma(g)$ az a legszűkebb σ -algebra, melyre nézve g mérhető. $\square$

1.14. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó, és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra. Azt mondjuk, hogy ξ $\mathcal{F}$ -mérhető, ha $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{X}$, vagyis $\sigma(\xi) \subset \mathcal{F}$.

1.15. Definíció. Egy metrikus teret szeparábilisnak nevezünk, ha van megszámlálható minde-
nyütt sűrű részhalmaza. Egy metrikus tér egy A részhalmazát akkor nevezzük szeparábilisnak, ha az mint metrikus tér szeparábilis az eredeti metrikának az $A \times A$ -ra való megszorításával.

1.16. Lemma. Legyen (E, ϱ) szeparábilis metrikus tér. Tetszőleges $\xi : \Omega \rightarrow E$ valószínűségi változó esetén léteznek olyan $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ egyszerű valószínűségi változók, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$. Ha $(E, \|\cdot\|)$ szeparábilis normált tér, úgy ξ_n választható úgy, hogy $\|\xi_n\| \leq \|\xi\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.17. Lemma. Tetszőleges $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív valószínűségi változó esetén létezik nem-negatív egyszerű valószínűségi változókból álló $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\eta_n(\omega) \uparrow \eta(\omega)$, ha $n \rightarrow \infty$. Például az

$$\eta_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (j-1)2^{-n} \mathbb{1}_{\{(j-1)2^{-n} \leq \eta < j2^{-n}\}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

vagy

$$\eta_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (j-1)2^{-n} \mathbb{1}_{\{(j-1)2^{-n} \leq \eta < j2^{-n}\}} + n \mathbb{1}_{\{\eta \geq n\}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sorozatok megfelelnek.

1.18. Állítás. Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó.

- (i) Ha $(Y, \mathcal{Y})$ mérhető tér, $g: X \rightarrow Y$ mérhető függvény, akkor a $g \circ \xi: \Omega \rightarrow Y$ összetett függvény $\sigma(\xi)$ -mérhető valószínűségi változó, azaz $\sigma(g \circ \xi) \subset \sigma(\xi)$.
- (ii) Ha $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ $\sigma(\xi)$ -mérhető valószínűségi változó, akkor létezik olyan $g: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ mérhető függvény, hogy $\eta = g \circ \xi$.

Bizonyítás. (i). Abból következik, hogy tetszőleges $D \in \mathcal{Y}$ esetén $(g \circ \xi)^{-1}(D) = \xi^{-1}(g^{-1}(D)) \in \mathcal{A}$, hiszen $g^{-1}(D) \in \mathcal{X}$ és ξ valószínűségi változó. Az 1.13. Megjegyzés (ii) része alapján ugyanez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy $(g \circ \xi)^{-1}(D) \in \sigma(\xi)$ is teljesül tetszőleges $D \in \mathcal{Y}$ esetén.

(ii). Ha $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egyszerű valószínűségi változó, akkor léteznek olyan páronként különböző $y_1, y_2, \dots, y_\ell \in \mathbb{R}^d$ pontok, hogy $\eta(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}$. Ekkor $A_j := \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = y_j\} = \eta^{-1}(\{y_j\})$, $j = 1, 2, \dots, \ell$, páronként diszjunktak, $\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j = \Omega$ és

$$\eta = \sum_{j=1}^{\ell} y_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Mivel $\mathbb{R}^d \setminus \{y_j\}$ nyílt, kapjuk, hogy $\{y_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, 2, \dots, \ell$, és így η $\sigma(\xi)$ -mérhetősége miatt

$$A_j = \eta^{-1}(\{y_j\}) \in \sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{X}\}.$$

Így léteznek olyan $B_j \in \mathcal{X}$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ halmazok, hogy $A_j = \xi^{-1}(B_j)$. Itt $B_1, \dots, B_\ell$ nem feltétlenül diszjunktak, az viszont teljesül, hogy $\xi^{-1}(B_i \cap B_j) = \xi^{-1}(B_i) \cap \xi^{-1}(B_j) = A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, \ell$ esetén, azaz ekkor $B_i \cap B_j$ nem része ξ értékkészletének. Az alábbiakban a $B_1, \dots, B_\ell$ halmazrendszert páronként diszjunktá tesszük. Legyen $\tilde{B}_j := B_j \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} B_i \right) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \dots, \ell$, ahol $\bigcup_{i=1}^0 B_i := \emptyset$. Ekkor, felhasználva, hogy A_j -k páronként diszjunktak,

$$\xi^{-1}(\tilde{B}_j) = \xi^{-1}(B_j) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \xi^{-1}(B_i) \right) = A_j \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right) = A_j,$$

és így

$$\xi^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^{\ell} \tilde{B}_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\ell} \xi^{-1}(\tilde{B}_j) = \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j = \bigcup_{j=1}^{\ell} \eta^{-1}(\{y_j\}) = \eta^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^{\ell} \{y_j\} \right) = \eta^{-1}(\eta(\Omega)) = \Omega.$$

Tekintsük egy olyan $g: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvényt, melyre $g(x) = y_j$, ha $x \in \tilde{B}_j$ valamely $j = 1, 2, \dots, \ell$ esetén, és $g(x) = y_0$ egyébként, ahol $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tetszőlegesen rögzített pont, azaz

$$g = \sum_{j=1}^{\ell} y_j \mathbb{1}_{\tilde{B}_j} + y_0 \mathbb{1}_{X \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell} \tilde{B}_j}.$$

Megjegyezzük, hogy az előzőekben definiált g függvény még adott $\tilde{B}_j$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ esetén sem egyértelmű, ugyanis, ha $\bigcup_{j=1}^{\ell} \tilde{B}_j \neq X$, akkor tekintettel arra, hogy y_0 -at kontinuum sok

módon választhatjuk meg, g -t is kontinuum sok módon választhatjuk meg. Ekkor nyilván g mérhető, és $\eta = g \circ \xi$, ugyanis ha $\omega \in A_j$, akkor egyrészt A_j definíciója miatt $\eta(\omega) = y_j$, másrészt $\omega \in A_j = \xi^{-1}(\tilde{B}_j)$ miatt $\xi(\omega) \in \tilde{B}_j$, így, felhasználva, hogy $\tilde{B}_j, j=1, \dots, \ell$, páronként diszjunktak, $(g \circ \xi)(\omega) = g(\xi(\omega)) = y_j$.

Tetszőleges $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ esetén az 1.16. Lemma alapján létezik egyszerű valószínűségi vektorváltozókból álló $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)$. Legyen $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ olyan mérhető függvény, hogy $\eta_n = g_n \circ \xi$ (az előzőek alapján ilyen g_n létezik, hiszen η_n egyszerű valószínűségi változó). Ekkor

$$H := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \text{ létezik}\} \in \mathcal{X},$$

ugyanis, mivel $\mathbb{R}^d$ teljes,

$$\begin{aligned} H &= \{x \in X : (g_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy sorozat}\} \\ &= \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \bigcap_{m > r, n > r} \left\{ x \in X : \|g_m(x) - g_n(x)\| < \frac{1}{p} \right\} \\ &= \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \bigcap_{m > r, n > r} (g_m - g_n)^{-1} \left(\left\{ z \in \mathbb{R}^d : \|z\| < \frac{1}{p} \right\} \right) \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

hiszen $g_m - g_n$ mérhető és a $\mathcal{X}$ σ -algebra zárt a megszámlálható unió és metszetképzésre nézve. Továbbá, tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\xi(\omega) \in H$, ugyanis $g_n(\xi(\omega)) = \eta_n(\omega) \rightarrow \eta(\omega)$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyen

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) & \text{ha } x \in H, \\ y'_0 & \text{ha } x \notin H, \end{cases}$$

ahol $y'_0 \in \mathbb{R}^d$ tetszőlegesen rögzített pont. Ekkor felhasználva, hogy $H \in \mathcal{X}$ és azt, hogy mérhető függvények pontonkénti határértéke mérhető, kapjuk, hogy g mérhető. Továbbá, $\eta = g \circ \xi$, hiszen tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\xi(\omega) \in H$ és így

$$g(\xi(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega).$$

Végezetül megjegyezzük, hogy az $\eta = g \circ \xi$ előállítás alapján g a ξ értékkészletén egyértelműen meghatározott. $\square$

A következő állítást a „jó halmazok” módszerének is szokás nevezni.

1.19. Állítás. *Legyenek $(\Omega, \mathcal{A})$ és $(X, \mathcal{X})$ mérhető terek, $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$, és $\xi : \Omega \rightarrow X$ egy leképezés. Ekkor $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) = \xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Továbbá, feltételezve, hogy $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$, a ξ leképezés akkor és csak akkor véletlen változó, ha $\xi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. Az 1.13. Megjegyzés (ii) része alapján (σ -algebra ξ általi ősképe is σ -algebra), kapjuk, hogy

$$\xi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))),$$

és így, a generált σ -algebra definíciója alapján, adódik, hogy $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) \subset \xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$.

A fordított irányú tartalmazás belátásához, vezessük be az alábbi jelölést:

$$\mathcal{E}_0 := \left\{ A \in \sigma(\mathcal{E}) : \xi^{-1}(A) \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) \right\}.$$

Ekkor $\mathcal{E}_0 \subset \sigma(\mathcal{E})$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{E}_0$ egy σ -algebra:

- $\Omega \in \mathcal{E}_0$, mert $\Omega \in \sigma(\mathcal{E})$ és $\xi^{-1}(\Omega) = X \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$, hiszen $\sigma(\mathcal{E})$ és $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$ is σ -algebra,
- legyen $A \in \mathcal{E}_0$. Ekkor $\Omega \setminus A \in \sigma(\mathcal{E})$ és

$$\xi^{-1}(\Omega \setminus A) = \xi^{-1}(\Omega) \setminus \xi^{-1}(A) = X \setminus \xi^{-1}(A) \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})),$$

mert $\xi^{-1}(A) \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$ és $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$ egy σ -algebra,

- legyenek $A_n \in \mathcal{E}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{E})$ és

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(A_n) \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})),$$

mert $\xi^{-1}(A_n) \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$, $n \in \mathbb{N}$, és $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$ egy σ -algebra.

Mivel $\mathcal{E}_0$ egy olyan σ -algebra, hogy $\mathcal{E}_0 \subset \sigma(\mathcal{E})$, a generált σ -algebra definíciója alapján adódik, hogy $\mathcal{E}_0 = \sigma(\mathcal{E})$. Ezért $\mathcal{E}_0$ definíciója miatt, tetszőleges $A \in \sigma(\mathcal{E})$ esetén $\xi^{-1}(A) \in \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$, azaz $\xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$. Ekkor a már bizonyítottak alapján

$$\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) = \xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \xi^{-1}(\mathcal{X}). \quad (1.1)$$

Ha ξ véletlen változó, akkor $\xi^{-1}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}$, és így (1.1) alapján $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A}$, melyből speciálisan következik, hogy $\xi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

Ha $\xi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$, akkor (1.1), a generált σ -algebra definíciója és $\mathcal{A}$ σ -algebra volta alapján, kapjuk, hogy

$$\xi^{-1}(\mathcal{X}) = \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A},$$

melyből következik, hogy ξ véletlen változó. □

1.20. Állítás. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér és $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy leképezés. Ekkor a ξ leképezés akkor és csak akkor $\mathbb{R}$ -beli értékű véletlen változó, ha $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy ξ véletlen változó. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $(-\infty, x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és így $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A}$, azaz $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Tegyük most fel, hogy $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és

$$\xi^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \quad x \in \mathbb{R},$$

az $\mathcal{E} := \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ jelöléssel $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $\xi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Így a „jó halmazok” módszere alapján (1.19. Állítás) kapjuk, hogy ξ véletlen változó. □

1.21. Állítás. Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér. Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés akkor és csak akkor valószínűségi vektorváltozó, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés akkor és csak akkor valószínűségi vektorváltozó, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés esetén a $\sigma(\xi)$ σ -algebra az a legszűkebb rész- σ -algebra, melyre nézve ξ mérhető.

Bizonyítás. Tetszőleges $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ jelöléssel

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_d(\omega) < x_d\} = \xi^{-1} \left(\times_{j=1}^d (-\infty, x_j) \right),$$

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_d(\omega) \leq x_d\} = \xi^{-1} \left(\times_{j=1}^d (-\infty, x_j] \right),$$

és a $\{\times_{j=1}^d (-\infty, x_j) : x \in \mathbb{R}^d\}$ alakú téglák, illetve a $\{\times_{j=1}^d (-\infty, x_j] : x \in \mathbb{R}^d\}$ alakú téglák is a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ -algebrának egy generátorrendszerét alkotják. Így az állítás első két része az 1.19. Állításból következik. Az állítás harmadik része a generált σ -algebra definíciójának és az 1.13. Megjegyzés (ii) részének a következménye. $\square$

1.22. Állítás. Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, $d \in \mathbb{N}$, és $\xi_1, \dots, \xi_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezések. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\xi(\omega) := (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Ekkor a ξ leképezés akkor és csak akkor $\mathbb{R}^d$ -beli értékű véletlen változó, ha ξ_i , $i = 1, \dots, d$, valós értékű véletlen változók.

Bizonyítás. Tetszőleges $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\xi^{-1} \left(\times_{i=1}^d (-\infty, x_i) \right) = \bigcap_{i=1}^d \xi_i^{-1}((-\infty, x_i)).$$

Tegyük fel, hogy $\xi_1, \dots, \xi_d$ véletlen változók. Ekkor $\xi_i^{-1}((-\infty, x_i)) \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, d$, és így $\bigcap_{i=1}^d \xi_i^{-1}((-\infty, x_i)) \in \mathcal{A}$, amiből következik, hogy $\xi^{-1} \left(\times_{i=1}^d (-\infty, x_i) \right) \in \mathcal{A}$. Mivel a

$$\left\{ \times_{i=1}^d (-\infty, x_i) : x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazrendszer generálja a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ -algebrát, az 1.19. Állítás alapján kapjuk, hogy ξ véletlen változó.

Tegyük fel, hogy ξ véletlen változó. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén legyen $p_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $p_i(x) = x_i$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Ekkor p_i , $i = 1, \dots, d$, folytonosak és így (Borel-)mérhetőek is. Ezért a $\xi_i = p_i \circ \xi$ összetett leképezés is (Borel-)mérhető (az 1.18. Állítás (i) része alapján), azaz véletlen változó. $\square$

1.23. Definíció. Ha $a, b \in \mathbb{R}^d$, akkor $a \leq b$, illetve $a < b$ azt jelenti, hogy minden $j = 1, \dots, d$ esetén $a_j \leq b_j$, illetve $a_j < b_j$ teljesül, és jelölje $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^d : a \leq x < b\}$.

1.24. Definíció. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_d < x_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d.$$

Megjegyezzük, hogy az 1.24. Definícióban értelmes $\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_d < x_d\}$ valószínűségéről beszélni, mert $\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_d < x_d\} \in \mathcal{A}$, hiszen

$$\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_d < x_d\} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^{-1}((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_d)),$$

ahol $(-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_d) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ és $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ véletlen vektor.

Legyen $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $j \in \{1, \dots, d\}$, és $\Delta_{[a_j, b_j]}^{(j)} g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\Delta_{[a_j, b_j]}^{(j)} g)(x) := g(x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - g(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_d), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$(\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \dots \Delta_{[a_d, b_d]}^{(d)} g)(x) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{0, 1\}^d} (-1)^{\sum_{k=1}^d \varepsilon_k} g(c_1, \dots, c_d), \quad (1.2)$$

ahol $c_k := \varepsilon_k a_k + (1 - \varepsilon_k) b_k$, $k = 1, \dots, d$, és mivel az összegzés a 0 és 1 számokból álló összes lehetséges $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ sorozatra kiterjed a fenti összegnek 2^d számú tagja van. Így kapjuk, hogy $\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \dots \Delta_{[a_d, b_d]}^{(d)} g$ konstans függvény.

1.25. Állítás. Az $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változónak, ha

(1) F minden változójában monoton növekvő,

(2) F minden változójában balról folytonos,

(3) $\lim_{\min\{x_1, \dots, x_d\} \rightarrow \infty} F(x) = 1$, és

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d) = 0$$

minden $i \in \{1, \dots, d\}$ és $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ esetén,

(4) tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ esetén $\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \dots \Delta_{[a_d, b_d]}^{(d)} F \geq 0$.

1.26. Megjegyzés. (i). Ha $d = 1$, akkor az 1.25. Állításbeli (4) feltétel következik az (1) feltételből, ugyanis $\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} F = F(b_1) - F(a_1)$. Ha $d \geq 2$, akkor általában nem igaz, hogy az 1.25. Állítás (4) feltétele következne az (1), (2) és (3) feltételekből. Valóban, legyen $d := 2$, és $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } x + y \leq 1 \text{ vagy } y \leq 0, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az 1.25. Állításbeli (1), (2) és (3) feltételek teljesülnek, azonban ha például $a = (a_1, a_2) := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ és $b = (b_1, b_2) := (1, 1)$, akkor

$$\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} F = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0,$$

így az 1.25. Állítás (4) feltétele nem teljesül.

(ii). Megmutatjuk, hogy az 1.25. Állításbeli (3) feltételben a

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d) = 0$$

minden $i \in \{1, \dots, d\}$ és $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ esetén feltétel kicserélhető arra, hogy

$$\lim_{\min\{x_1, \dots, x_d\} \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Az ezen cserével felírt (3) feltételt jelölje (3').

Belátjuk először, hogy ha F eloszlásfüggvény, akkor (1), (2), (3') és (4) teljesülnek. Ha F eloszlásfüggvény, akkor az 1.25. Állítás alapján (1), (2), (3) és (4) teljesülnek. Meg kell még mutatnunk, hogy (3') is teljesül. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}\} = -\infty$, akkor az $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat felbontható legfeljebb d darab páronként diszjunkt részsorozatra (azaz a részsorozatokhoz tartozó szigorúan monoton növekvő leképezések értékkészletei a természetes számok halmazának egy osztályozását alkotják) oly módon, hogy az első részsorozat tagjainak első koordinátái $-\infty$ -hez konvergálnak, a második részsorozat tagjainak második koordinátái $-\infty$ -hez konvergálnak, stb. Az alábbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy d darab ilyen részsorozat létezik, és jelölje ezeket $(x^{(n_k^{(1)})})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x^{(n_k^{(d)})})_{k \in \mathbb{N}}$. Ekkor $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(n_k^{(i)})} = -\infty$, $i = 1, \dots, d$. Így, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}\} = -\infty$, akkor

$$F(x_1^{(n_k^{(i)})}, \dots, x_d^{(n_k^{(i)})}) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1^{(n_k^{(i)})}, \dots, \xi_d < x_d^{(n_k^{(i)})}) \leq \mathbb{P}(\xi_i < x_i^{(n_k^{(i)})}) \rightarrow 0, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty,$$

ahol $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ egy F eloszlásfüggvényű véletlen vektor. Felhasználva, hogy ha egy sorozatnak van egy páronként diszjunkt részsorozatokból álló felbontása, amely felbontásban szereplő részsorozatok konvergensek és mindegyik ugyanahhoz az értékhez tart, akkor az eredeti sorozat konvergencia és ugyanahhoz az értékhez tart, kapjuk, hogy $F(x^{(n)}) \rightarrow 0$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}\} = -\infty$, azaz adódik (3'). (Megjegyezzük, hogy ha $\min(x_n, y_n) \rightarrow -\infty$ teljesül, akkor még nem következik, hogy $x_n \rightarrow -\infty$ vagy $y_n \rightarrow -\infty$. Például, ha $(x_{2n}, y_{2n}) := (-2n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}$, és $(x_{2n+1}, y_{2n+1}) := (2n+1, -(2n+1))$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $\min(x_n, y_n) = -n \rightarrow -\infty$, azonban nem teljesül, hogy $x_n \rightarrow -\infty$ és az sem, hogy $y_n \rightarrow -\infty$. Ez az oka a fentiekben látott páronként diszjunkt részsorozatokra való felbontásnak.)

Belátjuk most, hogy ha (1), (2), (3') és (4) teljesülnek, akkor F eloszlásfüggvény. Az 1.25. Állítás alapján elég belátni, hogy ha (3') teljesül, akkor (3) is teljesül. Ha (3') teljesül, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy minden olyan $x \in \mathbb{R}^d$ esetén, melyre $\min(x_1, \dots, x_d) < M_\varepsilon$, fennáll, hogy $|F(x)| < \varepsilon$. Ha $i \in \{1, \dots, d\}$ és $x_i^{(n)} \rightarrow -\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)})^\top$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ -beli értékű sorozat, akkor bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén azon $x^{(n)}$ -ekre, melyekre $x_i^{(n)} < M_\varepsilon$, fennáll, hogy $|F(x^{(n)})| < \varepsilon$ (ugyanis $x_i^{(n)} < M_\varepsilon$ -ből következik, hogy $\min\{x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}\} < M_\varepsilon$), így fennáll (3). $\square$

1.27. Állítás. Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változó, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ esetén

$$\mathbb{P}_\xi([a, b)) = \mathbb{P}(\xi \in [a, b)) = \Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d)}^{(d)} F_\xi \geq 0,$$

ahol F_ξ a ξ eloszlásfüggvényét jelöli. Tehát $\mathbb{P}_\xi$ az F_ξ eloszlásfüggvényhez tartozó Lebesgue-Stieltjes mérték.

Bizonyítás. Csak $d = 2$ esetén. Az $a = (a_1, a_2)$ és $b = (b_1, b_2)$ jelöléssel, ha $a < b$, akkor (1.2) alapján

$$\begin{aligned} \Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2)}^{(2)} F_\xi &= F_\xi(b_1, b_2) - F_\xi(b_1, a_2) - F_\xi(a_1, b_2) + F_\xi(a_1, a_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 < b_1, \xi_2 < b_2) - \mathbb{P}(\xi_1 < b_1, \xi_2 < a_2) - \mathbb{P}(\xi_1 < a_1, \xi_2 < b_2) + \mathbb{P}(\xi_1 < a_1, \xi_2 < a_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) - \mathbb{P}(\xi_1 < a_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = \mathbb{P}(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi \in [a, b)). \end{aligned}$$

Az állítás második része a mértékelméletből tanultakból következik. $\square$

1.28. Állítás. Legyenek $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változók. Ekkor $\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_\eta$ akkor és csak akkor, ha $F_\xi = F_\eta$. Azaz az eloszlás és az eloszlásfüggvény kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.

Vegyük észre, hogy az 1.27. Állítás alapján, ha $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változók és $F_\xi = F_\eta$, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ esetén

$$\mathbb{P}_\xi([a, b)) = \Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d)}^{(d)} F_\xi = \Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d)}^{(d)} F_\eta = \mathbb{P}_\eta([a, b)),$$

azaz a $\mathbb{P}_\xi$ és $\mathbb{P}_\eta$ valószínűségi mértékek megegyeznek az $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ alakú téglákon. Az 1.28. Állítás alapján a tekintett esetben $\mathbb{P}_\xi$ és $\mathbb{P}_\eta$ megegyezik a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ -algebrán is.

1.29. Állítás. Legyenek $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ és $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ egydimenziós eloszlásfüggvények. Ha F és G minden közös $x \in \mathbb{R}$ folytonossági pontjában $F(x) = G(x)$, akkor $F = G$. Általánosabban, ha $S \subset \mathbb{R}$ egy olyan sűrű részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek, hogy $F(x) = G(x)$ minden $x \in S$ esetén, akkor $F = G$.

Bizonyítás. Mivel egy egydimenziós eloszlásfüggvény monoton növekvő, egy egydimenziós eloszlásfüggvénynek csak megszámlálható sok nem folytonossági pontja lehetséges. Mivel két megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható, F és G közös folytonossági pontjaiból álló, C -vel jelölt, halmaz sűrű részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek. Mivel F és G balról folytonosak is, kapjuk az állítást. Valóban, legyen $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy $y_n \in C$, $n \in \mathbb{N}$, és $y_n \uparrow y$, ha $n \rightarrow \infty$. A feltétel miatt $F(y_n) = G(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, és így, felhasználva, hogy F és G balról folytonosak, kapjuk, hogy

$$F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(y_n) = G(y).$$

$\square$

2. Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ egy (index)halmaz.

2.1. Definíció. Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrák **függetlenek**, ha a Γ páronként különböző elemeiből álló minden $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ véges részhalmaz esetén és minden $A_{\gamma_1} \in \mathcal{F}_{\gamma_1}, \dots, A_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_{\gamma_n}$ választással teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A_{\gamma_1} \cap \dots \cap A_{\gamma_n}) = \mathbb{P}(A_{\gamma_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{\gamma_n}).$$

Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ események **függetlenek**, ha az általuk generált $\{\{\emptyset, A_\gamma, \Omega \setminus A_\gamma, \Omega\} : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrák függetlenek.

Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)$, illetve $(Y_\gamma, \mathcal{Y}_\gamma)$ egy mérhető tér és $\xi_\gamma : \Omega \rightarrow X_\gamma$, illetve $\eta_\gamma : \Omega \rightarrow Y_\gamma$ valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha az általuk generált $\{\sigma(\xi_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrák függetlenek.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlenek az $\{\eta_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változóktól, ha a $\sigma(\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ és $\sigma(\eta_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ σ -algebrák függetlenek.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlenek az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ eseményektől, ha a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlenek az $\{\mathbb{1}_{A_\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változóktól.

2.2. Megjegyzés. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, ahol $F_{\xi, \eta}$, F_ξ és F_η a (ξ, η) , ξ , illetve η eloszlásfüggvényét jelöli. Ennek az állításnak az odafele iránya egyszerűen igazolható, ugyanis, ha ξ és η függetlenek, akkor mivel tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $\{\xi < x\} \in \sigma(\xi)$ és $\{\eta < y\} \in \sigma(\eta)$, kapjuk, hogy

$$F_{\xi, \eta}(x, y) = \mathbb{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathbb{P}(\xi < x) \mathbb{P}(\eta < y) = F_\xi(x)F_\eta(y).$$

A megfordítás bizonyítása azon múlik, hogy tetszőleges $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, esetén, az 1.27. Állítás alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\xi, \eta) \in [a, b]) &= \mathbb{P}((\xi, \eta) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \\ &= F_{\xi, \eta}(b_1, b_2) - F_{\xi, \eta}(b_1, a_2) - F_{\xi, \eta}(a_1, b_2) + F_{\xi, \eta}(a_1, a_2) \\ &= F_\xi(b_1)F_\eta(b_2) - F_\xi(b_1)F_\eta(a_2) - F_\xi(a_1)F_\eta(b_2) + F_\xi(a_1)F_\eta(a_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi < b_1) \mathbb{P}(\eta < b_2) - \mathbb{P}(\xi < b_1) \mathbb{P}(\eta < a_2) - \mathbb{P}(\xi < a_1) \mathbb{P}(\eta < b_2) + \mathbb{P}(\xi < a_1) \mathbb{P}(\eta < a_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi < b_1) \mathbb{P}(a_2 \leq \eta < b_2) - \mathbb{P}(\xi < a_1) \mathbb{P}(a_2 \leq \eta < b_2) = \mathbb{P}(a_1 \leq \xi < b_1) \mathbb{P}(a_2 \leq \eta < b_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi \in [a_1, b_1]) \mathbb{P}(\eta \in [a_2, b_2]). \end{aligned}$$

Így tetszőleges $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, esetén

$$\mathbb{P}(\xi \in [a_1, b_1], \eta \in [a_2, b_2]) = \mathbb{P}(\xi \in [a_1, b_1]) \mathbb{P}(\eta \in [a_2, b_2]),$$

azaz a $\{\xi \in [a_1, b_1]\} \in \sigma(\xi)$ és $\{\eta \in [a_2, b_2]\} \in \sigma(\eta)$ események függetlenek. A bizonyítás befejezhetősége azon (is) múlik, hogy az 1.13. Megjegyzés (ii) része és az 1.19. Állítás alapján a $\{\xi \in [a_1, b_1]\}$, $a_1 < b_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, alakú eseményeket tartalmazó legszűkebb σ -algebra $\sigma(\xi)$. Hasonlóan, az $\{\eta \in [a_2, b_2]\}$, $a_2 < b_2$, $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, alakú eseményeket tartalmazó legszűkebb σ -algebra $\sigma(\eta)$. $\square$

2.3. Lemma. *Ha a $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ véletlen vektorok függetlenek, akkor tetszőleges $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^r$, $h: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^p$ mérhető függvények esetén a $g \circ \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ és $h \circ \eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ véletlen vektorok is függetlenek. Továbbá, ha $\xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, független véletlen változók és $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mérhető függvények, akkor a $g_n \circ \xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók is függetlenek.*

Bizonyítás. Az 1.18. Állítás alapján $\sigma(g \circ \xi) \subset \sigma(\xi)$ és $\sigma(h \circ \eta) \subset \sigma(\eta)$, így $\sigma(\xi)$ és $\sigma(\eta)$ függetlensége maga után vonja $\sigma(g \circ \xi)$ és $\sigma(h \circ \eta)$ függetlenségét. A lemma második része hasonlóan bizonyítható. $\square$

2.4. Lemma. *Ha az $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ és $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{A}$ rész-halmazalgebrák függetlenek abban az értelemben, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}_0$ és $B \in \mathcal{G}_0$ esetén*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B),$$

akkor a generált $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{F}_0)$ és $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{G}_0)$ rész- σ -algebrák is függetlenek.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $B \in \mathcal{G}_0$ eseményt. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhetőségi téren a $\mu(A) := \mathbb{P}(A \cap B)$, $A \in \mathcal{F}$ és a $\nu(A) := \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$ nemnegatív halmazfüggvényeket. Ezek a $\mathbb{P}$ σ -additivitása miatt σ -additívak lesznek $\mathcal{F}_0$ -n. Valóban, ha $A_n \in \mathcal{F}_0$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_0$, akkor $A_n \cap B \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, és így

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A ν halmazfüggvény szóban forgó σ -additivitása hasonlóan igazolható. Továbbá μ és ν megegyezik az $\mathcal{F}_0$ halmazalgebrán, mely generálja $\mathcal{F}$ -et, és μ és ν σ -véges halmazfüggvények (végesek is, hiszen $\mu(A) \leq \mathbb{P}(B)$ és $\nu(A) \leq \mathbb{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$), ezért a mértékek Carathéodory-féle kiterjesztési tétele (1.8. Tétel) alapján μ és ν megegyezik $\mathcal{F}$ -en: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$.

Megjegyezzük, hogy az, hogy μ és ν σ -additívak $\mathcal{F}$ -en a μ és ν definíciójából közvetlenül is következik. Valóban, ha $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, akkor $A_n \cap B \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, és így

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Az 1.8. Tétel alkalmazhatóságához viszont csak arra van szükség, hogy μ és ν σ -additívak $\mathcal{F}_0$ -n.

Felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy μ és ν általában nem valószínűségi mértékek, hiszen $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) = \mathbb{P}(B)$ nem biztos, hogy 1-gyel egyenlő.

Rögzítsünk most egy $A \in \mathcal{F}$ eseményt. Ekkor az előzőekhez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ minden $A \in \mathcal{F}$ és $B \in \mathcal{G}$ esetén. $\square$

2.5. Definíció. Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak. Legyen $\mathcal{F}_\emptyset := \{\emptyset, \Omega\}$ (azaz a triviális σ -algebra). Ha $\Lambda \subset \Gamma$, $\Lambda \neq \emptyset$, akkor legyen

$$\mathcal{F}_\Lambda := \bigvee_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma := \sigma(\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Lambda) := \sigma\left(\bigcup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma\right) = \sigma(\{A : A \in \mathcal{F}_\gamma \text{ valamely } \gamma \in \Lambda \text{ esetén}\}).$$

Ha $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Gamma$, akkor $\mathcal{F}_{\Lambda_1} \subset \mathcal{F}_{\Lambda_2}$. Ha $\gamma_0 \in \Gamma$ és $\Lambda := \{\gamma_0\}$, akkor

$$\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{F}_{\{\gamma_0\}} = \sigma\left(\bigcup_{\gamma \in \{\gamma_0\}} \mathcal{F}_\gamma\right) = \sigma(\mathcal{F}_{\gamma_0}) = \mathcal{F}_{\gamma_0}.$$

Továbbá, hogy ha ξ_γ , $\gamma \in \Gamma$, véletlen változók és $\mathcal{F}_\gamma := \sigma(\xi_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\Gamma &= \sigma\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \sigma(\xi_\gamma)\right) = \sigma\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{\xi_\gamma^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right) = \sigma(\{\xi_\gamma^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma \in \Gamma\}) \\ &= \sigma(\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma), \end{aligned} \quad (2.1)$$

ahol az utolsó egyenlőséget az 1.12. Definíció értelmében értjük.

2.6. Lemma. Ha $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ független rész- σ -algebrái $\mathcal{A}$ -nak, és F_1, F_2 véges, diszjunkt részhalmazai Γ -nak, akkor $\mathcal{F}_{F_1}$ és $\mathcal{F}_{F_2}$ függetlenek.

Bizonyítás. Megmutatjuk először, hogy ha $F \subset \Gamma$ véges, akkor az $\mathcal{F}_F = \sigma(\bigcup_{i \in F} \mathcal{F}_i)$ σ -algebrát generálja az a halmazalgebra, mely a $\bigcap_{i \in F} A_i$ metszetek véges, páronként diszjunkt unióiból áll, ahol $A_i \in \mathcal{F}_i$, ha $i \in F$. Jelölje $\mathcal{H}$ a szóban forgó halmazrendszert. Be kell látnunk, hogy

- (i) $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_F$,
- (ii) $\mathcal{H}$ halmazalgebra,
- (iii) $\mathcal{H}$ generálja $\mathcal{F}_F$ -et (azaz, hogy a $\mathcal{H}$ -t tartalmazó legszűkebb σ -algebra $\mathcal{F}_F$).

(i) indoklása: tetszőleges $i \in F$ és $A_i \in \mathcal{F}_i$ esetén teljesül, hogy

$$A_i \in \mathcal{F}_i \subset \bigcup_{j \in F} \mathcal{F}_j \subset \sigma\left(\bigcup_{j \in F} \mathcal{F}_j\right) = \mathcal{F}_F,$$

és így $\bigcap_{i \in F} A_i \in \mathcal{F}_F$ (hiszen $\mathcal{F}_F$ σ -algebra), illetve az ilyen metszetek (véges, páronként diszjunkt) uniói is elemei $\mathcal{F}_F$ -nek. Tehát $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_F$.

(ii) indoklása: először azt látjuk be, hogy a $\mathcal{H}$ halmazrendszer megegyezik a szóban forgó metszetek *nem feltétlenül páronként diszjunkt*, véges unióiból álló halmazrendszerrel, melyet jelöljön $\mathcal{K}$, majd belátjuk, hogy $\mathcal{K}$ halmazalgebra (bizonyítva ezzel, hogy $\mathcal{H}$ halmazalgebra).

(ii)/(a): $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ bizonyítása. Nyilván $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. A $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ tartalmazást csak abban a speciális esetben látjuk be, amikor F elemszáma 2, az általános eset hasonló gondolatok felhasználásával ellenőrizhető. Legyen $F := \{1, 2\}$, $A_1, B_1 \in \mathcal{F}_1$ és $A_2, B_2 \in \mathcal{F}_2$. Ekkor

$$\begin{aligned} & (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \\ &= [(A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \cap B_2)] \cup [(A_1 \cap B_1) \cap (A_2 \setminus B_2)] \\ & \quad \cup [(A_1 \cap B_1) \cap (A_2 \cap B_2)] \cup [(B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \setminus A_2)] \cup [(B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \cap A_2)] \\ & \quad \cup [(B_1 \cap A_1) \cap (B_2 \setminus A_2)], \end{aligned}$$

ahol az unióban szereplő metszetek egyrészt megfelelő alakúak (hiszen $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ halmazalgebrák, és egy halmazalgebra zárt a metszetképzésre és a különbségképzésre), másrészt páronként diszjunktak.

(ii)/(b): $\mathcal{K}$ halmazalgebra, hiszen

- $\Omega \in \mathcal{F}_i$, $i \in F$, és így $\Omega = \bigcap_{i \in F} A_i \in \mathcal{K}$, ahol $A_i := \Omega$, $i \in F$,
- zárt a komplementer képzésre, ugyanis, ha $n \in \mathbb{N}$, $A_i^{(j)} \in \mathcal{F}_i$, $i \in F$, $j \in \{1, \dots, n\}$, akkor

$$\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \bigcap_{i \in F} A_i^{(j)} = \bigcap_{j=1}^n \left(\Omega \setminus \bigcap_{i \in F} A_i^{(j)} \right) = \bigcap_{j=1}^n \bigcup_{i \in F} (\Omega \setminus A_i^{(j)}),$$

ahol $\Omega \setminus A_i^{(j)} \in \mathcal{F}_i$, $i \in F$, $j \in \{1, \dots, n\}$, és felhasználva, hogy

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D),$$

kapjuk, hogy $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \bigcap_{i \in F} A_i^{(j)}$ felírható $\bigcap_{i \in F} B_i$ alakú metszetek véges uniójaként, ahol $B_i \in \mathcal{F}_i$, $i \in F$.

- zárt az unió képzésre, ugyanis a szóban forgó metszetek nem feltétlenül páronként diszjunkt véges unióinak véges uniója is megfelelő alakú metszetek nem feltétlenül páronként diszjunkt metszetek véges uniója. Ennél a lépésnél használtuk azt, hogy $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.

(iii) indoklása: tetszőleges $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i \in F$, esetén $A_i = \bigcap_{j \in F} B_j$, ahol $B_j := A_i$, $j = i$, és $B_j := \Omega$, ha $j \neq i$, $j \in F$, és így $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in F$, amiből adódik, hogy $\bigcup_{i \in F} \mathcal{F}_i \subset \mathcal{H}$. Mivel $\mathcal{H} \subset \sigma(\mathcal{H})$, a generált σ -algebra definíciója alapján kapjuk, hogy $\mathcal{F}_F = \sigma(\bigcup_{i \in F} \mathcal{F}_i) \subset \sigma(\mathcal{H})$. Mivel az (i) rész alapján $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_F$, és $\mathcal{F}_F$ σ -algebra, kapjuk, hogy $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_F$. Így $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_F$.

Legyenek most $F_1, F_2 \subset \Gamma$ véges, diszjunkt részhalmazok. Jelölje $\mathcal{H}_1$, illetve $\mathcal{H}_2$ a $\bigcap_{i \in F_1} A_i$, $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i \in F_1$, alakú metszetek, illetve a $\bigcap_{j \in F_2} B_j$, $B_j \in \mathcal{F}_j$, $j \in F_2$, alakú metszetek véges páronként diszjunkt unióiból álló halmazalgebrát. A feltételek alapján tetszőleges $\bigcap_{i \in F_1} A_i$ alakú metszetre (ahol $A_i \in \mathcal{F}_i$, ha $i \in F_1$) és tetszőleges $\bigcap_{j \in F_2} B_j$ alakú metszetre (ahol $B_j \in \mathcal{F}_j$, ha $j \in F_2$) teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i \in F_1} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) \right) \\ = \left(\prod_{i \in F_1} \mathbb{P}(A_i) \right) \cdot \left(\prod_{j \in F_2} \mathbb{P}(B_j) \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in F_1} A_i \right) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Megjegyezzük, hogy a (2.2)-beli első egyenlőség származtatásánál használtuk, hogy $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, ugyanis ekkor az F_1 -beli és F_2 -beli indexekből felépített véges hosszúságú Γ -beli sorozat páronként különböző elemekből áll.

A valószínűség additivitása és (2.2) alapján $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ tetszőleges $A \in \mathcal{H}_1$ és $B \in \mathcal{H}_2$ esetén. Valóban, A , illetve B felírható véges sok, szóban forgó alakú metszet páronként diszjunkt uniójaként. Ha például $A = M_1 \cup M_2$, ahol M_1 és M_2 megfelelő alakú diszjunkt metszetek, akkor (2.2) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A \cap \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) \right) &= \mathbb{P} \left(M_1 \cap \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) \right) + \mathbb{P} \left(M_2 \cap \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) \right) \\ &= \mathbb{P}(M_1) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) + \mathbb{P}(M_2) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) \\ &= (\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(M_2)) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) \\ &= \mathbb{P}(M_1 \cup M_2) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in F_2} B_j \right). \end{aligned}$$

Mivel $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, halmazalgebrák, és $\sigma(\mathcal{H}_i) = \mathcal{F}_{F_i}$, $i = 1, 2$, a 2.4. Lemma alapján az $\mathcal{F}_{F_1}$ és $\mathcal{F}_{F_2}$ σ -algebrák függetlenek. $\square$

A 2.6. Lemma felhasználásával hasonlóan bizonyítható a következő eredmény is.

2.7. Lemma. *Ha $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ független rész- σ -algebrái $\mathcal{A}$ -nak, és F_1, F_2 diszjunkt részhalmazai Γ -nak, akkor $\mathcal{F}_{F_1}$ és $\mathcal{F}_{F_2}$ függetlenek.*

Bizonyítás vázlat. A bizonyítás fontos lépése annak megmutatása, hogy tetszőleges $\Lambda \subset \Gamma$ esetén

$$\mathcal{L} := \bigcup_{\{F : F \subset \Lambda, F \text{ véges}\}} \mathcal{F}_F \quad \text{halmazalgebra,} \quad (2.3)$$

és

$$\mathcal{L} \text{ generálja az } \mathcal{F}_\Lambda \text{ } \sigma\text{-algebrát.} \quad (2.4)$$

Nyilván, $\Omega \in \mathcal{L}$, hiszen $\Omega \in \mathcal{F}_F$ tetszőleges $F \subset \Lambda$ esetén. Továbbá, $\mathcal{L}$ zárt a komplementer képzésre, ugyanis, ha $A \in \mathcal{L}$, úgy létezik olyan $F \subset \Lambda$ véges részhalmaz, hogy $A \in \mathcal{F}_F$, és így, mivel $\mathcal{F}_F$ σ -algebra, kapjuk, hogy $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_F$ és így $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{L}$ zárt a véges unió képzésre is. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$, úgy léteznek olyan $F_1, \dots, F_n \subset \Gamma$ véges halmazok, hogy $A_i \in \mathcal{F}_{F_i}$, $i = 1, \dots, n$. Mivel tetszőleges $i = 1, \dots, n$ esetén

$$A_i \in \mathcal{F}_{F_i} = \sigma \left(\bigcup_{\gamma \in F_i} \mathcal{F}_\gamma \right) \subset \sigma \left(\bigcup_{\gamma \in F_1 \cup \dots \cup F_n} \mathcal{F}_\gamma \right) = \mathcal{F}_{F_1 \cup \dots \cup F_n},$$

kapjuk, hogy

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}_{F_1 \cup \dots \cup F_n} \subset \mathcal{L},$$

hiszen $F_1 \cup \dots \cup F_n \subset \Gamma$ véges halmaz. Így $\mathcal{L}$ halmazalgebra. Végezetül, $\mathcal{L}$ azért generálja az $\mathcal{F}_\Lambda$ σ -algebrát, mert Λ egyelemű részhalmazait választva F -nek, kapjuk, hogy $\bigcup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma \subset \mathcal{L}$, azaz az $\mathcal{L}$ halmazalgebra tartalmazza $\bigcup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma$ -t, mely által generált σ -algebra (definíció szerint) $\mathcal{F}_\Lambda$, és így az $\bigcup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma$ által generált σ -algebra, azaz $\mathcal{F}_\Lambda$, megegyezik az $\mathcal{L}$ által generált σ -algebrával. A bizonyítás a 2.6. Lemma bizonyításának végéhez hasonlóan a 2.6. Lemma és a 2.4. Lemma segítségével fejezhető be. $\square$

A 2.7. Lemmából speciális esetként következik, hogy ha ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, független véletlen változók, és $F_1 \subset \mathbb{N}$, $F_2 \subset \mathbb{N}$ olyanok, hogy $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, akkor $\sigma \left(\bigcup_{i \in F_1} \sigma(\xi_i) \right)$ és $\sigma \left(\bigcup_{j \in F_2} \sigma(\xi_j) \right)$ függetlenek, melyből (2.1) alapján következik, hogy a $\sigma(\xi_i : i \in F_1)$ és $\sigma(\xi_j : j \in F_2)$ σ -algebrák függetlenek.

2.8. Definíció. Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrákhoz tartozó **farok- σ -algebra**:

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\{F : F \subset \Gamma, F \text{ véges}\}} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F}.$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a 2.8. Definícióbeli $\mathcal{T}$ (valóban) σ -algebra, mert σ -algebrák tetszőleges, nem nulla számosságú metszete is σ -algebra, és a fenti metszet nemüres, ugyanis $\emptyset \subset \Gamma$ és $\emptyset$ véges halmaz.

2.9. Példa. (i) Ha Γ véges, akkor ($\mathcal{T}$ definíciójában $F = \Gamma$ választással) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, és így $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ minden $A \in \mathcal{T}$ esetén.

(ii) Egy $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ rész- σ -algebra sorozat esetén a farok- σ -algebra:

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n),$$

ahol $\sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n) \downarrow \mathcal{T}$, ha $n \rightarrow \infty$. Valóban, a farok- σ -algebra definíciója alapján a $\Gamma := \mathbb{N}$ és $F := \{1, \dots, n-1\}$ választásokkal kapjuk, hogy $\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots) = \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n-1\}} \supset \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, így

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots) \supset \mathcal{T}.$$

Továbbá, ha $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots)$, akkor $A \in \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $A \notin \mathcal{T}$. Ekkor létezik olyan $F \subset \mathbb{N}$ véges részhalmaz, hogy $A \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus F}$. Mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos, kapjuk, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $F \subset \{1, \dots, n_0\}$, és így $\mathbb{N} \setminus F \supset \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n_0\}$. Ezért

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus F} \supset \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n_0\}} = \sigma(\mathcal{F}_{n_0+1}, \mathcal{F}_{n_0+2}, \dots) \ni A,$$

ami ellentmondás, hiszen $A \notin \mathcal{F}_{\mathbb{N} \setminus F}$. Végezetül, mivel $\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots) \supset \sigma(\mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{F}_{n+2}, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy $\sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n) \downarrow \mathcal{T}$, ha $n \rightarrow \infty$.

- (iii) Ha $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ valószínűségi változók, akkor a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában éppen azok az események vannak benne, melyek bekövetkezését nem befolyásolja véges sok ξ_n értékének megváltoztatása. Valóban, minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots) = \bigcap_{n=N}^{\infty} \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots),$$

ahol felhasználtuk, hogy a (ii) rész alapján $\sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots) \downarrow \mathcal{T}$, ha $n \rightarrow \infty$.

- (iv) Ha $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ valószínűségi változók, akkor a (iii) rész alapján a következő események benne vannak a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában:

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \text{ létezik} \right\}, \\ & \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) < x \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ & \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \leq x \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ & \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \text{ létezik} \right\}, \\ & \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n \log \log n}} < x \right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a fentiekben szereplő halmazokról mértékelméleti tanulmányok alapján azonnal következik, hogy események, az azonban külön indoklást igényel, hogy benne vannak a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában. Továbbá, az

$$\left\{ \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

esemény nincs benne a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában.

2.10. Állítás. Legyen Γ egy megszámlálhatóan végtelen halmaz és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak. Legyenek továbbá $F_n \subset \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, olyan véges részhalmazai Γ -nak, hogy $F_n \uparrow \Gamma$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrákhoz tartozó farok- σ -algebra:

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_n}.$$

Speciálisan, ha $\Gamma = \mathbb{N}$, akkor $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n)$ (ahogyan azt már a 2.9. Példa (ii) részében láttuk).

Bizonyítás. A $\mathcal{T}$ farok- σ -algebra definíciója alapján

$$\mathcal{T} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_n}.$$

A fordított irányú tartalmazás belátásához, legyen $F \subset \Gamma$ egy véges részhalmaza Γ -nak. Mivel $F_n \uparrow \Gamma$, ha $n \rightarrow \infty$, kapjuk, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $F \subset F_N$, és így $\Gamma \setminus F_N \subset \Gamma \setminus F$. Felhasználva, hogy $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{N-1} \subset F_N$ miatt $\Gamma \setminus F_N \subset \Gamma \setminus F_n$, $n = 1, \dots, N$, kapjuk, hogy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_n} \subset \bigcap_{n=1}^N \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_n} = \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_N} \subset \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F}.$$

A bal oldalon levő σ -algebra nem függ F -től, így

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_n} \subset \bigcap_{\{F : F \subset \Gamma, F \text{ véges}\}} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F} = \mathcal{T}.$$

A $\Gamma = \mathbb{N}$ speciális esetben az $F_n := \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, választásokkal élve, kapjuk, hogy $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\{n+1, n+2, \dots\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\{n, n+1, \dots\}}$, hiszen $\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \mathcal{F}_{\{1, 2, \dots\}} \supset \mathcal{F}_{\{n+1, n+2, \dots\}}$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.11. Tétel. (Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye) Ha $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ független rész- σ -algebrái $\mathcal{A}$ -nak, és $\mathcal{T}$ jelöli a hozzájuk tartozó farok- σ -algebrát, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{T}$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

Bizonyítás. Tetszőleges $F \subset \Gamma$ véges részhalmaz esetén $F \cap (\Gamma \setminus F) = \emptyset$, így a 2.7. Lemma alapján $\mathcal{F}_F$ és $\mathcal{F}_{\Gamma \setminus F}$ függetlenek. Ezért, felhasználva, hogy $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F}$, adódik, hogy $\mathcal{F}_F$ és $\mathcal{T}$ is függetlenek. Felhasználva (2.3)-t és (2.4)-t (éljünk a $\Lambda = \Gamma$ választással), kapjuk, hogy az $\mathcal{F}_\Gamma$ σ -algebrát generálja az

$$\mathcal{L} := \bigcup_{\{F : F \subset \Gamma, F \text{ véges}\}} \mathcal{F}_F$$

halmazalgebra. Továbbá, az előzőek alapján, az $\mathcal{L}$ halmazalgebra és a $\mathcal{T}$ σ -algebra függetlenek abban az értelemben, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{L}$ és $B \in \mathcal{T}$ esetén $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$. Valóban, ha $A \in \mathcal{L}$, akkor létezik olyan $F_A \subset \Gamma$, hogy F_A véges és $A \in \mathcal{F}_{F_A}$, így, mivel $\mathcal{F}_{F_A}$ és $\mathcal{T}$ függetlenek

adódik, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$. Ezért a 2.4. Lemma alapján $\mathcal{F}_\Gamma = \sigma(\mathcal{L})$ és $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{T})$ is függetlenek. Mivel $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_\Gamma$ (a $\mathcal{T}$ 2.8. Definíciójában szereplő metszetben tekintsük az $F = \emptyset$ -nak megfelelő tagot), így $\mathcal{T}$ független önmagától: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{T}$ esetén. Tehát minden $A \in \mathcal{T}$ esetén $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$, amiből $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

2.12. Következmény. (Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye) Legyenek $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ független valószínűségi változók és jelölje $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(\xi_k : k \geq n)$ a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^\infty$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrát. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{T}$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

2.13. Példa. Ha $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ független valószínűségi változók és

$$\bar{S}_n := \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

akkor

$$\mathbb{P}(\{\bar{S}_n\}_{n=1}^\infty \text{ konvergens}) \in \{0, 1\},$$

hiszen az $\{\omega \in \Omega : \{\bar{S}_n(\omega)\}_{n=1}^\infty \text{ konvergens}\}$ esemény benne van a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^\infty$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában, ezért alkalmazhatjuk Kolmogorov 0 vagy 1 törvényét. Továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\{\omega \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n(\omega) < x\}$ események is benne vannak ebben a farok- σ -algebrában, ezért Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye alapján $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < x) \in \{0, 1\}$, $x \in \mathbb{R}$. Mivel az $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < x)$ függvény monoton növekvő és balról folytonos (hiszen ez a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n$ kiterjesztett valós értékű véletlen változó eloszlásfüggvénye), kapjuk, hogy létezik $b \in [-\infty, \infty]$ úgy, hogy $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < x) = 0$, ha $x \leq b$, $x \in \mathbb{R}$, és $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < x) = 1$, ha $x > b$, $x \in \mathbb{R}$. Valóban, a

$$b := \sup \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < x) = 0\} = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n < x) = 1\}$$

választás megfelelő. Ezért

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = b\right) = 1.$$

Valóban, mivel $\{b\} = \bigcap_{n=1}^\infty [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ és $[b - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m}) \subset [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ tetszőleges $m > n$, $n, m \in \mathbb{N}$, esetén, a valószínűség folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi = b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\xi \in \left[b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P}\left(\xi < b + \frac{1}{n}\right) - \mathbb{P}\left(\xi < b - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 0) = 1. \end{aligned}$$

Hasonlóan, létezik $a \in [-\infty, \infty]$ úgy, hogy

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = a\right) = 1.$$

Mivel $\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n$ és két 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű esemény, kapjuk, hogy $a \leq b$. Ezért, ha $\mathbb{P}(\{\bar{S}_n\}_{n=1}^\infty \text{ konvergens}) = 1$, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = c\right) = 1.$$

2.14. Definíció. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$. Ekkor jelölje

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén}\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ véges sok } n \in \mathbb{N} \text{ kivételével}\}.$$

Nilván, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ események, akkor $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$ és $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$, azaz $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ és $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ is események. Továbbá, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ pontosan akkor következik be, ha végtelen sok bekövetkezik az A_n , $n \in \mathbb{N}$, események közül; illetve $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ pontosan akkor következik be, ha véges sok kivételével minden A_n , $n \in \mathbb{N}$, esemény bekövetkezik.

2.15. Megjegyzés. Legyenek $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőben, azaz $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ és $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ események benne vannak a $\{\{\emptyset, A_n, \Omega \setminus A_n, \Omega\} : n \in \mathbb{N}\}$ σ -algebrákhoz tartozó farok- σ -algebrában. Valóban, az $\mathcal{F}_n := \{\emptyset, A_n, \Omega \setminus A_n, \Omega\}$, $n \in \mathbb{N}$, jelöléssel, a 2.9. Példa (ii) része alapján az ezen σ -algebrákhoz tartozó farok- σ -algebra

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \mathcal{F}_k\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n, \Omega \setminus A_n, A_{n+1}, \Omega \setminus A_{n+1}, \dots) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n, A_{n+1}, \dots). \end{aligned}$$

Mivel $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \sigma(A_N, A_{N+1}, A_{N+2}, \dots), \quad N \in \mathbb{N},$$

és így $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{T}$. Kevésbé formálisan ezt úgy is megkaphatjuk, hogy, felhasználva azt, hogy véges sok eseményt kicserélve az A_n , $n \in \mathbb{N}$, események közül a $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ esemény nem változik meg, kapjuk, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{T}$. Ha A_n , $n \in \mathbb{N}$, függetlenek is, akkor a Kolmogorov 0 vagy 1 törvény (2.11. Tétel) alapján

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \in \{0, 1\},$$

azaz vagy 1 valószínűséggel végtelen sok esemény bekövetkezik ezek közül, vagy pedig 1 valószínűséggel legfeljebb csak véges sok. Azt, hogy melyik eset áll fenn, a következőkben tárgyalandó Borel–Cantelli lemmák alapján lehet eldönteni. $\square$

2.16. Lemma. (Borel–Cantelli lemmák, 1909, 1917) Legyenek $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események.

(i) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$$

(vagyis ezen események közül 1 valószínűséggel legfeljebb csak véges sok következik be).

(ii) Ha az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események függetlenek és $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1$$

(vagyis ezen események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be).

Bizonyítás. (i). A $\mathbb{P}$ folytonossága (lásd 1.5. Állítás) és σ -szubadditivitása (lásd 1.6. Állítás) alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0. \end{aligned}$$

(ii). Mivel $\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \subset \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \overline{A_k}$, $n \in \mathbb{N}$, használva újra $\mathbb{P}$ folytonosságát, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\overline{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right).$$

Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \liminf_{N \rightarrow \infty} \exp\left\{-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k)\right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left\{-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k)\right\} = 0, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az A_n , $n \in \mathbb{N}$, események függetlensége maga után vonja az $\overline{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$, események függetlenségét (ugyanis $\sigma(A_n) = \sigma(\overline{A_n})$, $n \in \mathbb{N}$), azt, hogy $\mathbb{P}$ folytonos, illetve azt, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $1 - x \leq e^{-x}$ (a Taylor-féle maradék tétel szerint tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-x} = 1 - x + \frac{e^{-\theta}}{2} x^2$, ahol θ a 0 és x közötti valós szám). Ezért

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 1.$$

□

2.17. Megjegyzés. Tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén jelölje $\mathcal{N}(\omega)$, hogy hány darab A_n , $n \in \mathbb{N}$, esemény esetén teljesül, hogy $\omega \in A_n$. Nyilván, $\mathcal{N}(\omega) \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, melyből következik, hogy $\mathcal{N}$ (kiterjesztett valós értékű) valószínűségi változó (hiszen pontonkénti határértéke a $\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n}$ valószínűségi változóknak, amint $N \rightarrow \infty$), és a várható érték később tárgyalandó tulajdonságai miatt (lásd 3.7. Tétel (xi) része)

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

A Borel–Cantelli lemma (i) része azt állítja, hogy ha véges a bekövetkező események számának várható értéke, akkor a bekövetkező események száma 1 valószínűséggel véges. Továbbá, mivel $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\mathcal{N} = \infty\}$, a Borel–Cantelli lemma (ii) része alapján kapjuk, hogy független események esetén, ha a bekövetkező események számának várható értéke végtelen, akkor $\mathcal{N}$, azaz a bekövetkező események száma 1 valószínűséggel végtelen. $\square$

3. Várható érték

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egyszerű valószínűségi változó, és $\xi(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, ahol $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ páronként különbözőek, akkor

$$\xi = \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{1}_{A_j},$$

ahol $A_j := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_j\} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, \ell$, páronként diszjunkt halmazok, és $\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j = \Omega$.

3.1. Definíció. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egyszerű valószínűségi változó, és $\xi(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, ahol $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ páronként különbözőek. Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{P}(\xi = x_j)$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük.

3.2. Megjegyzés. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változó, és $\xi(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, ahol $x_1, \dots, x_\ell$ páronként különböző, nemnegatív valós számok. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = (\mathbb{P} \otimes \lambda)(\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \xi(\omega)\}),$$

ahol $\mathbb{P} \otimes \lambda$ a $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték és az $\mathbb{R}$ -en adott λ Lebesgue-mérték szorzatát jelöli. Valóban, az $A_j := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_j\} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, \ell$ jelöléssel,

$$\begin{aligned} (\mathbb{P} \otimes \lambda)(\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \xi(\omega)\}) &= \sum_{j=1}^{\ell} (\mathbb{P} \otimes \lambda)(\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \xi(\omega)\} \cap (A_j \times \mathbb{R})) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} (\mathbb{P} \otimes \lambda)(\{(\omega, t) \in A_j \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq x_j\}) = \sum_{j=1}^{\ell} (\mathbb{P} \otimes \lambda)(A_j \times [0, x_j]) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_j) \lambda([0, x_j]) = \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{P}(\xi = x_j). \end{aligned}$$

□

Nyilván a várható érték végesen additív és monoton az egyszerű véletlen változókon.

3.3. Állítás. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív valószínűségi változó.

- (i) Ha ζ és $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változók, és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\eta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega) \geq \zeta(\omega)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) \geq \mathbb{E}(\zeta)$.
- (ii) Ha $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változók, és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\eta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, $\zeta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\zeta_n)$.

Bizonyítás. (i). Nyilván a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) \in [0, \infty]$ határérték létezik, hiszen a $\{\mathbb{E}(\eta_n)\}_{n=1}^\infty$ sorozat monoton növekvő, ugyanis a várható érték monoton az egyszerű véletlen változókon. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $A_n := \{\omega \in \Omega : \eta_n(\omega) \geq \zeta(\omega) - \varepsilon\} \uparrow \Omega$, ugyanis tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) = \zeta(\omega) > \zeta(\omega) - \varepsilon$, így tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $n(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $\eta_k(\omega) > \zeta(\omega) - \varepsilon$, ha $k \geq n(\omega)$, és így $\omega \in A_k$, ha $k \geq n(\omega)$. Ezért $\mathbb{P}(A_n) \uparrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$, amiből $\mathbb{P}(\overline{A_n}) \downarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Mivel $\eta_n \geq \eta_n \mathbb{1}_{A_n} \geq (\zeta - \varepsilon) \mathbb{1}_{A_n}$, így felhasználva, hogy a várható érték végesen additív és monoton az egyszerű véletlen változókon és azt, hogy $\mathbb{1}_{A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_n}}$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta_n) \geq \mathbb{E}((\zeta - \varepsilon) \mathbb{1}_{A_n}) = \mathbb{E}(\zeta) - \mathbb{E}(\zeta \mathbb{1}_{\overline{A_n}}) - \varepsilon \mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{E}(\zeta) - \mathbb{P}(\overline{A_n}) \max_{\omega \in \Omega} \zeta(\omega) - \varepsilon,$$

ahol $\max_{\omega \in \Omega} \zeta(\omega) \in \mathbb{R}$ (hiszen ζ egyszerű valószínűségi változó). Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) \geq \mathbb{E}(\zeta) - \varepsilon$.

(ii). Mivel minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\xi(\omega) \geq \zeta_m(\omega)$, $\omega \in \Omega$, (i) alapján kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) \geq \mathbb{E}(\zeta_m)$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\zeta_m)$. Hasonlóan $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\zeta_n) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_m)$. $\square$

3.4. Definíció. Legyen $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív valószínűségi változó. Legyen $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változókból álló sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, ha $n \rightarrow \infty$. (Ilyen $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ sorozat az 1.17. Tétel szerint létezik.) Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n)$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük.

A 3.3. Állítás alapján egy nemnegatív ξ valószínűségi változó várható értéke $\mathbb{E}(\xi) \in [0, \infty]$ egyértelműen van definiálva. Továbbá

$$\mathbb{E}(\xi) = \sup \{ \mathbb{E}(\eta) : \eta \text{ egyszerű véletlen változó, hogy } 0 \leq \eta \leq \xi \}.$$

Ha $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, akkor $\xi^+ := \max\{\xi, 0\}$ és $\xi^- := -\min\{\xi, 0\}$ is nemnegatív valószínűségi változók, és $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$. A ξ^+ , illetve ξ^- véletlen változókat a ξ pozitív, illetve negatív részének hívjuk.

3.5. Definíció. Legyen $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ -nek **létezik várható értéke (integrálja)**, ha az $\mathbb{E}(\xi^+)$ és $\mathbb{E}(\xi^-)$ várható értékek közül legalább az egyik véges, és ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \mathbb{E}(\xi^+) - \mathbb{E}(\xi^-).$$

Azt mondjuk, hogy ξ -nek **véges a várható értéke (integrálható)**, ha az $\mathbb{E}(\xi^+)$ és $\mathbb{E}(\xi^-)$ várható értékek végesek.

A 3.5. Definíció alapján, ha egy $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak létezik a várható értéke, akkor $\mathbb{E}(\xi) \in [-\infty, \infty]$.

3.6. Megjegyzés. (i). Mivel $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$, így ξ -nek akkor és csak akkor véges a várható értéke, ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, azaz $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ezért ξ akkor és csak akkor integrálható, ha $|\xi|$ integrálható.

(ii). A fentiekben egy valós értékű ξ véletlen változó várható értékét definiáltuk. Esetenként szükség lesz kiterjesztett valós értékű véletlen változó várható értékének a fogalmára is (például, a 3.7. Tétel (xi) részében), de ennek formális kiépítésétől eltekintünk. $\square$

A következő tételben összegyűjtöttük a várható érték legfontosabb tulajdonságait (a tulajdonságok felsorolásának sorrendje azt nem tükrözi, hogy a sorrendben egy adott helyen szereplő tulajdonság bizonyításában esetlegesen ne kelljen felhasználni egy később szereplő tulajdonságot).

3.7. Tétel. (A várható érték tulajdonságai) Legyenek $\xi, \eta, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn.

- (i) ξ akkor és csak akkor integrálható, ha $|\xi|$ integrálható.
- (ii) Ha létezik $\mathbb{E}(\xi)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor létezik $\mathbb{E}(c\xi)$, és $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi)$.
- (iii) Ha létezik $\mathbb{E}(\xi) > -\infty$ és $\xi \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor létezik $\mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\eta)$.
Ha létezik $\mathbb{E}(\eta) < \infty$ és $\xi \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor létezik $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\eta)$.
- (iv) Ha létezik $\mathbb{E}(\xi)$, akkor $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$.
- (v) Ha létezik $\mathbb{E}(\xi)$, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén létezik $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)$; ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ (azaz ξ integrálható), akkor $\mathbb{E}(|\xi| \mathbb{1}_A) < \infty$ (azaz $\xi \mathbb{1}_A$ integrálható).
- (vi) Ha $\mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\eta)$ léteznek, és az $\mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ kifejezés értelmes (azaz nem $\infty - \infty$ vagy $-\infty + \infty$ alakú), akkor $\mathbb{E}(\xi + \eta)$ létezik és $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$.
- (vii) Ha $\xi = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(\xi) = 0$.
- (viii) Ha $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\xi)$ létezik, akkor $\mathbb{E}(\eta)$ is létezik, és $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta)$.
- (ix) Ha $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\xi) = 0$, akkor $\xi = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b.
- (x) **Monoton konvergencia-tétel:** Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \geq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$, és $\xi_n \uparrow \xi$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(\xi_n) \uparrow \mathbb{E}(\xi)$ ha $n \rightarrow \infty$. (Az $\mathbb{E}(\xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, várható értékek (iii) alapján léteznek és $\mathbb{E}(\xi_n) > -\infty$, hiszen $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$.)
- (xi) Ha $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ nemnegatívak, akkor $\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^\infty \xi_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(\xi_n)$.
- (xii) **Fatou-lemma:**

- (a) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \geq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$, akkor $\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n)$.
- (b) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, akkor $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \leq \mathbb{E}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n)$.
- (c) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \leq \mathbb{E}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n)$.
- (xiii) **Dominált (majoráns) konvergencia-tétel:** Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, és $\xi_n \rightarrow \xi$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.
- (xiv) **Általánosított dominált (majoráns) konvergencia-tétel:**
- (a) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta_n$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta_n) < \infty$, $\xi_n \rightarrow \xi$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\eta_n \rightarrow \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., és $\mathbb{E}(\eta_n) \rightarrow \mathbb{E}(\eta)$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$, ha $n \rightarrow \infty$.
- (b) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, és ξ_n sztochasztikusan konvergál ξ -hez, ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.
- (xv) **Cauchy–Schwarz–egyenlőtlenség:** Ha $\mathbb{E}(\xi^2), \mathbb{E}(\eta^2) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi\eta|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)}$.
- (xvi) **Jensen–egyenlőtlenség:**
- (a) Ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ olyan nyílt (nem feltétlenül korlátos) intervallum, hogy $\mathbb{P}(\xi \in I) = 1$, és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, akkor $\mathbb{E}(\xi) \in I$ és $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$. Továbbá, ha $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan konvex, akkor $g(\mathbb{E}(\xi)) = \mathbb{E}(g(\xi))$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{P}(\xi = \mathbb{E}(\xi)) = 1$.
- (b) Legyen $C \subset \mathbb{R}$ egy nemüres, Borel-mérhető, konvex halmaz, $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény, $\xi: \Omega \rightarrow C$ egy olyan véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ és $g \circ \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is véletlen változó. Ekkor $\mathbb{E}(\xi) \in C$, az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték létezik és $\mathbb{E}(g(\xi)) \in (-\infty, +\infty]$, továbbá $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$.
- A Jensen-egyenlőtlenség többdimenzióban is teljesül, lásd a 3.40. Állítást.
- (xvii) **Ljapunov–egyenlőtlenség:** Ha $0 < s < t$, akkor $(\mathbb{E}(|\xi|^s))^{1/s} \leq (\mathbb{E}(|\xi|^t))^{1/t}$.
- (xviii) **Hölder–egyenlőtlenség:** Legyenek $p, q \in (1, \infty)$ olyanok, hogy $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Ha $\mathbb{E}(|\xi|^p) < \infty$ és $\mathbb{E}(|\eta|^q) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi\eta|) \leq (\mathbb{E}(|\xi|^p))^{1/p} (\mathbb{E}(|\eta|^q))^{1/q}$.
- (xix) **Minkowski–egyenlőtlenség:** Legyen $p \in [1, \infty)$. Ha $\mathbb{E}(|\xi|^p) < \infty$ és $\mathbb{E}(|\eta|^p) < \infty$, akkor $(\mathbb{E}(|\xi + \eta|^p))^{1/p} \leq (\mathbb{E}(|\xi|^p))^{1/p} + (\mathbb{E}(|\eta|^p))^{1/p}$.

(xx) **Markov-egyenlőtlenség:** Ha $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{P}(\xi \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{c}$ bármilyen $c > 0$ esetén.

(xxi) **Csebisev-egyenlőtlenség:** Ha $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$, akkor $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(\xi)}{c^2}$ minden $c > 0$ esetén.

(xxii) Ha $\mathbb{E}(\xi)$ létezik, akkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x) dx - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(\xi < x) dx = \int_0^\infty (1 - F_\xi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_\xi(x) dx.$$

Ha $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x) dx = \int_0^\infty (1 - F_\xi(x)) dx$. Speciálisan, ha $\mathbb{P}(\xi \in \mathbb{Z}_+) = 1$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\xi \geq n)$.

(xxiii) Ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$ és ξ, η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(|\xi\eta|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$.
Ha ξ és η nemnegatívak és függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$.

(xxiv) **Young-tétel:** Legyenek $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ξ , η és ζ véletlen változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(|\xi_n|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta_n|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\zeta_n|) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\zeta|) < \infty$,

$$\mathbb{P}(\xi_n \leq \eta_n \leq \zeta_n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

és

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}, \quad \eta_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}, \quad \zeta_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \zeta \quad \mathbb{P}\text{-m.b.} \quad (3.2)$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\zeta_n) \rightarrow \mathbb{E}(\zeta). \quad (3.3)$$

Ekkor $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\eta_n) \rightarrow \mathbb{E}(\eta)$.

Bizonyítás. (xii). Mivel ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók, kapjuk, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \xi_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} \xi_k$$

kiterjesztett valós értékű véletlen változó. Mivel $\inf_{k \geq n} \xi_k \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, ha $n \rightarrow \infty$ és $\inf_{k \geq n} \xi_k \geq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $n \in \mathbb{N}$ (ugyanis megszámlálható sok 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű esemény), és $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$, a monoton konvergencia tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n) &= \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\inf_{k \geq n} \xi_k) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\inf_{k \geq n} \xi_k) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \mathbb{E}(\xi_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n), \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőtlenség abból következik, hogy $\inf_{k \geq n} \xi_k \leq \xi_k$ $\mathbb{P}$ -m.b., $k \geq n$, és így (iii) alapján $\mathbb{E}(\inf_{k \geq n} \xi_k) \leq \mathbb{E}(\xi_k)$, $k \geq n$.

A (b) és (c) részek az (a) rész, illetve az (a) és (b) részek következményei.

(xiii). A Fatou-lemma és a feltételek alapján

$$\mathbb{E}(|\xi|) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\xi_n|) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\xi_n|) \leq \mathbb{E}(\eta) < \infty.$$

Továbbá, felhasználva, hogy $\eta + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, és $\eta - \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, nemnegatív véletlen változók, a Fatou-lemma és a feltételek alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta + \xi) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\eta + \xi_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta + \xi_n) = \mathbb{E}(\eta) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n),$$

és

$$\mathbb{E}(\eta - \xi) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\eta - \xi_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta - \xi_n) = \mathbb{E}(\eta) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(-\xi_n) = \mathbb{E}(\eta) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n).$$

Átrendezve a fenti egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\xi) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n).$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n),$$

azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi)$.

(xiv). A Fatou-lemma és a feltételek alapján

$$\mathbb{E}(|\xi|) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\xi_n|) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\xi_n|) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \mathbb{E}(\eta) < \infty.$$

Továbbá, felhasználva, hogy $\eta_n + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, és $\eta_n - \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, nemnegatív véletlen változók, a Fatou-lemma alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta + \xi) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\eta_n + \xi_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n + \xi_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\eta_n) + \mathbb{E}(\xi_n)),$$

és

$$\mathbb{E}(\eta - \xi) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\eta_n - \xi_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n - \xi_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\eta_n) - \mathbb{E}(\xi_n)).$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \mathbb{E}(\eta) \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\eta_n) + \mathbb{E}(\xi_n)) = \mathbb{E}(\eta) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n),$$

és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\eta_n) - \mathbb{E}(\xi_n)) = \mathbb{E}(\eta) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\mathbb{E}(\xi_n)) = \mathbb{E}(\eta) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n).$$

Így

$$\mathbb{E}(\eta + \xi) \leq \mathbb{E}(\eta) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n)$$

és

$$\mathbb{E}(\eta - \xi) \leq \mathbb{E}(\eta) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n).$$

Átrendezve a fenti egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\xi) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n).$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n),$$

azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi)$. Ezzel adódik az (a) rész állítása.

A (b) rész bizonyítása. A későbbiekben tárgyalandó és bizonyítandó 7.6. Tétel (iv) része alapján, mivel ξ_n sztochasztikusan konvergál ξ -hez, ha $n \rightarrow \infty$, kapjuk, hogy pozitív egészek bármely $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozata, $\xi_{n_{k_i}}$ konvergál ξ -hez majdnem biztosan, ha $i \rightarrow \infty$. A (szokásos) dominált konvergencia tételt alkalmazva a $\xi_{n_{k_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, sorozatra, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_{n_{k_i}}) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$, ha $i \rightarrow \infty$, és $\mathbb{E}(|\xi_{n_{k_i}} - \xi|) \rightarrow 0$, ha $i \rightarrow \infty$. Felhasználva azt, hogy ha egy valós sorozat tetszőleges részsorozatának van olyan részsorozata, mely konvergál 0-hoz, akkor az eredeti sorozat konvergens és határértéke 0, kapjuk a (b) rész állítását.

(xvi)/(a). Aszerint, hogy I végpontjai végesek vagy végtelenek, négy esetet lehet megkülönböztetni. Ha $I = (a, b)$ alakú, ahol $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{P}(a < \xi < b) = 1$ és a várható érték monotonitása miatt (lásd (iii)) kapjuk, hogy $a \leq \mathbb{E}(\xi) \leq b$, azaz $\mathbb{E}(\xi) \in [a, b]$. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = a$, illetve $\mathbb{E}(\xi) = b$ nem lehetséges. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\mathbb{E}(\xi) = a$. Ekkor mivel $\xi - a > 0$ $\mathbb{P}$ -m.b. (így $\xi - a \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b. is teljesül) és $\mathbb{E}(\xi - a) = 0$, a (ix) tulajdonság alapján adódik, hogy $\xi - a = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., azaz $\xi = a$ $\mathbb{P}$ -m.b., mely ellentmondás, ugyanis $\xi > a$ $\mathbb{P}$ -m.b. Az $\mathbb{E}(\xi) = b$ eset hasonlóan zárható ki.

Felidézzük, hogy a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex volta azt jelenti, hogy bármilyen $x_1, x_2 \in I$ és bármilyen $p, q \in [0, 1]$, $p + q = 1$, esetén

$$g(px_1 + qx_2) \leq pg(x_1) + qg(x_2).$$

Ismert, hogy g akkor és csak akkor konvex, ha bármely pontjában van olyan egyenes, mely alatt nem megy a görbe. Ismert továbbá, hogy a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény (ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum) folytonos is. A fentiek alapján $g(\xi)$ valószínűségi változó, és mivel $\mathbb{E}(\xi) \in I$, $g(\mathbb{E}(\xi))$ értelmezett és $g(\mathbb{E}(\xi)) \in \mathbb{R}$. A fentiek miatt g konvexségéből következik az is, hogy az $(\mathbb{E}(\xi), g(\mathbb{E}(\xi)))$ ponthoz létezik egy olyan egyenes: $y = m(x - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi))$, $x \in \mathbb{R}$, melyre

$$g(x) \geq m(x - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi)), \quad x \in I.$$

Így $g \circ \xi \geq m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi))$. Várható értéket véve mindkét oldalon kapjuk, hogy $\mathbb{E}(g(\xi))$ létezik és $\mathbb{E}(g(\xi)) \in]-\infty, +\infty]$, valamint

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \mathbb{E}(g \circ \xi) \geq \mathbb{E}(m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi))) = m \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi)) = g(\mathbb{E}(\xi)). \quad (3.4)$$

A következőkben (a teljesség kedvéért) részletesen leírjuk annak indoklását, hogy $\mathbb{E}(g(\xi))$ létezése hogyan következik. Ehhez azt kell igazolni, hogy $g(\xi)$ pozitív, illetve negatív részének várható értéke közül legalább az egyik véges. Megmutatjuk, hogy $g(\xi)$ negatív részének várható értéke véges, azaz $\mathbb{E}(g(\xi)^-) < +\infty$. Mivel $g(\xi) \geq m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi))$ kapjuk, hogy

$$\min(g(\xi), 0) \geq \min(m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi)), 0),$$

és így $g(\xi)^- \leq (m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi)))^-$. Mivel $\xi^+ + \xi^- = |\xi|$ és $\xi^+ \geq 0, \xi^- \geq 0$ kapjuk, hogy $\xi^- \leq |\xi|$, és így

$$g(\xi)^- \leq |m|(|\xi| + |\mathbb{E}(\xi)|) + |g(\mathbb{E}(\xi))|.$$

Mivel ξ véges várható értékű valószínűségi változó, $\mathbb{E}(\xi^+) < +\infty$, $\mathbb{E}(\xi^-) < +\infty$, és ezért $\mathbb{E}(|\xi|) < +\infty$. Így

$$\mathbb{E}(g(\xi)^-) \leq 2|m| \mathbb{E}(|\xi|) + |g(\mathbb{E}(\xi))| < +\infty.$$

Ebből a gondolatmenetből az is adódik, hogy $\mathbb{E}(g(\xi)) \in]-\infty, +\infty]$.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan konvex. Ekkor létezik egy olyan egyenes: $y = m(x - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi))$, $x \in \mathbb{R}$, melyre

$$g(x) > m(x - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi)), \quad x \in I \setminus \{\mathbb{E}(\xi)\}. \quad (3.5)$$

Ha $\mathbb{P}(\xi = \mathbb{E}(\xi)) = 1$, akkor $\mathbb{P}(g(\xi) = g(\mathbb{E}(\xi))) = 1$, és így $\mathbb{E}(g(\xi)) = g(\mathbb{E}(\xi))$.

Ha $\mathbb{E}(g(\xi)) = g(\mathbb{E}(\xi))$, akkor a (3.4) egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, és így

$$\mathbb{E}(g(\xi) - m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) - g(\mathbb{E}(\xi))) = 0.$$

Mivel $g(\xi) - m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) - g(\mathbb{E}(\xi))$ nemnegatív véletlen változó, a jelen tétel (ix) része alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(g(\xi) - m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) - g(\mathbb{E}(\xi)) = 0) = 1. \quad (3.6)$$

A (3.5) egyenlőtlenség alapján, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\xi(\omega) \neq \mathbb{E}(\xi)$, akkor

$$g(\xi(\omega)) > m(\xi(\omega) - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi)),$$

és így (3.6) szerint

$$\mathbb{P}(\xi \neq \mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{P}(g(\xi) > m(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + g(\mathbb{E}(\xi))) = 0.$$

Ezért $\mathbb{P}(\xi \neq \mathbb{E}(\xi)) = 0$, azaz $\mathbb{P}(\xi = \mathbb{E}(\xi)) = 1$.

(xvii). Emeljük a bizonyítandó egyenlőtlenséget a t -edik hatványra:

$$(\mathbb{E}(|\xi|^s))^{\frac{t}{s}} \leq \mathbb{E}(|\xi|^t).$$

A Jensen-egyenlőtlenséget (lásd (xvi)/(b)) alkalmazhatjuk a $C := \mathbb{R}_+$ és $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x^{\frac{t}{s}}$, $x \in \mathbb{R}_+$ választásokkal. Ekkor g konvex és folytonos, mert

$$g'(x) = \frac{t}{s} x^{\frac{t}{s}-1}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad g''(x) = \frac{t}{s} \left(\frac{t}{s} - 1 \right) x^{\frac{t}{s}-2} \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

A Jensen-egyenlőtlenség alapján (lásd (xvi)/(b))

$$(\mathbb{E}(|\xi|^s))^{\frac{t}{s}} = g(\mathbb{E}(|\xi|^s)) \leq \mathbb{E}(g(|\xi|^s)) = \mathbb{E}(|\xi|^t).$$

(xx). Minden $c > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq c) &= \mathbb{P}(\xi \in [c, \infty)) = \mathbb{P}(\xi^{-1}([c, \infty))) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi^{-1}([c, \infty))}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\xi^{-1}([c, \infty))}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{[c, \infty)}(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega), \end{aligned}$$

ahol a harmadik egyenlőség az egyszerű véletlen változók várható értékének a definíciója miatt következik. Ezért

$$\mathbb{P}(\xi \geq c) \leq \int_{\Omega} \frac{\xi(\omega)}{c} \mathbb{1}_{[c, \infty)}(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{1}{c} \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \frac{\mathbb{E}(\xi)}{c},$$

ahol az utolsó előtti lépésben használjuk, hogy $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b..

(xxi). A Markov-egyenlőtlenség szerint minden $c > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq c) = \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)|^2 \geq c^2) \leq \frac{\mathbb{E}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)|^2)}{c^2} = \frac{\text{Var}(\xi)}{c^2}.$$

(xxii). Mivel $\mathbb{E}(\xi)$ létezik, az $\mathbb{E}(\xi^+)$ és $\mathbb{E}(\xi^-)$ várható értékek közül legalább az egyik véges, és $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^+) - \mathbb{E}(\xi^-)$. A Tonelli-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{[x, \infty)}(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \right) dx = \int_{\Omega} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{[x, \infty)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < 0\}} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{[x, \infty)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) + \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \geq 0\}} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{[x, \infty)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= 0 + \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \geq 0\}} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{\{\xi \geq 0\}}) = \mathbb{E}(\xi^+), \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(\xi < x) dx &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{(-\infty, x)}(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \right) dx = \int_{\Omega} \left(\int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{(-\infty, x)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < 0\}} \left(\int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{(-\infty, x)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) + \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \geq 0\}} \left(\int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{(-\infty, x)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < 0\}} \left(\int_{\xi(\omega)}^0 1 dx \right) \mathbb{P}(d\omega) + 0 = \int_{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < 0\}} -\xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= -\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{\{\xi < 0\}}) = \mathbb{E}(\xi^-). \end{aligned}$$

Ezért

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x) dx - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(\xi < x) dx = \mathbb{E}(\xi^+) - \mathbb{E}(\xi^-) = \mathbb{E}(\xi).$$

Tegyük most fel, hogy $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b. Hasonlóan, az előzőekhez, a Tonelli-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{[x, \infty)}(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \right) dx = \int_\Omega \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{[x, \infty)}(\xi(\omega)) dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(\xi). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a fentiekben azért nem a Fubini-tételt használjuk, mert nem biztos, hogy $\mathbb{E}(\xi) < \infty$.

Ha $\mathbb{P}(\xi \in \mathbb{Z}_+) = 1$, akkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \geq x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1, n]} \mathbb{P}(\xi \geq x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1, n]} \mathbb{P}(\xi \geq n) dx = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\xi \geq n),$$

ahol felhasználtuk, hogy $\int_{\{0\}} \mathbb{P}(\xi \geq x) dx = 0$, és azt, hogy $x \in (n-1, n]$ esetén $\mathbb{P}(\xi \geq x) = \mathbb{P}(\xi \geq n)$ teljesül (hiszen $\mathbb{P}(\xi \in \mathbb{Z}_+) = 1$).

(xxiii). Tegyük fel először, hogy $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\mathbb{E}(\xi) < \infty$, $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, és ξ , η függetlenek. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek

$$\xi_n := \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\}} \quad \text{és} \quad \eta_n := \sum_{\ell=0}^\infty \frac{\ell}{n} \mathbb{1}_{\{\frac{\ell}{n} \leq \eta < \frac{\ell+1}{n}\}}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \xi_n \leq \xi$, $|\xi_n - \xi| \leq \frac{1}{n}$ és $0 \leq \eta_n \leq \eta$, $|\eta_n - \eta| \leq \frac{1}{n}$. Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Mivel $\mathbb{E}(\xi) < \infty$ és $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, a dominált konvergencia tétel alapján (lásd (xiii)) kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \mathbb{E}(\eta).$$

Mivel ξ és η függetlenek, felhasználva (xi)-et is, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_n \eta_n) &= \sum_{k, \ell=0}^\infty \frac{k\ell}{n^2} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\}} \mathbb{1}_{\{\frac{\ell}{n} \leq \eta < \frac{\ell+1}{n}\}}) = \sum_{k, \ell=0}^\infty \frac{k\ell}{n^2} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\}}) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\frac{\ell}{n} \leq \eta < \frac{\ell+1}{n}\}}) \\ &= \mathbb{E}(\xi_n) \mathbb{E}(\eta_n). \end{aligned}$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\xi_n \eta_n) - \mathbb{E}(\xi \eta)| &\leq \mathbb{E}(|\xi_n \eta_n - \xi \eta|) \leq \mathbb{E}(\eta_n |\xi_n - \xi|) + \mathbb{E}(\xi |\eta_n - \eta|) \\ &\leq \frac{1}{n} \mathbb{E}(\eta_n) + \frac{1}{n} \mathbb{E}(\xi) \leq \frac{1}{n} \mathbb{E}(|\eta_n - \eta|) + \frac{1}{n} \mathbb{E}(\eta) + \frac{1}{n} \mathbb{E}(\xi) \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \mathbb{E}(\eta) + \frac{1}{n} \mathbb{E}(\xi) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \mathbb{E}(\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta),$$

amiből az is következik, hogy $\mathbb{E}(\xi\eta) < \infty$.

Tegyük most fel, hogy $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$, és ξ , η függetlenek. Ekkor a $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$, $\xi = \xi^+ - \xi^-$ és $|\eta| = \eta^+ + \eta^-$, $\eta = \eta^+ - \eta^-$ felbontások alapján

$$\begin{aligned} |\xi\eta| &= |\xi| \cdot |\eta| = \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^+ + \xi^+ \eta^- + \xi^- \eta^-, \\ \xi\eta &= \xi^+ \eta^+ - \xi^- \eta^+ - \xi^+ \eta^- + \xi^- \eta^-, \end{aligned}$$

ahol $\xi^+, \xi^-, \eta^+, \eta^- \geq 0$, (ξ^+, ξ^-) és (η^+, η^-) függetlenek, és $\mathbb{E}(\xi^+), \mathbb{E}(\xi^-) < \infty$, $\mathbb{E}(\eta^+) < \infty$, $\mathbb{E}(\eta^-) < \infty$. Így az előzőek alapján, felhasználva a várható érték linearitását is (lásd (ii) és (vi)):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\xi\eta|) &= \mathbb{E}(\xi^+ \eta^+) + \mathbb{E}(\xi^- \eta^+) + \mathbb{E}(\xi^+ \eta^-) + \mathbb{E}(\xi^- \eta^-) \\ &= \mathbb{E}(\xi^+) \mathbb{E}(\eta^+) + \mathbb{E}(\xi^-) \mathbb{E}(\eta^+) + \mathbb{E}(\xi^+) \mathbb{E}(\eta^-) + \mathbb{E}(\xi^-) \mathbb{E}(\eta^-) \\ &= \mathbb{E}(\xi^+ + \xi^-) \mathbb{E}(\eta^+ + \eta^-) = \mathbb{E}(|\xi|) \mathbb{E}(|\eta|), \end{aligned}$$

amiből az is következik, hogy $\mathbb{E}(|\xi\eta|) < \infty$, és hasonlóan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= \mathbb{E}(\xi^+ \eta^+) - \mathbb{E}(\xi^- \eta^+) - \mathbb{E}(\xi^+ \eta^-) + \mathbb{E}(\xi^- \eta^-) \\ &= \mathbb{E}(\xi^+) \mathbb{E}(\eta^+) - \mathbb{E}(\xi^-) \mathbb{E}(\eta^+) - \mathbb{E}(\xi^+) \mathbb{E}(\eta^-) + \mathbb{E}(\xi^-) \mathbb{E}(\eta^-) \\ &= \mathbb{E}(\xi^+ - \xi^-) \mathbb{E}(\eta^+ - \eta^-) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta). \end{aligned}$$

Az alábbiakban egy másik bizonyítást is mutatunk. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$, és ξ , η függetlenek. Ekkor felhasználva azt, hogy $F_{\xi,\eta} = F_\xi F_\eta$, a Fubini-tétel és a később szereplő Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\xi\eta|) &= \mathbb{E}(|\xi||\eta|) = \int_{\mathbb{R}^2} |x||y| dF_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} |x||y| dF_\xi(x) dF_\eta(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x| dF_\xi(x) \int_{\mathbb{R}} |y| dF_\eta(y) = \mathbb{E}(|\xi|) \mathbb{E}(|\eta|). \end{aligned}$$

Az $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta)$ összefüggés hasonlóan bizonyítható. Ha $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\mathbb{E}(\xi) < \infty$, $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, és ξ , η függetlenek, akkor a fenti gondolatmenetben a Fubini-tételt Tonelli-tétellel cserélve kapjuk a bizonyítandó állítást.

Vegyük észre, hogy ha ξ és η olyan nemnegatív, független véletlen változók, hogy például $\mathbb{E}(\xi) = \infty$ és $\mathbb{E}(\eta) = 0$, akkor is teljesül a (már bizonyított) $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta)$ egyenlőség, melyet direkt módon is beláthatunk. Mivel η nemnegatív és $\mathbb{E}(\eta) = 0$, a (ix) rész alapján kapjuk, hogy $\eta = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., és így $\xi\eta = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., melyből következik, hogy $\mathbb{E}(\xi\eta) = 0$. Mivel $\mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta) = \infty \cdot 0 = 0$ (ahol a második egyenlőség definíció szerint teljesül), kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta)$.

(xxiv). A (3.1) feltételből következik, hogy

$$\mathbb{P}(\xi_n \leq \eta_n \leq \zeta_n, \quad n \in \mathbb{N}) = 1,$$

melyből a (3.2) feltételt használva adódik, hogy $\mathbb{P}(\xi \leq \eta \leq \zeta) = 1$. Így $|\eta| \leq |\xi| + |\zeta|$, amiből következik, hogy $\mathbb{E}(|\eta|) \leq \mathbb{E}(|\xi|) + \mathbb{E}(|\zeta|) < \infty$. Továbbá,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta) - \mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\eta - \xi) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n - \xi_n)\right) = \mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\eta_n - \xi_n)\right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n - \xi_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\eta_n) - \mathbb{E}(\xi_n)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) - \mathbb{E}(\xi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

ahol a harmadik lépésben a Fatou-lemma (a) részét használtuk (melyet valóban alkalmazhatunk, hiszen $\eta_n - \xi_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ -m.b.), a legutolsó lépésben pedig azt, hogy $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi) \in \mathbb{R}$. A (3.7) egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadva $\mathbb{E}(\xi)$ -t, adódik, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n). \quad (3.8)$$

Hasonlóan, mivel $\zeta_n - \eta_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ -m.b., kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\zeta) - \mathbb{E}(\eta) &= \mathbb{E}(\zeta - \eta) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n - \eta_n)\right) = \mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n - \eta_n)\right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\zeta_n) - \mathbb{E}(\eta_n)) = \mathbb{E}(\zeta) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\mathbb{E}(\eta_n)) \\ &= \mathbb{E}(\zeta) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n), \end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n). \quad (3.9)$$

A (3.8) és (3.9) egyenlőtlenségek alapján létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n)$ határérték és $\mathbb{E}(\eta)$ -val egyenlő. $\square$

3.8. Tétel. (Transzformáció-tétel) *Ha $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor és $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor*

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, \mathbb{P}_{\xi}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, dF_{\xi}(x)$$

abban az értelemben, hogy az integrálok ugyanakkor léteznek, és ha léteznek, egyenlőek.

Bizonyítás. Legyen először g egy nemnegatív, egyszerű mérhető függvény:

$$g = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j},$$

ahol $g(\mathbb{R}^d) = \{c_1, \dots, c_{\ell}\}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_{\ell} \in \mathbb{R}^d$ páronként különbözőek, és $B_j := \{g = c_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Ekkor B_j , $j \in \{1, \dots, \ell\}$, páronként diszjunktak, és a $\xi^{-1}(B_j)$,

$j \in \{1, \dots, \ell\}$, halmazok is páronként diszjunktak. Továbbá, mivel ξ véletlen vektor és $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$, az is adódik, hogy $\xi^{-1}(B_j) \in \mathcal{A}$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Az alábbiakban felhasználjuk majd, hogy tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^d$ és $\omega \in \Omega$ esetén

$$\mathbb{1}_{\xi^{-1}(B)}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \xi^{-1}(B) \Leftrightarrow \xi(\omega) \in B \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\xi(\omega)) = 1.$$

Így

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{P}_\xi(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j} \right) (x) \mathbb{P}_\xi(dx) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{P}_\xi(B_j) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{P}(\xi^{-1}(B_j)) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{\xi^{-1}(B_j)} \right) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{\xi^{-1}(B_j)} \right) (\omega) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j}(\xi(\omega)) \right) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j} \right) \circ \xi \right) (\omega) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} (g \circ \xi)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(g(\xi)), \end{aligned}$$

amivel az integrálok létezésére vonatkozó állítást is beláttuk (g nemnegatív, egyszerű mérhető függvény esetén). Ha g nemnegatív mérhető, akkor létezik nemnegatív, egyszerű mérhető függvényeknek egy olyan $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy $g_n(x) \uparrow g(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén. Így a monoton konvergencia-tételt (3.7. Tétel, (x) rész) kétszer is alkalmazva, először az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_\xi)$ valószínűségi mezőn a $g_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változókra, majd az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn a $g_n \circ \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $g \circ \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változókra, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{P}_\xi(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) \mathbb{P}_\xi(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (g_n \circ \xi)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g_n \circ \xi) = \mathbb{E}(g \circ \xi) = \int_{\Omega} (g \circ \xi)(\omega) \mathbb{P}(d\omega), \end{aligned} \tag{3.10}$$

hiszen $\int_{\mathbb{R}^d} g_1(x) \mathbb{P}_\xi(dx) > -\infty$, $(g_n \circ \xi)(\omega) \uparrow g(\xi(\omega))$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $\omega \in \Omega$ esetén, és $g_n \circ \xi \geq g_1 \circ \xi$, ahol $\mathbb{E}(g_1 \circ \xi) > -\infty$. Az előzőekben az is teljesül, hogy $\int_{\mathbb{R}^d} g_1(x) \mathbb{P}_\xi(dx) \in \mathbb{R}$ és $\mathbb{E}(g_1 \circ \xi) \in \mathbb{R}$, hiszen g_1 egyszerű mérhető függvény és $\mathbb{P}_\xi$ valószínűségi mérték $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -n, és így $g_1 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j}$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_1(x) \mathbb{P}_\xi(dx) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{P}_\xi(B_j) \in \mathbb{R},$$

illetve

$$\mathbb{E}(g_1 \circ \xi) = \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j (\mathbb{1}_{B_j} \circ \xi) \right) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\xi \in B_j\}}) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{P}(\xi \in B_j) \in \mathbb{R}.$$

Az általános eset abból adódik, hogy $(g \circ \xi)^+ = g^+ \circ \xi$ és $(g \circ \xi)^- = g^- \circ \xi$, mely összefüggéseket egyszerűen indokolhatunk. Valóban, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $(g \circ \xi)(\omega) = g(\xi(\omega)) \geq 0$, akkor a pozitív rész definíciója folytán $(g \circ \xi)^+(\omega) = (g \circ \xi)(\omega)$ és $g^+(\xi(\omega)) = g(\xi(\omega))$, és ezért $(g \circ \xi)^+(\omega) = g^+(\xi(\omega))$. Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $(g \circ \xi)(\omega) = g(\xi(\omega)) < 0$, akkor $(g \circ \xi)^+(\omega) = 0$ és $g^+(\xi(\omega)) = 0$, és ezért $(g \circ \xi)^+(\omega) = g^+(\xi(\omega))$ ebben az esetben is. A bizonyítás befejezéseként, ha például $\mathbb{E}(g^+ \circ \xi) < \infty$ és $\mathbb{E}(g^- \circ \xi) < \infty$, akkor (3.10) alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g \circ \xi) &= \mathbb{E}(g^+ \circ \xi) - \mathbb{E}(g^- \circ \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} g^+(x) \mathbb{P}_\xi(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} g^-(x) \mathbb{P}_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} (g^+ - g^-)(x) \mathbb{P}_\xi(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{P}_\xi(dx). \end{aligned}$$

□

3.9. Tétel. (Nemnegatív véletlen változó függvényének várható értéke) *Legyen ξ egy nemnegatív véletlen változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel, legyen továbbá $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton és abszolút folytonos függvény (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$ és $\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta$, akkor $\sum_{j=1}^k |g(b_j) - g(a_j)| < \varepsilon$). Ekkor*

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = g(0) + \int_0^\infty g'(x)(1 - F_\xi(x)) dx,$$

melyet úgy értünk, hogy ha a kifejezés valamelyik oldala véges, akkor másik oldal is véges, és a két oldal egyenlő.

Bizonyítás. Mivel g abszolút folytonos, kapjuk, hogy majdnem mindenütt deriválható és a g' módon jelölt deriváltja Lebesgue-integrálható a $[0, y]$ alakú intervallumokon, ahol $y \in \mathbb{R}_+$, továbbá

$$g(y) = g(0) + \int_0^y g'(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}_+. \quad (3.11)$$

Mivel g monoton is, g' egy Lebesgue szerint null mértékű halmaztól eltekintve azonos előjelű. Mivel g monoton, így g mérhető, és ezért $g(\xi)$ véletlen változó, továbbá az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték létezik (esetlegesen $+\infty$ vagy $-\infty$), mert $g(\xi) \geq g(0)$, ha g monoton növekvő, illetve $g(\xi) \leq g(0)$, ha g monoton csökkenő. Mivel g' egy Lebesgue szerint null mértékű halmaztól eltekintve azonos előjelű, az $\mathbb{R}_+ \ni y \mapsto \int_0^y g'(x) dx$ függvény monoton, és így $\int_0^\xi g'(x) dx$ is véletlen változó. Mindezek miatt (3.11) és a Tonelli-tétel alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(\xi)) &= g(0) + \mathbb{E}\left(\int_0^\xi g'(x) dx\right) = g(0) + \mathbb{E}\left(\int_0^\infty g'(x) \mathbb{1}_{\{x \leq \xi\}} dx\right) \\ &= g(0) + \int_0^\infty \mathbb{E}(g'(x) \mathbb{1}_{\{x \leq \xi\}}) dx \\ &= g(0) + \int_0^\infty g'(x) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x \leq \xi\}}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(0) + \int_0^\infty g'(x) \mathbb{P}(\xi \geq x) dx \\
&= g(0) + \int_0^\infty g'(x)(1 - F_\xi(x)) dx.
\end{aligned}$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a fentiekben a Tonelli-tétel alkalmazásakor szükség volt arra, hogy g monoton legyen, mert ez garantálja, hogy g' azonos előjelű (Lebesgue szerint null mértékű halmaztól eltekintve). $\square$

3.10. Következmény. Legyen ξ egy nemnegatív véletlen változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel.

(i) Tetszőleges $\alpha > 0$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi^\alpha) = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}(1 - F_\xi(x)) dx.$$

Továbbá, ha $\mathbb{E}(\xi^\alpha) < \infty$ valamely $\alpha > 0$ esetén (azaz, ha ξ -nek az $\alpha > 0$ rendű momentuma véges), akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1} \mathbb{P}(\xi \geq x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1}(1 - F_\xi(x)) = 0.$$

Speciálisan, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor ξ n -edrendű momentuma végességének egy szükséges feltétele, hogy a $\mathbb{P}(\xi \geq x)$, $x \geq 0$, farokvalószínűségek legalább x^{n-1} (polinomiális) rendben csengjenek le a végtelenben.

(ii) Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{E}(e^{r\xi}) = 1 + r \int_0^\infty e^{rx}(1 - F_\xi(x)) dx.$$

Továbbá, ha $\mathbb{E}(e^{r\xi}) < \infty$ valamely $r \in \mathbb{R}$ esetén (azaz, ha ξ momentumgeneráló függvénye létezik valamely $r \in \mathbb{R}$ pontban), akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{rx} \mathbb{P}(\xi \geq x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{rx}(1 - F_\xi(x)) = 0.$$

Speciálisan, ha $r > 0$, akkor annak, hogy ξ momentumgeneráló függvény létezzon az r pontban egy szükséges feltétele az, hogy ξ farokvalószínűségei legalább e^{rx} (exponenciális) rendben csengjenek le a végtelenben.

Bizonyítás. Mind az (i), mind a (ii) rész esetén az állítások első fele a 3.9. Tételből következik. Például az (i) rész esetén a $g(x) := x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}_+$, választással, melyre $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, tetszőleges $\alpha > 0$ esetén (ha $\alpha \in (0,1)$, akkor g az $x=0$ pontban nem differenciálható, de $\{0\}$ Lebesgue-szerint 0-mértékű halmaz). Ekkor g abszolút folytonos, mert $g(x) = \int_0^x g'(s) ds$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Az (i) rész esetén, ha $\alpha \in (0,1)$, akkor $x^{\alpha-1} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$, és, mivel $\mathbb{P}(\xi \geq x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$, kapjuk, hogy $x^{\alpha-1} \mathbb{P}(\xi \geq x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$. Ha $\alpha \geq 1$, akkor a dominált konvergencia tétel alapján adódik, hogy $x^{\alpha-1} \mathbb{P}(\xi \geq x) = \mathbb{E}(x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{\xi \geq x\}}) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$, ugyanis

- tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{\xi(\omega) \geq x\}} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$,
- tetszőleges $x > 0$ esetén

$$x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{\xi \geq x\}} = x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{\xi^{\alpha-1} \geq x^{\alpha-1}\}} \leq x^{\alpha-1} \frac{\xi^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} = \xi^{\alpha-1},$$

ahol $\mathbb{E}(\xi^{\alpha-1}) < \infty$.

Hasonlóan, a (ii) rész esetén, ha $r < 0$, akkor $e^{rx} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$, és, mivel $\mathbb{P}(\xi \geq x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$, kapjuk, hogy $e^{rx} \mathbb{P}(\xi \geq x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$. Ha $r \geq 0$, akkor a dominált konvergencia tétel alapján adódik, hogy $e^{rx} \mathbb{P}(\xi \geq x) = \mathbb{E}(e^{rx} \mathbb{1}_{\{\xi \geq x\}}) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$, ugyanis

- tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $e^{rx} \mathbb{1}_{\{\xi(\omega) \geq x\}} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$,
- tetszőleges $x > 0$ esetén

$$e^{rx} \mathbb{1}_{\{\xi \geq x\}} = e^{rx} \mathbb{1}_{\{e^{r\xi} \geq e^{rx}\}} \leq e^{rx} \frac{e^{r\xi}}{e^{rx}} = e^{r\xi},$$

ahol $\mathbb{E}(e^{r\xi}) < \infty$.

□

3.11. Definíció. (megállási idő) Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorváltozók. Azt mondjuk, hogy egy $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ véletlen változó megállási időpont az X_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók sorozatára vonatkozóan, ha $\{\tau \leq n\} \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén.

3.12. Állítás. (Wald-azonosság) Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, és legyen N egy nemnegatív egész értékű (azaz $\mathbb{Z}_+$ -értékű) véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(N) < \infty$. Tegyük fel továbbá, hogy

(i) N független az X_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változóktól,

vagy

(ii) N megállási idő az X_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változókra vonatkozóan. (Ekkor $\mathbb{P}(N \in \mathbb{N}) = 1$, azaz N pozitív egész értékű, hiszen a 3.11. Definíció alapján $\mathbb{P}(N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}) = 1$, és az $\mathbb{E}(N) < \infty$ feltétel miatt $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$.)

Ekkor

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n \right) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_N) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1).$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{n \leq N\}$ és X_n függetlenek. Ha (i) teljesül, akkor ez azonnal következik. Ha (ii) teljesül, akkor

$$\{n \leq N\} = \Omega \setminus \{n > N\} = \Omega \setminus \{n-1 \geq N\} \in \sigma(X_1, \dots, X_{n-1}), \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Ezért $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ esetén, mivel a feltevés miatt X_n független az $X_1, \dots, X_{n-1}$ véletlen változóktól, a fentiek alapján X_n független az $\{n \leq N\}$ eseménytől is. Az $n = 1$ esetben $\{n \leq N\} = \Omega$, mely független az X_1 véletlen változótól.

Így a 3.7. Tétel (xiii) (dominált konvergencia tétel) és (xxii) részei alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} \right) = \mathbb{E} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k X_n \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^k X_n \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{E} (X_n \mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{E}(X_n) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) = \mathbb{E}(X_1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq n) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N), \end{aligned}$$

ahol a harmadik egyenlőségénél a dominált konvergencia tételt azért használhatjuk, mert

- tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $\left| \sum_{n=1}^k X_n \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \mathbb{1}_{\{n \leq N\}},$
- a 3.7. Tétel (xi) és (xxii) részei és a fentiekben igazolt függetlenség alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} (|X_n| \mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) \\ &= \mathbb{E}(|X_1|) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) = \mathbb{E}(|X_1|) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq n) \\ &= \mathbb{E}(|X_1|) \mathbb{E}(N) < \infty. \end{aligned}$$

Az alábbiakban egy másik (de hasonló) módszert is mutatunk a bizonyítás befejezésére. A 3.7. Tétel (xi) része alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n^+ \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n^+ \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^+ \mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^+) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^+) \mathbb{P}(n \leq N) \\ &= \mathbb{E}(X_1^+) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n \leq N) = \mathbb{E}(X_1^+) \mathbb{E}(N) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy X_n^+ és $\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}$ függetlenek (mely következik X_n és $\mathbb{1}_{\{n \leq N\}}$ már bizonyított függetlenségéből) és azt is, hogy X_n^+ , $n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlásúak (mely következik abból, hogy X_n , $n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlásúak). Hasonlóan, kaphatjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n^- \right) = \mathbb{E}(X_1^-) \mathbb{E}(N) \in \mathbb{R},$$

Így a 3.7. Tétel (vi) része alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N (X_n^+ - X_n^-) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n^+ - \sum_{n=1}^N X_n^- \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n^+ \right) - \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n^- \right) = \mathbb{E}(X_1^+) \mathbb{E}(N) - \mathbb{E}(X_1^-) \mathbb{E}(N) \\ &= (\mathbb{E}(X_1^+) - \mathbb{E}(X_1^-)) \mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N). \end{aligned}$$

□

3.13. Állítás. (Wald-azonosság egy általánosítása) Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású $\mathbb{R}^d$ -beli értékű véletlen vektorváltozók, $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|h(X_1)|) < \infty$. Legyen továbbá N egy pozitív egész értékű (azaz $\mathbb{N}$ -értékű) véletlen változó, mely megállási idő az X_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változókra vonatkozóan és $\mathbb{E}(N) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N h(X_n) \right) = \mathbb{E}(h(X_1) + \cdots + h(X_N)) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(h(X_1)).$$

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint a Wald-azonosság (3.12. Állítás) felhasználva, hogy abból, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{n \leq N\} \in \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})$ és X_n függetlenek következik, hogy $\{n \leq N\}$ és $h(X_n)$ is függetlenek (az 1.18. Állítás (i) része alapján). □

3.14. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $\mu: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ halmazfüggvény **abszolút folytonos** a $\nu: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ halmazfüggvényre nézve, ha minden $B \in \mathcal{X}$, $\nu(B) = 0$ esetén $\mu(B) = 0$. Jelölése: $\mu \ll \nu$.

Legyen $\nu: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges mérték. Azt mondjuk, hogy a $\xi: \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **abszolút folytonos eloszlású a ν mértékre nézve**, ha $\mathbb{P}_\xi \ll \nu$. Azt mondjuk, hogy a $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változó **abszolút folytonos eloszlású**, ha abszolút folytonos eloszlású a d -dimenziós λ_d Lebesgue-mértékre (pontosabban λ_d -nek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -re való leszűkítésére) nézve.

A 3.14. Definíció második részében ($\mathbb{P}_\xi \ll \nu$ definiálásakor) a ν mérték σ -végeességét a Radon-Nikodym tétel (lásd, 3.16. Tétel) alkalmazhatóságára gondolva tettük fel, nem lenne feltétlenül szükséges.

3.15. Tétel. (Sűrűség-tétel) Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhetőségi tér, $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ mérték, $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív mérhető függvény. Ekkor a $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mu(B) := \int_B g(x) \nu(dx), \quad B \in \mathcal{X},$$

halmazfüggvény mérték, amely pontosan akkor véges, ha g integrálható. Továbbá, $\mu \ll \nu$, és tetszőleges $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény esetén

$$\int_X h(x) \mu(dx) = \int_X h(x) g(x) \nu(dx) \quad (3.12)$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha létezik, egyenlőek.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy μ mérték. Az integrál tulajdonságai miatt

$$\mu(\emptyset) = \int_{\emptyset} g(x) \nu(dx) = \int_X g(x) \mathbb{1}_{\emptyset}(x) \nu(dx) = \int_X 0 \nu(dx) = 0,$$

és ha $B_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, akkor

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} g(x) \nu(dx) = \int_X g(x) \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}(x) \nu(dx) = \int_X g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(x) \nu(dx) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} (g \mathbb{1}_{B_n})(x) \nu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X (g \mathbb{1}_{B_n})(x) \nu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} g(x) \nu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n), \end{aligned}$$

ahol az ötödik lépésnél felhasználtuk, hogy g nemnegatív, és így μ σ -additív.

Mivel $\mu(X) = \int_X g(x) \nu(dx)$, kapjuk, hogy μ pontosan akkor véges, ha g integrálható.

Megmutatjuk most, hogy $\mu \ll \nu$. Legyen $B \in \mathcal{X}$, hogy $\nu(B) = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n(x) := \min(g(x), n)$, $x \in X$. Ekkor g_n mérhető, és $g_n(x) \uparrow g(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in X$ esetén. Így $(g_n \mathbb{1}_B)(x) \uparrow (g \mathbb{1}_B)(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és a monoton konvergencia tétel szerint

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(B) &= \int_X (g \mathbb{1}_B)(x) \nu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (g_n \mathbb{1}_B)(x) \nu(dx) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X (g_n \mathbb{1}_B)(x) \nu(dx) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X (n \mathbb{1}_B)(x) \nu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \nu(B)) = 0, \end{aligned}$$

és így $\mu(B) = 0$.

Végezetül megmutatjuk, hogy (3.12) teljesül. Legyen először h egy egyszerű, nemnegatív mérhető függvény:

$$h = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j},$$

ahol $h(X) = \{c_1, \dots, c_\ell\}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R}$ páronként különbözőek, és $B_j := \{h = c_j\}$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_X h(x) \mu(dx) &= \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \int_{B_j} g(x) \nu(dx) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \int_X g(x) \mathbb{1}_{B_j}(x) \nu(dx) \\ &= \int_X g(x) \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{B_j} \right) (x) \nu(dx) = \int_X g(x) h(x) \nu(dx), \end{aligned}$$

mely az integrál létezésére vonatkozó állítást is igazolja (h egyszerű, nemnegatív mérhető függvény esetén).

Ha h nemnegatív mérhető, akkor létezik nemnegatív, egyszerű mérhető függvényeknek egy olyan $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy $h_n(x) \uparrow h(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in X$ esetén. Így a monoton konvergencia tétel szerint

$$\int_X h(x) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g(x) h_n(x) \nu(dx) = \int_X g(x) h(x) \nu(dx),$$

ahol az utolsó lépésben azt is felhasználtuk, hogy mivel $g \geq 0$, így $g(x) h_n(x) \uparrow g(x) h(x)$, ha $n \rightarrow \infty$, minden $x \in X$ esetén, és azt is, hogy mivel $h_1 \geq 0$, teljesül, hogy $g(x) h_n(x) \geq g(x) h_1(x) \geq 0$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Az általános eset abból adódik, hogy $(hg)^+ = gh^+$ és $(hg)^- = gh^-$, hiszen $g \geq 0$. $\square$

A 3.15. Tétel elnevezését (sűrűségtétel) a 3.17. Definíció világítja meg.

3.16. Tétel. (Radon-Nikodym tétel) Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér és $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ egy σ -véges mérték. A $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ előjeles mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos a ν mértékre nézve, ha létezik olyan $g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ mérhető függvény, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{X}$ esetén

$$\mu(B) = \int_B g(x) \nu(dx).$$

A g függvény ν -m.m. egyértelműen meg van határozva, azaz ha egy $h : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ mérhető függvényre is teljesül

$$\mu(B) = \int_B h(x) \nu(dx)$$

minden $B \in \mathcal{X}$ esetén, akkor $\nu(\{x \in X : g(x) \neq h(x)\}) = 0$.

A Radon-Nikodym tételben létező (ν -m.m. egyértelműen meghatározott) g függvényt a μ mértéknek a ν mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltjának nevezzük, melynek jelölése $\frac{d\mu}{d\nu}$.

3.17. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ abszolút folytonos (eloszlású) véletlen vektor. Ekkor az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhető téren adott $\mathbb{P}_\xi$ mértéknek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhető téren adott (arra leszűkített) d -dimenziós λ_d Lebesgue-mértékre vonatkozó $f_\xi := \frac{d\mathbb{P}_\xi}{d\lambda_d}$ Radon-Nikodym deriváltját ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ abszolút folytonos véletlen vektor f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor a Radon-Nikodym tétel (3.16. Tétel) alapján $f_\xi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén és $\mathbb{P}_\xi(B) = \int_B f_\xi(x) \lambda_d(dx)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Ha $d = 1$, akkor speciálisan

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}_\xi((-\infty, x)) = \int_{(-\infty, x)} f_\xi(t) \lambda_1(dt) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.18. Állítás. Egy $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye valamely d -dimenziós véletlen változónak, ha (Borel) mérhető, Lebesgue-majdnem mindenütt nemnegatív és $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1$.

3.19. Állítás. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha az F_ξ eloszlásfüggvénye abszolút folytonos, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$ és $\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta$, akkor $\sum_{j=1}^k (F_\xi(b_j) - F_\xi(a_j)) < \varepsilon$.

A 3.19. Állítás kapcsán emlékeztetünk rá, hogy egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz Lebesgue-szerint null-mértékű, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\{(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}\}$ intervallumrendszer, hogy $H \subset \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n)$ és $\sum_{n=1}^\infty (b_n - a_n) < \varepsilon$.

A sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény kapcsolatát írja le a következő állítás.

3.20. Állítás. Ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor abszolút folytonos, akkor $f_\xi(x) = \partial_1 \dots \partial_d F_\xi(x)$ λ_d -m.m. $x \in \mathbb{R}^d$. (A $\partial_1 \dots \partial_d F_\xi(x)$ parciális derivált létezése λ_d -m.m. $x \in \mathbb{R}^d$ esetén a monoton függvények majdnem mindenütti differenciálhatóságára vonatkozó Lebesgue-tétel következménye.)

Abszolút folytonos véletlen vektor függvényének várható értékét a következő módon számolhatjuk.

3.21. Állítás. Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ abszolút folytonos véletlen vektor és $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f_\xi(x) dx$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek, egyenlőek.

Bizonyítás. Az állítás a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) és a Sűrűségtétel (3.15. Tétel) következménye. Valóban, mivel $\mathbb{P}_\xi$ abszolút folytonos a d -dimenziós λ_d Lebesgue-mértékre (pontosabban $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -re vett megszorítására) nézve és $\frac{d\mathbb{P}_\xi}{d\lambda_d} = f_\xi$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{P}_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \left(\frac{d\mathbb{P}_\xi}{d\lambda_d} \right) (x) \lambda_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f_\xi(x) dx$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek, egyenlőek. $\square$

Abszolút folytonos véletlen változó alkalmas transzformáltja, például szigorúan monoton, folytonosan differenciálható, nem eltűnő deriváltú transzformáltja, abszolút folytonos, melynek sűrűségfüggvényét a következő módon számolhatjuk.

3.22. Állítás. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút folytonos véletlen változó, f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $\mathbb{P}(\xi \in D) = 1$. Legyen továbbá $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, mely kölcsönösen egyértelmű D -n, és deriváltja seholsem nulla. (Analízisből ismert, hogy ekkor $g(D) \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, és a $h : g(D) \rightarrow D$ inverzfüggvény folytonosan differenciálható, nemnulla deriválttal.) Ekkor a $g(\xi)$ véletlen változó is abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_{g(\xi)}(y) = \begin{cases} f_\xi(h(y))|h'(y)| = \frac{f_\xi(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}, & \text{ha } y \in g(D), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Csak abban az esetben igazoljuk az állítást, amikor g szigorúan monoton növekvő is. Ekkor h szigorúan monoton növekvő és így $|h'| = h'$. Legyen $\eta := g(\xi)$.

Ha $y \in g(D)$, akkor az $x = h(y)$ helyettesítéssel, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= \mathbb{P}(\eta < y) = \mathbb{P}(g(\xi) < y) = \mathbb{P}(\xi < h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_\xi(x) dx = \int_{(-\infty, h(y)) \cap D} f_\xi(x) dx \\ &= \int_{g((-\infty, h(y)) \cap D)} f_\xi(h(v))h'(v) dv = \int_{(-\infty, y) \cap g(D)} f_\xi(h(v))h'(v) dv = \int_{-\infty}^y f_\eta(v) dv, \end{aligned}$$

ahol az ötödik lépésben felhasználtuk, hogy $\mathbb{P}(\xi \in D) = 1$ miatt $f_\xi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

Ha $y \notin g(D)$, akkor legyen $\tilde{y} := \sup\{z \in g(D) : z < y\}$. Ekkor, mivel $\mathbb{P}(\eta \in g(D)) = 1$, és létezik olyan $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy $z_n \in g(D)$, $z_n < y$, $n \in \mathbb{N}$, és $z_n \uparrow \tilde{y}$, ha $n \rightarrow \infty$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= \mathbb{P}(\eta < y) = \mathbb{P}(\eta \leq \tilde{y}) + \mathbb{P}(\tilde{y} < \eta < y) = \mathbb{P}(\eta < \tilde{y}) + \mathbb{P}(\eta = \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\eta(z_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{z_n} f_\eta(v) dv = \int_{-\infty}^{\tilde{y}} f_\eta(v) dv = \int_{-\infty}^y f_\eta(v) dv, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a Transzformáció-tétel (lásd, 3.8. Tétel) alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta = \tilde{y}) &= \mathbb{P}(g(\xi) = \tilde{y}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tilde{y}\}}(g(\xi))) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\tilde{y}\}}(g(x)) \mathbb{P}_\xi(dx) \\ &= \mathbb{P}_\xi(g^{-1}(\{\tilde{y}\})) = \mathbb{P}(\xi \in g^{-1}(\{\tilde{y}\})) = 0, \end{aligned}$$

hiszen ξ abszolút folytonos eloszlású és $g^{-1}(\{\tilde{y}\})$ legfeljebb egyelemű halmaz. $\square$

Független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók összegének, szorzatának és hányadosának sűrűségfüggvényét a következő módon számolhatjuk.

3.23. Állítás. Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók f_ξ , illetve f_η sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

(i) a $\xi + \eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)f_\eta(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z-y)f_\eta(y) dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Ezt a formulát konvolúciós formulának is hívják.

(ii) a $\xi\eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\xi\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) f_{\eta}\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}\left(\frac{z}{y}\right) f_{\eta}(y) \frac{dy}{|y|}, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R},$$

(iii) a $\frac{\xi}{\eta}$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) f_{\eta}\left(\frac{x}{z}\right) |x| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(zy) f_{\eta}(y) |y| dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Mivel ξ és η függetlenek és abszolút folytonos eloszlásúak, (ξ, η) is abszolút folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye $f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(i). Mivel f_{ξ} és f_{η} mérhetőek, a Fubini-tétel alapján kapjuk, hogy a $\mathbb{R} \ni z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(z - y) f_{\eta}(y) dy$ függvény is mérhető. Továbbá, tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \mathbb{P}(\xi + \eta < z) = \mathbb{P}(\xi + \eta \in (-\infty, z)) \\ &= \mathbb{P}((\xi, \eta) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < z\}) = \iint_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < z\}} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < z\}} f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-x+z} f_{\eta}(y) dy \right) f_{\xi}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^z f_{\eta}(u - x) du \right) f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) f_{\eta}(u - x) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^z f_{\xi+\eta}(u) du. \end{aligned}$$

(ii). Mivel f_{ξ} és f_{η} mérhetőek, a Fubini-tétel alapján kapjuk, hogy a $\mathbb{R} \ni z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) f_{\eta}\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|}$ függvény is mérhető. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(\xi > 0) = 1$. Ekkor $f_{\xi}(x) = 0$, $\lambda_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, és így azt kell igazolnunk, hogy

$$f_{\xi\eta}(z) = \int_0^{\infty} f_{\xi}(x) f_{\eta}\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{x} dx, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(z) &= \mathbb{P}(\xi\eta < z) = \mathbb{P}((\xi, \eta) \in \{(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : xy < z\}) \\ &= \iint_{\{(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : xy < z\}} f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} f_{\xi}(x) \left(\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{\eta}(y) dy \right) dx = \int_0^{\infty} f_{\xi}(x) \left(\int_{-\infty}^z f_{\eta}\left(\frac{u}{x}\right) \frac{1}{x} du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_0^{\infty} f_{\xi}(x) f_{\eta}\left(\frac{u}{x}\right) \frac{1}{x} dx \right) du = \int_{-\infty}^z f_{\xi\eta}(u) du. \end{aligned}$$

A bizonyítást úgy is befejezhetjük volna, hogy a fenti levezetésből adódó

$$F_{\xi\eta}(z) = \int_0^{\infty} f_{\xi}(x) F_{\eta}\left(\frac{z}{x}\right) dx, \quad z \in \mathbb{R},$$

egyenlőség mindkét oldalát z -szerint differenciáljuk, felhasználva a 3.20. Állítást.

(iii). Mivel η abszolút folytonos eloszlású, kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\eta=0)=0$, így $\frac{\xi}{\eta}$ $\mathbb{P}$ -m.m. jól-definiált. Ha teljesen precízek szeretnénk lenni, akkor tekinthetnénk például a $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\zeta(\omega) := \begin{cases} \frac{\xi(\omega)}{\eta(\omega)} & \text{ha } \eta(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } \eta(\omega) = 0, \end{cases}$$

véletlen változót, ahol ζ -t az $\{\omega \in \Omega : \eta(\omega)=0\}$ nulla valószínűségű eseményen 0-nak definiáltuk, de definiálhattuk volna tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós számnak is. Tegyük fel a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy $\mathbb{P}(\eta > 0) = 1$. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \int_0^\infty f_\xi(zy) f_\eta(y) y \, dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < z\right) = \mathbb{P}\left((\xi, \eta) \in \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : \frac{x}{y} < z\}\right) \\ &= \iint_{\{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : \frac{x}{y} < z\}} f_\xi(x) f_\eta(y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Ha $z > 0$, akkor felhasználva, hogy $\int_0^\infty f_\eta(y) \, dy = 1$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) &= \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty f_\xi(x) f_\eta(y) \, dx \, dy + \int_0^\infty \int_{\frac{x}{z}}^\infty f_\xi(x) f_\eta(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f_\xi(x) \, dx + \int_0^\infty f_\xi(x) \left(\int_{\frac{x}{z}}^\infty f_\eta(y) \, dy \right) \, dx \\ &= 1 - \int_0^\infty f_\xi(x) \left(1 - \int_{\frac{x}{z}}^\infty f_\eta(y) \, dy \right) \, dx \\ &= 1 - \int_0^\infty f_\xi(x) \left(\int_0^{\frac{x}{z}} f_\eta(y) \, dy \right) \, dx \\ &= 1 - \int_0^\infty f_\xi(x) F_\eta\left(\frac{x}{z}\right) \, dx, \end{aligned}$$

és így z -szerinti deriválással adódik, hogy

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = - \int_0^\infty f_\xi(x) f_\eta\left(\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{-x}{z^2} \, dx = \int_0^\infty f_\xi(zt) f_\eta(t) t \, dt, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z > 0.$$

Ha $z < 0$, akkor

$$F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\frac{x}{z}} f_\xi(x) f_\eta(y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^0 f_\xi(x) \left(\int_0^{\frac{x}{z}} f_\eta(y) \, dy \right) \, dx = \int_{-\infty}^0 f_\xi(x) F_\eta\left(\frac{x}{z}\right) \, dx,$$

és így z -szerinti deriválással kapjuk, hogy

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \int_{-\infty}^0 f_{\xi}(x) f_{\eta}\left(\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{-x}{z^2} dx = \int_0^{\infty} f_{\xi}(zt) f_{\eta}(t) t dt, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z < 0.$$

Az $f_{\frac{\xi}{\eta}}(z)$ -re vonatkozó másik összefüggést a már levezetett formulából a $zy=x$ helyettesítéssel kaphatjuk. $\square$

A 3.23. Állítás általánosításaként megadjuk együttesen abszolút folytonos eloszlású véletlen változók összegének, szorzatának és hányadosának sűrűségfüggvényét.

3.24. Állítás. *Ha ξ és η együttesen abszolút folytonos eloszlású véletlen változók $f_{\xi,\eta}$ együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor*

(i) *a $\xi + \eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és*

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(z-y, y) dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

(ii) *a $\xi\eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és*

$$f_{\xi\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{dy}{|y|}, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R},$$

(iii) *a $\frac{\xi}{\eta}$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és*

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}\left(x, \frac{x}{z}\right) |x| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(zy, y) |y| dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint a 3.23. Állítás, az alábbiakban csak a (iii) rész bizonyítását részletezzük. Mivel η abszolút folytonos eloszlású, kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\eta = 0) = 0$, így $\frac{\xi}{\eta}$ $\mathbb{P}$ -m.m. jól-definiált. Ha teljesen precízek szeretnénk lenni, akkor tekinthetnénk például a $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\zeta(\omega) := \begin{cases} \frac{\xi(\omega)}{\eta(\omega)} & \text{ha } \eta(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } \eta(\omega) = 0, \end{cases}$$

véletlen változót, ahol ζ -t az $\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = 0\}$ nulla valószínűségű eseményen 0-nak definiáltuk, de definiálhattuk volna tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós számnak is. Ezért tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén, a

Fubini-tétel alapján, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < z, \eta > 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < z, \eta < 0\right) = \mathbb{P}(\xi < z\eta, \eta > 0) + \mathbb{P}(\xi > z\eta, \eta < 0) \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{zy} f_{\xi,\eta}(x, y) dx\right) dy + \int_{-\infty}^0 \left(\int_{zy}^\infty f_{\xi,\eta}(x, y) dx\right) dy \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^z f_{\xi,\eta}(uy, y) y du\right) dy + \int_{-\infty}^0 \left(\int_z^{-\infty} f_{\xi,\eta}(uy, y) y du\right) dy \\
 &= \int_{-\infty}^z \left(\int_0^\infty f_{\xi,\eta}(uy, y) y dy\right) du + \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^0 f_{\xi,\eta}(uy, y) (-y) dy\right) du \\
 &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^\infty f_{\xi,\eta}(uy, y) |y| dy\right) du,
 \end{aligned}$$

melyből a sűrűségfüggvény definíciója alapján következik a (iii) rész állításában szereplő második formula. Az első formula a második formulából adódik az $y = \frac{x}{z}$ helyettesítéssel (feltéve, hogy $z \neq 0$). $\square$

3.25. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhetőségi tér, $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ előjeles mérték.

Azt mondjuk, hogy a μ előjeles mérték **egy $B \in \mathcal{X}$ halmazba koncentrálódik**, ha $\mu(X \setminus B) = 0$.

Ha μ egy $B \in \mathcal{X}$ halmazba koncentrálódik és $\tilde{B} \in \mathcal{X}$ olyan, hogy $B \subset \tilde{B}$, akkor μ a $\tilde{B}$ halmazba is koncentrálódik.

3.26. Definíció. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy **diszkrét** véletlen vektor (azaz az 1.10. Definícióban az $X := \mathbb{R}^d$ választással élve $\xi(\Omega)$ megszámlálható halmaz). Azt mondjuk, hogy ξ egy $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazba koncentrálódik, ha $\mathbb{P}_\xi$ a B halmazba koncentrálódik, ezzel ekvivalens módon $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B) = 1$. Az ilyen tulajdonságú halmazok metszetét (azaz a legszűkebb ilyen halmazt) a $\mathbb{P}_\xi$ mérték **tartójának** nevezzük. Jelölése: $\text{supp}(\xi)$.

3.27. Állítás. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor tartója a $\mathbb{P}_\xi$ mérték **atomjaiból** áll, azaz

$$\text{supp}(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^d : \mathbb{P}_\xi(\{x\}) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \mathbb{P}(\xi = x) > 0\}.$$

3.28. Állítás. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor eloszlása

$$\mathbb{P}_\xi = \sum_{x \in \text{supp}(\xi)} \mathbb{P}(\xi = x) \delta_x,$$

ahol $x \in \mathbb{R}^d$ esetén δ_x az x pontba koncentrálódó Dirac-mértéket jelöli, azaz $\delta_x(A) = 1$, ha $x \in A$, és $\delta_x(A) = 0$, ha $x \notin A$.

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) = \sum_{\{y \in \text{supp}(\xi) : y \leq x\}} \mathbb{P}(\xi = y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

3.29. Megjegyzés. Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét véletlen változó és $x \in \text{supp}(\xi)$, akkor

$$F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x) - \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi = x) > 0,$$

és így F_ξ nem folytonos az x pontban.

Ha $\xi = (\xi_1, \xi_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ diszkrét véletlen vektor és $x = (x_1, x_2) \in \text{supp}(\xi)$, akkor

$$\begin{aligned} F_\xi(x+0) - F_\xi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi\left(x_1 + \frac{1}{n}, x_2 + \frac{1}{n}\right) - F_\xi(x_1, x_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\xi_1 < x_1 + \frac{1}{n}, \xi_2 < x_2 + \frac{1}{n}\right) - \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2) - \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) \\ &= \mathbb{P}(\partial((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2])) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 < x_2) + \mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) + \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 = x_2) \\ &\geq \mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = \mathbb{P}(\xi = x) > 0, \end{aligned}$$

és így F_ξ nem folytonos az x pontban. □

3.30. Állítás. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor és $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény. A $g(\xi)$ véletlen változónak akkor és csak akkor véges a várható értéke (integrálható), ha

$$\mathbb{E}(|g(\xi)|) = \sum_{x \in \text{supp}(\xi)} |g(x)| \mathbb{P}(\xi = x) < \infty,$$

és ekkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_{x \in \text{supp}(\xi)} g(x) \mathbb{P}(\xi = x).$$

(Ez az állítás a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) speciális esete.)

3.31. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhetőségi tér. Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ és $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ mértékek **szingulárisak egymásra (nézve)**, ha léteznek olyan diszjunkt $A, B \in \mathcal{X}$ halmazok, hogy μ az A halmazba, ν pedig a B halmazba koncentrálódik. Jelölése: $\mu \perp \nu$.

3.32. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **szinguláris**, ha $\mathbb{P}_\xi$ és λ_d (pontosabban λ_d -nek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -re vett megszorítása) szingulárisak egymásra (nézve), ahol λ_d a d -dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli, ekvivalens módon, $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ úgy, hogy $\lambda_d(B) = 0$ és $\mathbb{P}(\xi \in B) = 1$.

Megjegyezzük, hogy a 3.32. Definícióban a $\mathbb{P}_\xi$ és λ_d mértékek szingularitása a 3.31. Definíció szerinti értelemben azt jelenti, hogy léteznek olyan $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazok, hogy $A \cap B = \emptyset$, $\lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$ és $\mathbb{P}_\xi(\mathbb{R}^d \setminus B) = 0$. Mivel $\mathbb{P}_\xi$ valószínűségi mérték, kapjuk, hogy $\mathbb{P}_\xi(\mathbb{R}^d \setminus B) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{P}_\xi(B) = 1$, azaz $\mathbb{P}(\xi \in B) = 1$. Mivel $A \cap B = \emptyset$, adódik,

hogy $B \subset \mathbb{R}^d \setminus A$, és így $\lambda_d(B) \leq \lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$, amiből következik, hogy $\lambda_d(B) = 0$. Továbbá, ha $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ olyan, hogy $\lambda_d(C) = 0$ és $\mathbb{P}(\xi \in C) = 1$, akkor λ_d az $X \setminus C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{P}_\xi$ pedig a $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazba koncentrálódik. Megmutattuk tehát, hogy a 3.32. Definícióban jogosan írhattuk azt, hogy "ekvivalens módon, $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ úgy, hogy $\lambda_d(B) = 0$ és $\mathbb{P}(\xi \in B) = 1$ ".

Egy $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor nyilván szinguláris, ugyanis $\text{supp}(\xi) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (hiszen megszámlálható uniója a ξ atomjaiból álló egyelemű halmazoknak), $\mathbb{P}(\xi \in \text{supp}(\xi)) = 1$ és $\lambda_d(\text{supp}(\xi)) = 0$, mert $\text{supp}(\xi)$ megszámlálható.

3.33. Állítás. A $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó akkor és csak akkor szinguláris, ha $F'_\xi(x) = 0$ λ_1 -m.m. $x \in \mathbb{R}$.

3.34. Tétel. (Lebesgue-féle felbontási tétel) Legyen $(X, \mathcal{X})$ egy mérhető tér, μ és ν σ -véges mértékek $\mathcal{X}$ -en. Ekkor létezik olyan $f: X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény és olyan ν_s mérték $\mathcal{X}$ -en, hogy $\mu \perp \nu_s$ és

$$\nu(A) = \int_A f d\mu + \nu_s(A), \quad A \in \mathcal{X}.$$

Az f függvény μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $g: X \rightarrow [0, \infty]$ egy olyan mérhető függvény, melyre $\nu(A) = \int_A g d\mu + \nu_s(A)$, $A \in \mathcal{X}$, akkor

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

A fenti felbontást ν -nek a μ -re vonatkozó Lebesgue-féle felbontásának nevezzük.

3.35. Tétel. Tetszőleges $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eloszlásfüggvény egyértelműen felbontható

$$F = p_1 F_d + p_2 F_{af} + p_3 F_{fs}$$

alakban, ahol $p_1, p_2, p_3 \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, F_d egy diszkrét, F_{af} egy abszolút folytonos, F_{fs} egy folytonos szinguláris eloszlásfüggvény (azaz F_d egy diszkrét véletlen változó, F_{af} egy abszolút folytonos véletlen változó, F_{fs} pedig egy szinguláris véletlen változó eloszlásfüggvénye, hogy F_{fs} folytonos is).

3.36. Definíció. Legyen $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó.

- Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_+$. A ξ **α -adik abszolút momentuma**: $\mathbb{E}(|\xi|^\alpha) \in [0, \infty]$.
- Ha $k \in \mathbb{N}$, és ξ k -adik abszolút momentuma véges, akkor ξ **k -adik momentuma**: $\mathbb{E}(\xi^k) \in \mathbb{R}$,
 ξ **k -adik centrális momentuma**: $\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^k) \in \mathbb{R}$.
- Ha ξ második (abszolút) momentuma véges, akkor ξ második centrális momentumát ξ **varianciájának (szórásnégyzetének)** nevezzük. Jelölése: $\text{Var}(\xi) := \mathbb{D}^2(\xi) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2)$.

3.37. Definíció. Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ha $\mathbb{E}(|\xi_1|) < \infty, \dots, \mathbb{E}(|\xi_d|) < \infty$, akkor ξ **várható érték vektora**

$$\mathbb{E}(\xi) := (\mathbb{E}(\xi_1), \dots, \mathbb{E}(\xi_d))^\top \in \mathbb{R}^d.$$

3.38. Definíció. Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ha $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$, azaz $\mathbb{E}(\xi_1^2) < \infty, \dots, \mathbb{E}(\xi_d^2) < \infty$, akkor ξ **kovarianciamátrixa**

$$\text{Cov}(\xi) := \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^\top] \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

melynek elemei $\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) := \mathbb{E}[(\xi_i - \mathbb{E}(\xi_i))(\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j))]$, $1 \leq i, j \leq d$.

A kovarianciamátrix tulajdonságait írja le a következő állítás.

3.39. Állítás. Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, melyre $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$. Ekkor

- $\text{Cov}(\xi)$ szimmetrikus: $\text{Cov}(\xi)^\top = \text{Cov}(\xi)$.
- $\text{Cov}(\xi)$ pozitív szemidefinit, azaz $\forall x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$x^\top \text{Cov}(\xi) x = \langle \text{Cov}(\xi) x, x \rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j \geq 0.$$

- Ha $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$ és $b \in \mathbb{R}^r$, akkor $\mathbb{E}(A\xi + b) = A\mathbb{E}(\xi) + b$ és $\text{Cov}(A\xi + b) = A\text{Cov}(\xi)A^\top$.

3.40. Állítás. (Jensen-egyenlőtlenség többdimenzióban) Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, melyre $\mathbb{E}(\|\xi\|) < \infty$.

- (i) Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ nemüres, konvex, zárt és $\mathbb{P}(\xi \in K) = 1$, akkor $\mathbb{E}(\xi) \in K$.
- (ii) Ha $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ konvex és $\mathbb{E}(|g(\xi)|) < \infty$, akkor $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$.

A 3.40. Állítás (ii) részében $g(\xi)$ valóban véletlen változó, hiszen ismert, hogy $\mathbb{R}^d$ egy konvex, nyílt halmazán értelmezett valós értékű konvex függvény folytonos és így mérhető is, ezért alkalmazhatjuk az 1.18. Állítás (i) részét. Felhívjuk a figyelmet, hogy a későbbiekben a többdimenziós Jensen-egyenlőtlenségnek ismertetjük és bizonyítjuk az ún. feltételes alakját (lásd 8.6. Tétel), melynek a (nem feltételes) többdimenziós Jensen-egyenlőtlenség speciális esete.

3.41. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy komplex értékű $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\xi = \text{Re } \xi + i \text{Im } \xi$ valószínűségi változónak **véges a várható értéke (integrálható)**, ha az $\mathbb{E}(\text{Re } \xi)$ és $\mathbb{E}(\text{Im } \xi)$ várható értékek végesek, és ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) := \mathbb{E}(\text{Re } \xi) + i \mathbb{E}(\text{Im } \xi).$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a 3.41. Definícióban egy komplex értékű valószínűségi változó esetén a "véges a várható értéke (integrálható)" csak egy elnevezés, egy komplex szám végenségét nem definiáljuk. A 3.41. Definícióban azt, hogy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ komplex értékű véletlen változó az 1.10. Definíció speciális eseteként értjük $(X, \mathcal{X}) := (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ választással. Mivel a $\mathbb{C} \ni z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ és $\mathbb{C} \ni z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ valós, illetve képzetes rész függvények folytonosak, az 1.18. Állítás (i) része alapján kapjuk, hogy ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ komplex értékű véletlen változó, akkor $\operatorname{Re}(\xi)$ és $\operatorname{Im}(\xi)$ valós értékű véletlen változók. Továbbá, ha $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (valós értékű) véletlen változók, akkor $\xi := \eta + i\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ egy komplex értékű véletlen változó, ugyanis $\xi = f(\eta, \zeta)$, ahol $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x, y) := x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, egy homeomorfizmus (azaz bijektív, folytonos és az inverze is folytonos) és (η, ζ) egy 2-dimenziós véletlen változó. Nyilván, ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ valószínűségi változónak véges a várható értéke, akkor a $\bar{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ valószínűségi változónak is véges a várható értéke és $\mathbb{E}(\bar{\xi}) = \overline{\mathbb{E}(\xi)} = \mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi) - i \mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi)$.

3.42. Megjegyzés. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ valószínűségi változónak akkor és csak akkor véges a várható értéke, ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, ahol $|\xi| = \sqrt{(\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2}$. Valóban, ha az $\mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi)$ és $\mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi)$ várható értékek végesek, akkor a 3.6. Megjegyzés (i) része szerint $\mathbb{E}(|\operatorname{Re} \xi|) < \infty$ és $\mathbb{E}(|\operatorname{Im} \xi|) < \infty$, így a háromszög egyenlőtlenség szerint $\mathbb{E}(|\xi|) \leq \mathbb{E}(|\operatorname{Re} \xi| + |\operatorname{Im} \xi|) < \infty$. Megfordítva, ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\operatorname{Re} \xi|) \leq \mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ és $\mathbb{E}(|\operatorname{Im} \xi|) \leq \mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Így újra a 3.6. Megjegyzés (i) részét használva, az $\mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi)$ és $\mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi)$ várható értékek végesek, ami a 3.41. Definíció szerint azt jelenti, hogy ξ várható értéke véges. $\square$

3.43. Állítás. Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ valószínűségi változó és $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, akkor $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$.

Bizonyítás. Nyilván

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\xi)| &= |\mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi) + i \mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi)| = \sqrt{(\mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi))^2 + (\mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi))^2} \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sqrt{(\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2} \right) = \mathbb{E}(|\xi|), \end{aligned}$$

hiszen a $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, függvény konvex, így alkalmazhatjuk a (2-dimenziós) Jensen-egyenlőtlenséget (lásd a 3.40. Állítást a $(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ véletlen vektorra és a megadott g függvényre alkalmazva). A g függvény valóban konvex, hiszen tetszőleges $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ és $\lambda \in (0, 1)$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} g(\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2)) &= g((\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)) \\ &= \left((\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)\| \\ &= \|(\lambda x_1, \lambda y_1) + ((1 - \lambda)x_2, (1 - \lambda)y_2)\| \\ &\leq \|(\lambda x_1, \lambda y_1)\| + \|((1 - \lambda)x_2, (1 - \lambda)y_2)\| \\ &= \lambda(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}} + (1 - \lambda)(x_2^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda g(x_1, y_1) + (1 - \lambda)g(x_2, y_2). \end{aligned}$$

□

3.44. Állítás. Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ egy (index)halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\xi_\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ valószínűségi változó. Ekkor a $\{\xi_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor **függetlenek**, ha a $\{(\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlenek.

Bizonyítás. A $\{\xi_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlensége a 2.1. Definíció értelmében (az $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma) := (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, $\gamma \in \Gamma$, választással) azt jelenti, hogy a $\{\sigma(\xi_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrák függetlenek. A $\{(\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlensége a 2.1. Definíció értelmében (az $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma) := (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, $\gamma \in \Gamma$, választással) azt jelenti, hogy a $\{\sigma((\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma)): \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrák függetlenek. Így az állítás belátásához elég azt megmutatni, hogy

$$\sigma(\xi_\gamma) = \sigma((\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma)), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Ismert, hogy az $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto T(x, y) := x + iy \in \mathbb{C}$ leképezés homeomorfizmus (azaz bijektív, folytonos és az inverze is folytonos). Továbbá, az 1.13. Megjegyzés (ii) része és az 1.19. Állítás alapján, tetszőleges $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$\sigma(\xi_\gamma) = \xi_\gamma^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{C})) = (T \circ (\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma))^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{C})) = (\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma)^{-1}(T^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{C}))),$$

és

$$\sigma((\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma)) = (\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma)^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)).$$

Ezért elég belátni, hogy $T^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{C})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq \mathbb{R}^2 : U \text{ nyílt}\} \quad \text{és} \quad \mathcal{V} := \{V \subseteq \mathbb{C} : V \text{ nyílt}\}.$$

Ekkor $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ és $\sigma(\mathcal{V}) = \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Továbbá, az 1.19. Állítás alapján

$$T^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{C})) = T^{-1}(\sigma(\mathcal{V})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{V})) = \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \quad (3.13)$$

ahol az utolsó előtti lépés abból következik, hogy T megőrzi a nyílt halmazokat, melyet a következőképpen láthatunk be. Mivel T és T^{-1} folytonosak, kapjuk, hogy $T^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ tetszőleges $V \in \mathcal{V}$ esetén, és $T(U) = (T^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{V}$ tetszőleges $U \in \mathcal{U}$ esetén. A (3.13) összefüggés azt is mutatja, hogy T megőrzi a Borel-halmazokat, azaz $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $T(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. □

3.45. Állítás. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ független valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}(|\xi_i|) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, akkor $\mathbb{E}(|\xi_1 \cdots \xi_n|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\xi_1 \cdots \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) \cdots \mathbb{E}(\xi_n)$.

Bizonyítás. Csak $n = 2$ esetén bizonyítunk, általában teljes indukcióval lehetne. Legyen $U_j := \operatorname{Re}(\xi_j)$, $j = 1, 2$, és $V_j := \operatorname{Im}(\xi_j)$, $j = 1, 2$. Ekkor

$$\operatorname{Re}(\xi_1 \xi_2) = U_1 U_2 - V_1 V_2, \quad \operatorname{Im}(\xi_1 \xi_2) = U_1 V_2 + U_2 V_1,$$

ahol a 3.42. Megjegyzés alapján $\mathbb{E}(|U_i|) < \infty$, $i=1,2$, és $\mathbb{E}(|V_i|) < \infty$, $i=1,2$. Mivel ξ_1 és ξ_2 függetlenek, kapjuk, hogy (U_1, V_1) és (U_2, V_2) függetlenek, ezért U_1 és U_2 ; V_1 és V_2 ; U_1 és V_2 ; illetve U_2 és V_1 is függetlenek, hiszen az $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x$ és $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto y$ koordinátafüggvények folytonosak (speciálisan mérhetőek), így használható a 2.3. Lemma. Ezért a 3.7. Tétel (xxiii) része alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\operatorname{Re}(\xi_1 \xi_2)|) &\leq \mathbb{E}(|U_1 U_2|) + \mathbb{E}(|V_1 V_2|) = \mathbb{E}(|U_1|) \mathbb{E}(|U_2|) + \mathbb{E}(|V_1|) \mathbb{E}(|V_2|) < \infty, \\ \mathbb{E}(|\operatorname{Im}(\xi_1 \xi_2)|) &\leq \mathbb{E}(|U_1 V_2|) + \mathbb{E}(|U_2 V_1|) = \mathbb{E}(|U_1|) \mathbb{E}(|V_2|) + \mathbb{E}(|U_2|) \mathbb{E}(|V_1|) < \infty,\end{aligned}$$

és így a 3.42. Megjegyzés alapján $\mathbb{E}(|\xi_1 \xi_2|) < \infty$. Továbbá, felhasználva újra a 3.7. Tétel (xxiii) részét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\operatorname{Re}(\xi_1 \xi_2)) &= \mathbb{E}(U_1 U_2) - \mathbb{E}(V_1 V_2) = \mathbb{E}(U_1) \mathbb{E}(U_2) - \mathbb{E}(V_1) \mathbb{E}(V_2), \\ \mathbb{E}(\operatorname{Im}(\xi_1 \xi_2)) &= \mathbb{E}(U_1 V_2) + \mathbb{E}(U_2 V_1) = \mathbb{E}(U_1) \mathbb{E}(V_2) + \mathbb{E}(U_2) \mathbb{E}(V_1),\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) &= \mathbb{E}(U_1) \mathbb{E}(U_2) - \mathbb{E}(V_1) \mathbb{E}(V_2) + \mathbf{i}(\mathbb{E}(U_1) \mathbb{E}(V_2) + \mathbb{E}(U_2) \mathbb{E}(V_1)) \\ &= (\mathbb{E}(U_1) + \mathbf{i} \mathbb{E}(V_1))(\mathbb{E}(U_2) + \mathbf{i} \mathbb{E}(V_2)) = \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{E}(\xi_2).\end{aligned}$$

□

4. Karakterisztikus függvény, generátorfüggvény, Laplace-transzformált

4.1. Definíció. Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **karakterisztikus függvénye** $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} F_X(dx) = \mathbb{E}(\cos(\langle t, X \rangle)) + i \mathbb{E}(\sin(\langle t, X \rangle)),$$

ahol $t \in \mathbb{R}^d$.

A 4.1. Definícióban az első egyenlőség a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) következménye, a másik egyenlőség pedig az Euler-formulából és egy komplex értékű véletlen változó várható értékének a definíciójából (3.41. Definíció) adódik.

Ha X diszkrét véletlen vektor $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ értékészlettel és $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ eloszlással, akkor

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\langle t, x_k \rangle} p_k, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

illetve, ha X abszolút folytonos eloszlású f_X sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} f_X(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

4.2. Tétel. A karakterisztikus függvény tulajdonságai:

- (i) $|\varphi_X| \leq 1$, és $\varphi_X(0) = 1$.
- (ii) φ_X egyenletesen folytonos.
- (iii) Tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, azaz φ_X Hermite szimmetrikus.
- (iv) **Bochner-tétel:** A $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye valamely véletlen vektornak, ha $\varphi(0) = 1$, folytonos és **pozitív szemidefinit**, azaz tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$ esetén a $(\varphi(t_j - t_\ell))_{j, \ell=1, \dots, n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pozitív szemidefinit, azaz tetszőleges $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \varphi(t_j - t_\ell) z_j \overline{z_\ell} \geq 0.$$

- (v) Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$ és $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t, b \rangle} \varphi_X(A^\top t)$.
- (vi) **Egyértelműségi tétel:** $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_X = \varphi_Y$.
- (vii) $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_\ell}$ akkor és csak akkor függetlenek, ha tetszőleges $t_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^{d_\ell}$ esetén

$$\varphi_{X_1, \dots, X_\ell}(t_1, \dots, t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t_j).$$

(viii) Ha $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ függetlenek, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_\ell}(t) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t).$$

(ix) Ha $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor és $\mathbb{E}(\|X\|^n) < \infty$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor φ_X n -szer folytonosan differenciálható, és tetszőleges $r_1, \dots, r_d$, $r_1 + \dots + r_d \leq n$ nemnegatív egészek esetén

$$\begin{aligned} \partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \varphi_X(t) &= i^{r_1 + \dots + r_d} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d} e^{i\langle t, X \rangle}), \quad t \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) &= \frac{\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \varphi_X(0)}{i^{r_1 + \dots + r_d}}, \end{aligned}$$

ahol $r_i = 0$ esetén $\partial_i^{r_i}$ az identitás operátort jelöli. Továbbá,

$$\varphi_X(t) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_d \leq n, \\ r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+}} \frac{i^{r_1 + \dots + r_d} t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}}{r_1! \dots r_d!} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) + R_n(t), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

ahol $R_n(t) = O(\|t\|^n)$ és $R_n(t) = o(\|t\|^n)$ ha $t \rightarrow 0$, mégpedig

$$|R_n(t)| \leq 3 \frac{\|t\|^n}{n!} \mathbb{E}(\|X\|^n), \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_n(t)}{\|t\|^n} = 0.$$

Például, $d = 1$ esetén, ha $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor φ_X n -szer folytonosan differenciálható, $\varphi_X^{(n)}(t) = i^n \mathbb{E}(X^n e^{itX})$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{i^n} \varphi_X^{(n)}(0)$, és

$$\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^n \frac{(it)^r}{r!} \mathbb{E}(X^r) + R_n(t) = \varphi_X(0) + \sum_{r=1}^n \frac{i^r \mathbb{E}(X^r)}{r!} t^r + R_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(x) Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó és $\varphi_X^{(2n)}(0)$ létezik és véges valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, azaz $\varphi_X^{(2n)}(0) \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$. (Általában abból, hogy a karakterisztikus függvény differenciálható a 0-ban még nem következik, hogy létezik a várható érték.)

(xi) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(\|X\|^n) < \infty$, és

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathbb{E}(\|X\|^n)/n!}} \in (0, \infty],$$

akkor tetszőleges $t = (t_1, \dots, t_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, $\|t\| < R$ esetén

$$\varphi_X(t) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_d=0}^{\infty} \frac{i^{r_1 + \dots + r_d} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d})}{r_1! \dots r_d!} t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}.$$

(xii) Legyen $d = 1$. Ekkor $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, akkor és csak akkor, ha X szimmetrikus, azaz $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$.

Bizonyítás. (i). A 3.43. Állítás alapján $|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})| \leq \mathbb{E}(|e^{i\langle t, X \rangle}|) = 1$, $t \in \mathbb{R}^d$.

(ii). Tetszőleges $t, h \in \mathbb{R}^d$ esetén a várható érték linearitása és a 3.43. Állítás alapján

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = |\mathbb{E}(e^{i\langle t+h, X \rangle} - e^{i\langle t, X \rangle})| = |\mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}(e^{i\langle h, X \rangle} - 1))| \leq \mathbb{E}(|e^{i\langle h, X \rangle} - 1|).$$

A majoráns konvergencia-tétel alapján $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}(|e^{i\langle h, X \rangle} - 1|) = 0$, ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} |e^{i\langle h, X(\omega) \rangle} - 1| &= 0, \quad \omega \in \Omega, \\ |e^{i\langle h, X(\omega) \rangle} - 1| &\leq 2, \quad h \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega, \quad \text{ahol } \mathbb{E}(2) < \infty. \end{aligned}$$

Így

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}^d} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = 0.$$

(iii). Tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\begin{aligned} \varphi_X(-t) &= \mathbb{E}(e^{-i\langle t, X \rangle}) = \mathbb{E}(\overline{e^{i\langle t, X \rangle}}) = \overline{\mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})} \\ &= \mathbb{E}(\cos(\langle t, X \rangle)) - i \mathbb{E}(\sin(\langle t, X \rangle)) = \overline{\varphi_X(t)}. \end{aligned}$$

(iv). Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen változó, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, tetszőleges $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$, és tetszőleges $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \varphi(t_j - t_\ell) z_j \overline{z_\ell} &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(e^{i\langle t_j - t_\ell, X \rangle}) z_j \overline{z_\ell} = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(e^{i\langle t_j, X \rangle} z_j \overline{e^{i\langle t_\ell, X \rangle} z_\ell}) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n e^{i\langle t_j, X \rangle} z_j \sum_{\ell=1}^n \overline{e^{i\langle t_\ell, X \rangle} z_\ell} \right) = \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n e^{i\langle t_j, X \rangle} z_j \right|^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

A másik irányt nem bizonyítjuk.

(v). $\varphi_{AX+b}(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, AX+b \rangle}) = e^{i\langle t, b \rangle} \mathbb{E}(e^{i\langle A^\top t, X \rangle}) = e^{i\langle t, b \rangle} \varphi_X(A^\top t)$, $t \in \mathbb{R}^d$.

(vi). Csak $d = 1$ esetén bizonyítjuk.

Tegyük fel először, hogy $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. Ekkor a karakterisztikus függvény definíciója alapján

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathbb{P}_Y(dx) = \varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tegyük most fel, hogy $\varphi_X = \varphi_Y$. Először egy motivációt adunk a bizonyítás során következő lépéseikhez. A $\varphi_X = \varphi_Y$ feltétel azt jelenti, hogy $\mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(e^{itY})$, $t \in \mathbb{R}$, azaz

$$\mathbb{E}(\cos(tX) + i \sin(tX)) = \mathbb{E}(\cos(tY) + i \sin(tY)), \quad t \in \mathbb{R},$$

és így

$$\mathbb{E}(\cos(tX)) = \mathbb{E}(\cos(tY)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\sin(tX)) = \mathbb{E}(\sin(tY)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A bizonyítandó $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ egyenlőség az 1.28. Állítás alapján azzal ekvivalens, hogy $F_X(x) = F_Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, azaz azzal, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, x)}(X)) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, x)}(Y)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Arra gondolva, hogy $(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, x - \frac{1}{n}]$ és szinuszok és koszinuszok (véges) lineáris kombinációival (azaz trigonometrikus polinomokkal) Weierstrass második approximációs tétele alapján jól közelíthetünk folytonos periódikus függvényeket, a valószínűség folytonosságát is figyelembe véve természetesnek tűnhet, hogy egy $[a, b]$ intervallum indikátorfüggvényének approximációjaként vezessük be az alábbi $f^{(\varepsilon)}$ módon jelölt, trapéz alakú függvényt, ahol $\varepsilon > 0$:

$$f^{(\varepsilon)}(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a - \varepsilon, \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - a) + 1 & \text{ha } a - \varepsilon < x \leq a, \\ 1 & \text{ha } a < x < b, \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - b) + 1 & \text{ha } b \leq x < b + \varepsilon, \\ 0 & \text{ha } x \geq b + \varepsilon. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ezen $f^{(\varepsilon)}$ függvényt Weierstrass második approximációs tétele alapján approximálhatjuk majd $f_n^{(\varepsilon)}$, $n \in \mathbb{N}$, módon jelölt trigonometrikus polinomokkal. A kiindulási feltétel miatt $\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)) = \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y))$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, és azt reméljük, hogy először $n \rightarrow \infty$, majd $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenetet véve megkapjuk, hogy $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[a, b]}(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[a, b]}(Y))$.

A következőkben ezen motivációs részt tesszük precízzé, felidézve először a trigonometrikus polinomok definícióját és Weierstrass második approximációs tételét.

Definíció (trigonometrikus polinom). Valós értékű trigonometrikus polinom alatt egy $(2\pi$ -szerint periódikus) $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S(x) := \sum_{k=0}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvényt értünk, ahol $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Tétel (Weierstrass második approximációs tétele, 1885). Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonometrikus polinom, melyre

$$\left| f(x) - S\left(\frac{2\pi}{b-a}x\right) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Következésképpen létezik olyan $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonometrikus polinom, melyre

$$\left| \tilde{f}(x) - S\left(\frac{2\pi}{b-a}x\right) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahol $\tilde{f}$ az f -nek a $(b-a)$ -szerint periódikus $\mathbb{R}$ -re való kiterjesztését jelöli.

1. Lépés. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $\varepsilon > 0$. Tekintsük a (4.1)-ben definiált $f^{(\varepsilon)}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvényt. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$, és $(\delta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, melyre $\delta_\ell \leq 1$, $\ell \in \mathbb{N}$, és $\delta_\ell \downarrow 0$, ha $\ell \rightarrow \infty$. Mivel $f^{(\varepsilon)}|_{[-n, n]}: [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f^{(\varepsilon)}|_{[-n, n]}(-n) = f^{(\varepsilon)}|_{[-n, n]}(n) = 0$, Weierstrass második approximációs tétele alapján ($a = -n$, $b = n$ és $\varepsilon = \delta_n$ választásokkal) kapjuk, hogy létezik olyan $S_n^{(\varepsilon)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonometrikus polinom, melyre

$$\left| f^{(\varepsilon)}(x) - S_n^{(\varepsilon)}\left(\frac{\pi}{n}x\right) \right| < \delta_n, \quad x \in [-n, n].$$

Az $S_n^{(\varepsilon)}$ függvény függhet δ_n -tól is, de ezt külön nem jelöljük. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $f_n^{(\varepsilon)}(x) := S_n^{(\varepsilon)}\left(\frac{\pi}{n}x\right)$, $x \in \mathbb{R}$, jelölést (ez megtehető, hiszen $S_n^{(\varepsilon)}$ a valós számok halmazán van értelmezve). Így

$$\sup_{x \in [-n, n]} |f^{(\varepsilon)}(x) - f_n^{(\varepsilon)}(x)| \leq \delta_n \quad (4.2)$$

minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$.

2. Lépés. Belátjuk, hogy

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(\varepsilon)}(x)| \leq 2 \quad (4.3)$$

minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. Az 1. Lépés alapján, felhasználva azt is, hogy $|f^{(\varepsilon)}| \leq 1$, kapjuk, hogy

$$\sup_{x \in [-n, n]} |f_n^{(\varepsilon)}(x)| \leq \sup_{x \in [-n, n]} |f_n^{(\varepsilon)}(x) - f^{(\varepsilon)}(x)| + \sup_{x \in [-n, n]} |f^{(\varepsilon)}(x)| \leq \delta_n + 1 \leq 1 + 1 = 2.$$

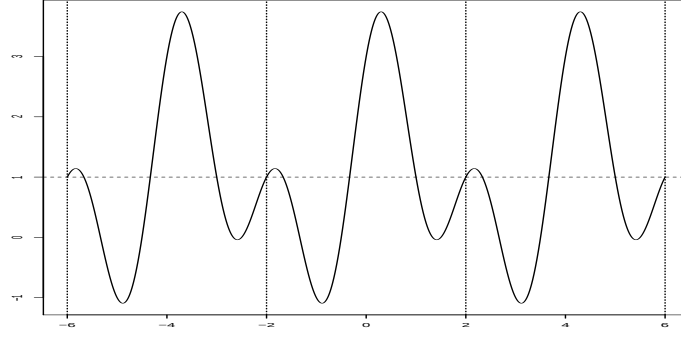
A trigonometrikus polinomok definíciója alapján

$$f_n^{(\varepsilon)}(x) = S_n^{(\varepsilon)}\left(\frac{\pi x}{n}\right) = \sum_{k=0}^N \left(a_k \cos\left(k \frac{\pi x}{n}\right) + b_k \sin\left(k \frac{\pi x}{n}\right) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

alkalmas $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ konstansokkal, melyek függhetnek a -tól, b -tól, ε -tól, n -tól, és δ_n -tól, de ezt a függést nem jelöljük. Látható, hogy $f_n^{(\varepsilon)}$ $2n$ -szerint periódikus függvény, így a fentiek alapján (4.3) teljesül. Ha például $N = n = 2$ és $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $b_0 = b_1 = b_2 = 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^N \left(a_k \cos\left(k \frac{\pi x}{n}\right) + b_k \sin\left(k \frac{\pi x}{n}\right) \right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x) + \sin(\pi x), \quad x \in \mathbb{R},$$

és ezen függvény periódusa 4, lásd az 1. ábrát. Az 1. ábra alapján látható, hogy ez a függvény korlátos, de 2 nem korlátja. Ez nem mond ellent (4.3)-nak, azaz annak, hogy $f_n^{(\varepsilon)}$ korlátos 2-vel, ugyanis az $f_n^{(\varepsilon)}$ képletében szereplő $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ konstansok nem



1. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$ függvény, melynek periódusa 4.

tetszőlegesek (azok függhetnek a -tól, b -től, ε -tól, n -től, és δ_n -től). A 1. ábrán mindössze egy $\sum_{k=0}^N (a_k \cos(k\frac{\pi x}{n}) + b_k \sin(k\frac{\pi x}{n}))$, $x \in \mathbb{R}$, trigonometikus polinomot ábrázolunk adott $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ konstansok esetén.

3. Lépés. Belátjuk, hogy

$$\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)) = \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y))$$

minden $\varepsilon > 0$ és minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^N \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{n}X\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{n}X\right)\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^N \left(a_k \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}X\right)\right) + b_k \mathbb{E}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}X\right)\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^N \left(a_k \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}Y\right)\right) + b_k \mathbb{E}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}Y\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)) \end{aligned}$$

minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$, ahol a harmadik egyenlőségnél használtuk, hogy $\varphi_X = \varphi_Y$.

4. Lépés. Megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y)), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Az $f^{(\varepsilon)}$ függvény definíciója és n választása miatt $f^{(\varepsilon)}(x) = 0$, ha $|x| > n$, így

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) - \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))| &= |\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X) \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}) - \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y) \mathbb{1}_{\{|Y| \leq n\}})| \\ &\leq |\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X) \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}) - \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X) \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}})| \\ &\quad + |\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X) \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}) - \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y) \mathbb{1}_{\{|Y| \leq n\}})| \\ &\quad + |\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y) \mathbb{1}_{\{|Y| \leq n\}}) - \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y) \mathbb{1}_{\{|Y| \leq n\}})| \\ &=: \text{I} + \text{II} + \text{III}. \end{aligned}$$

Itt (4.2) alapján

$$I = |\mathbb{E}((f^{(\varepsilon)}(X) - f_n^{(\varepsilon)}(X))\mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}})| \leq \mathbb{E}(|f^{(\varepsilon)}(X) - f_n^{(\varepsilon)}(X)|\mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}) \leq \delta_n \mathbb{P}(|X| \leq n) \leq \delta_n,$$

és teljesen hasonlóan $III \leq \delta_n$. Továbbá, a 3. Lépés és (4.3) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} II &\leq |\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}) - \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X))| + |\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)) - \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y))| \\ &\quad + |\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)) - \mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y| \leq n\}})| \\ &= |\mathbb{E}(-f_n^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X| > n\}})| + |\mathbb{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y| > n\}})| \\ &\leq 2\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|X| > n\}}) + 2\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|Y| > n\}}) = 2\mathbb{P}(|X| > n) + 2\mathbb{P}(|Y| > n). \end{aligned}$$

Összefoglalva,

$$|\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) - \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))| \leq 2\delta_n + 2\mathbb{P}(|X| > n) + 2\mathbb{P}(|Y| > n) \quad (4.4)$$

minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. Mivel $\delta_n \downarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, és egy eloszlásfüggvénynek a $+\infty$ -beli határértéke 1, kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\delta_n + 2\mathbb{P}(|X| > n) + 2\mathbb{P}(|Y| > n)) = 0, \quad (4.5)$$

és így $\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))$, $\varepsilon > 0$. Megjegyezzük, hogy a (4.5) összefüggés mutat rá, hogy az 1. Lépésben miért tekintettünk egy olyan $[-n, n]$ intervallumot, melyre $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$, ahelyett, hogy az $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ intervallummal dolgoztunk volna. Ha az $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ intervallummal dolgoztunk volna, akkor (4.4) helyett azt kapnánk, hogy

$$|\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) - \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))| \leq 2\delta_n + 2\mathbb{P}(X \notin [a - \varepsilon, b + \varepsilon]) + 2\mathbb{P}(Y \notin [a - \varepsilon, b + \varepsilon]),$$

melynek a jobb oldala nem tart feltétlenül 0-hoz, amint $n \rightarrow \infty$.

5. Lépés. Belátjuk, hogy $F_X(b) = F_Y(b)$, $b \in \mathbb{R}$. A dominált konvergencia tétel alapján

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[a, b]}(X)) \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[a, b]}(Y)),$$

ugyanis $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f^{(\varepsilon)}(x) = \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ és $|f^{(\varepsilon)}(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Mivel a 4. Lépés alapján $\mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))$, $\varepsilon > 0$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[a, b]}(X)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}(f^{(\varepsilon)}(Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[a, b]}(Y)) = \mathbb{P}(Y \in [a, b])$$

minden $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, b - \frac{1}{n}]$ és $[-n, b - \frac{1}{n}] \subset [-m, b - \frac{1}{m}]$, ha $m \geq n$, a valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_X(b) &= \mathbb{P}(X \in (-\infty, b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(X \in \left[-n, b - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(Y \in \left[-n, b - \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}(Y \in (-\infty, b)) = F_Y(b), \quad b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(vii). A $d_1 = \dots = d_\ell = d$ esetben írjuk le a bizonyítást, az általános eset hasonlóan kezelhető. Ha $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ függetlenek, akkor tetszőleges $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén a 2.3. Lemma bizonyításához hasonlóan $e^{i\langle t_1, X_1 \rangle}, \dots, e^{i\langle t_\ell, X_\ell \rangle}$ függetlenek, és így a 3.45. Állítás alapján

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1, \dots, X_\ell}(t_1, \dots, t_\ell) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ i \langle (t_1^\top, \dots, t_\ell^\top), (X_1^\top, \dots, X_\ell^\top) \rangle \right\} \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left\{ i \sum_{j=1}^{\ell} \langle t_j, X_j \rangle \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^{\ell} e^{i\langle t_j, X_j \rangle} \right) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{E}(e^{i\langle t_j, X_j \rangle}) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t_j). \end{aligned}$$

Ha $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok, és tetszőleges $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{X_1, \dots, X_\ell}(t_1, \dots, t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t_j),$$

akkor legyenek $Y_1, \dots, Y_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ olyan független véletlen vektorok, hogy $\mathbb{P}_{Y_j} = \mathbb{P}_{X_j}$, $j = 1, \dots, \ell$. Ilyen $Y_1, \dots, Y_\ell$ véletlen vektorok az alapul vett, eredeti valószínűségi mező egy alkalmas kiterjesztésén léteznek. Itt és a továbbiakban is $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy ilyen alkalmas kiterjesztett valószínűségi mezőt jelöl. Így (vi) szerint $\varphi_{Y_j} = \varphi_{X_j}$, $j = 1, \dots, \ell$, ezért az előzőek alapján tetszőleges $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{Y_1, \dots, Y_\ell}(t_1, \dots, t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{Y_j}(t_j) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t_j) = \varphi_{X_1, \dots, X_\ell}(t_1, \dots, t_\ell).$$

Felhasználva újra (vi)-ot, kapjuk, hogy $\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_\ell} = \mathbb{P}_{Y_1, \dots, Y_\ell}$. Ezért tetszőleges $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$F_{X_1, \dots, X_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = F_{Y_1, \dots, Y_\ell}(x_1, \dots, x_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} F_{Y_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{\ell} F_{X_j}(x_j),$$

ahol (kétszer is) felhasználtuk, hogy egy véletlen változó eloszlása és eloszlásfüggvénye kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást (lásd, 1.28. Állítás). Ebből következik, hogy $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ függetlenek, azaz a $\sigma(X_j)$, $j = 1, \dots, \ell$, σ -algebrák függetlenek (lásd a 2.1. Definíció utáni megjegyzést).

(viii). Tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén a 2.3. Lemma bizonyításához hasonlóan $e^{i\langle t, X_1 \rangle}, \dots, e^{i\langle t, X_\ell \rangle}$ függetlenek, és így a 3.45. Állítás alapján

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_\ell}(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X_1 + \dots + X_\ell \rangle}) = \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^{\ell} e^{i\langle t, X_j \rangle} \right) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{E}(e^{i\langle t, X_j \rangle}) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t).$$

(ix). Ha $d = n = 1$, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a majoráns konvergencia-tétellel

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\mathbb{E}(e^{i(t+h)X}) - \mathbb{E}(e^{itX}) \right) = \frac{1}{h} \left(\mathbb{E}(e^{itX} e^{ihX} - e^{itX}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{itX} \left(\frac{e^{ihX} - 1}{h} \right) \right] \rightarrow \mathbb{E}(iX e^{itX}), \quad \text{ha } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Valóban, tetszőleges $u \in \mathbb{R}$ esetén $|e^{iu} - 1| = \left| \int_0^u i e^{iz} dz \right| \leq \int_0^{|u|} 1 dz = |u|$, melyet másként úgy is indokolhatunk, hogy a cosinus függvényre vonatkozó Taylor-féle maradék tétel szerint tetszőleges $u \in \mathbb{R}$ esetén

$$|e^{iu} - 1|^2 = (\cos(u) - 1)^2 + (\sin(u))^2 = 2 - 2\cos(u) = 2\left(1 - \left(1 - \frac{u^2}{2}\cos(\theta)\right)\right) = u^2\cos(\theta) \leq u^2,$$

ahol θ a 0 és u közötti alkalmas valós szám. Így tetszőleges $\omega \in \Omega$ és $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\left| e^{itX(\omega)} \left(\frac{e^{ihX(\omega)} - 1}{h} \right) \right| \leq |X(\omega)|, \quad \text{ahol} \quad \mathbb{E}(|X|) < \infty,$$

és

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{itX(\omega)} \left(\frac{e^{ihX(\omega)} - 1}{h} \right) = iX(\omega)e^{itX(\omega)},$$

ahol felhasználtuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ihx} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(hx) - 1 + i \sin(hx)}{h} = x \cos'(0) + ix \sin'(0) = ix.$$

Ezért $\varphi'_X(t) = \mathbb{E}(iX e^{itX})$, $t \in \mathbb{R}$, amiből következik, hogy $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'_X(0)$. A $\varphi'_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi'_X(t) = i\mathbb{E}(X e^{itX})$, $t \in \mathbb{R}$, függvény folytonos is, mert ha $t_0 \in \mathbb{R}$ és $(t_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ olyan valós sorozat, hogy $t_\ell \rightarrow t_0$, ha $\ell \rightarrow \infty$, akkor a dominált konvergencia tétel alapján

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \varphi'_X(t_\ell) = i\mathbb{E}(X \lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{it_\ell X}) = i\mathbb{E}(X e^{it_0 X}) = \varphi'_X(t_0),$$

hiszen $|X e^{it_\ell X}| \leq |X|$, $\ell \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Továbbá,

$$\varphi_X(t) = 1 + it \mathbb{E}(X) + R_1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol

$$R_1(t) := \varphi_X(t) - 1 - it \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^{itX} - 1 - itX).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} |R_1(t)| &\leq \mathbb{E}(|e^{itX} - 1 - itX|) \leq \mathbb{E}(|e^{itX} - 1|) + |t| \mathbb{E}(|X|) \\ &\leq |t| \mathbb{E}(|X|) + |t| \mathbb{E}(|X|) = 2|t| \mathbb{E}(|X|) < 3|t| \mathbb{E}(|X|), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

és a dominált konvergencia tétel alapján

$$\frac{|R_1(t)|}{|t|} \leq \mathbb{E} \left(\left| \frac{e^{itX} - 1 - itX}{t} \right| \right) \rightarrow 0 \quad \text{ha } t \rightarrow 0,$$

ugyanis tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{itX(\omega)} - 1 - itX(\omega)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{itX(\omega)} - 1}{t} - iX(\omega) = iX(\omega) - iX(\omega) = 0,$$

és

$$\left| \frac{e^{itX} - 1 - itX}{t} \right| \leq 2|X|, \quad t \neq 0, t \in \mathbb{R},$$

ahol $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

A továbbiakban legyenek $d, n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(iy)^r}{r!} + \frac{(iy)^n}{n!} (\cos(\vartheta_1(y)y) + i \sin(\vartheta_2(y)y)),$$

ahol $\vartheta_1(y), \vartheta_2(y) \in (0,1)$. Valóban, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos(y) + i \sin(y) \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\cos^{(r)}(0)}{r!} y^r + \frac{\cos^{(n)}(\vartheta_1(y)y)}{n!} y^n + i \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\sin^{(r)}(0)}{r!} y^r + i \frac{\sin^{(n)}(\vartheta_2(y)y)}{n!} y^n \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\cos(x) + i \sin(x))^{(r)}|_{x=0}}{r!} y^r + \frac{y^n}{n!} (\cos^{(n)}(\vartheta_1(y)y) + i \sin^{(n)}(\vartheta_2(y)y)) \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (e^{ix})^{(r)}|_{x=0} \cdot \frac{y^r}{r!} + \frac{y^n}{n!} \cdot \begin{cases} (i^n \cos(\vartheta_1(y)y) + i^{n+1} \sin(\vartheta_2(y)y)), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ (i^{n+1} \sin(\vartheta_1(y)y) + i^n \cos(\vartheta_2(y)y)), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases} \end{aligned}$$

ahol $\vartheta_1(y), \vartheta_2(y) \in (0,1)$. Így tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$e^{i\langle t, X \rangle} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(i\langle t, X \rangle)^r}{r!} + \frac{(i\langle t, X \rangle)^n}{n!} (\cos(\tilde{\vartheta}_{1,t}\langle t, X \rangle) + i \sin(\tilde{\vartheta}_{2,t}\langle t, X \rangle)),$$

ahol $\tilde{\vartheta}_{j,t} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\vartheta}_{j,t}(\omega) := \vartheta_j(\langle t, X(\omega) \rangle) \in (0,1)$, ha $j = 1, 2$. Megjegyezzük, hogy az nem biztos, hogy $\tilde{\vartheta}_{1,t}$, $j = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}^d$, valószínűségi változók, azonban

$$\frac{(i\langle t, X \rangle)^n}{n!} (\cos(\tilde{\vartheta}_{1,t}\langle t, X \rangle) + i \sin(\tilde{\vartheta}_{2,t}\langle t, X \rangle)) = e^{i\langle t, X \rangle} - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(i\langle t, X \rangle)^r}{r!}$$

valószínűségi változó tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén, mely elegendő számunkra az alábbiakban szereplő várható érték vételéhez. Ezért tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(\frac{(i\langle t, X \rangle)^r}{r!} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{(i\langle t, X \rangle)^n}{n!} (\cos(\tilde{\vartheta}_{1,t}\langle t, X \rangle) + i \sin(\tilde{\vartheta}_{2,t}\langle t, X \rangle)) \right),$$

és így

$$\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^n \mathbb{E} \left(\frac{(i\langle t, X \rangle)^r}{r!} \right) + R_n(t), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

ahol

$$R_n(t) := \mathbb{E} \left(\frac{(i\langle t, X \rangle)^n}{n!} (\cos(\tilde{\vartheta}_{1,t}\langle t, X \rangle) + i \sin(\tilde{\vartheta}_{2,t}\langle t, X \rangle) - 1) \right).$$

Nyilván $|R_n(t)| \leq 3\|t\|^n \mathbb{E}(\|X\|^n)/n!$, és felhasználva, hogy $\tilde{\vartheta}_{j,t} \in (0,1)$, $j = 1,2$ kapjuk, hogy

$$\frac{|R_n(t)|}{\|t\|^n} \leq \mathbb{E} \left(\frac{\|X\|^n}{n!} \left| \cos(\tilde{\vartheta}_{1,t}\langle t, X \rangle) + i \sin(\tilde{\vartheta}_{2,t}\langle t, X \rangle) - 1 \right| \right) \rightarrow 0, \quad \text{ha } t \rightarrow 0,$$

a majoráns konvergencia-tétel alapján (használva, hogy $\mathbb{E}(\|X\|^n) < \infty$). Végezetül, a polinomiális tétel alapján

$$\mathbb{E} \left(\frac{(i\langle t, X \rangle)^r}{r!} \right) = i^r \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_d = r, \\ r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+}} \frac{t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}}{r_1! \dots r_d!} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}),$$

melyből következik a bizonyítandó állítás.

(x). Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 1$, akkor

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_X'(2h) - \varphi_X'(0)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_X'(0) - \varphi_X'(-2h)}{2h}$$

alapján

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_X'(2h) - \varphi_X'(0)}{2h} + \frac{\varphi_X'(0) - \varphi_X'(-2h)}{2h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_X'(2h) - \varphi_X'(-2h)}{4h},$$

így a L'Hôpital-szabállyal (külön a valós és külön a képzetes részre)

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_X(2h) - 2\varphi_X(0) + \varphi_X(-2h)}{4h^2}.$$

Ezért

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(e^{2ihX}) - 2 + \mathbb{E}(e^{-2ihX})}{4h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\frac{e^{ihX} - e^{-ihX}}{2h} \right)^2 \right] = - \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sin(hX)}{h} \right)^2 \right].$$

A Fatou-lemmával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(hX)}{h} \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\liminf_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(hX)}{h} \right)^2 \right) \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\sin(hX)}{h} \right)^2 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\sin(hX)}{h} \right)^2 \right) \\ &= -\varphi_X''(0) < \infty, \end{aligned}$$

ahol az első egyenlőség abból következik, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ miatt $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(hX(\omega))}{h} \right)^2 = X^2(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $1, \dots, n$ -re, és $\varphi_X^{(2n+2)}(0)$ létezik és véges, azaz $\varphi_X^{(2n+2)}(0) \in \mathbb{R}$. Ekkor az indukciós feltevés miatt $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$. Ha $\mathbb{E}(X^{2n}) = 0$, akkor $X = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., így $\mathbb{E}(X^{2n+2}) = 0$. Legyen a továbbiakban $\mathbb{E}(X^{2n}) > 0$. Legyen $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$F(y) := \frac{\mathbb{E}(X^{2n} \mathbb{1}_{\{X < y\}})}{\mathbb{E}(X^{2n})}.$$

Ekkor $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy eloszlásfüggvény (hiszen $\mathbb{E}(X^{2n}) \in (0, \infty)$). Legyen $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F_Y = F$. Nyilván tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}_Y((-\infty, y)) = F_Y(y) = \frac{1}{\mathbb{E}(X^{2n})} \int_{-\infty}^y x^{2n} \mathbb{P}_X(dx),$$

ezért a Carathéodory kiterjesztési tétellel (1.8. Tétel) tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathbb{P}_Y(B) = \frac{1}{\mathbb{E}(X^{2n})} \int_B x^{2n} \mathbb{P}_X(dx),$$

tehát $\mathbb{P}_Y \ll \mathbb{P}_X$ és $\frac{d\mathbb{P}_Y}{d\mathbb{P}_X}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(X^{2n})} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$. Az indukciós feltevés, $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$, és (ix) alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_X^{(2n)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^{2n} e^{itX}]$, ezért a sűrűségtétellel (3.15. Tétel)

$$\frac{(-1)^n \varphi_X^{(2n)}(t)}{\mathbb{E}(X^{2n})} = \frac{\mathbb{E}(X^{2n} e^{itX})}{\mathbb{E}(X^{2n})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{itx} \mathbb{P}_X(dx)}{\mathbb{E}(X^{2n})} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathbb{P}_Y(dx) = \mathbb{E}(e^{itY}) = \varphi_Y(t)$$

tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért, felhasználva, hogy $\varphi_X^{(2n+2)}(0) \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy $\varphi_Y^{(2)}(0) \in \mathbb{R}$, és alkalmazva az állítást $n=1$ esetén az Y valószínűségi változóra adódik, hogy $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Mivel

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathbb{P}_Y(dx) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 x^{2n} \mathbb{P}_X(dx)}{\mathbb{E}(X^{2n})} = \frac{\mathbb{E}(X^{2n+2})}{\mathbb{E}(X^{2n})},$$

és $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$, adódik, hogy $\mathbb{E}(X^{2n+2}) < \infty$.

(xi). Csak $d=1$ esetén bizonyítjuk. A (ix) rész alapján tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^n \frac{i^r \mathbb{E}(X^r)}{r!} t^r + R_n(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol

$$|R_n(t)| \leq 3 \frac{|t|^n}{n!} \mathbb{E}(|X|^n).$$

Mivel $R \in (0, \infty]$, kapjuk, hogy $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathbb{E}(|X|^n)/n!} \in [0, \infty)$, és így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $n \geq n_0$ esetén

$$\left(\frac{\mathbb{E}(|X|^n)}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R} + \varepsilon,$$

azaz $\mathbb{E}(|X|^n) < n! \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right)^n$, ha $n \geq n_0$. Így

$$|R_n(t)| \leq 3 \left(|t| \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) \right)^n \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

amennyiben $|t| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right)^{-1}$. Mivel $\left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right)^{-1} < R$ és $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right)^{-1} = R$, kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) = 0$ bármely $|t| < R$, $t \in \mathbb{R}$, esetén. Ezért $\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r \mathbb{E}(X^r)}{r!} t^r$, $|t| < R$. Megjegyezzük továbbá, hogy a $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r \mathbb{E}(X^r)}{r!} t^r$ hatványsor konvergenciasugara

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathbb{E}(X^n)/n!}} \geq R.$$

(xii). Tegyük fel először, hogy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Ekkor (iii) alapján

$$\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Így (vi) alapján $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$.

Tegyük most fel, hogy $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$. Ekkor minden $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, mérhető és páratlan függvény esetén $\mathbb{E}(g(X))=0$, ugyanis ekkor $\mathbb{E}(g(X)) \in \mathbb{R}$ és $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(-X)) = -\mathbb{E}(g(X))$. Speciálisan, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \sin(tx)$, $x \in \mathbb{R}$, választással, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\sin(tX)) = 0$. Így

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i \mathbb{E}(\sin(tX)) = \mathbb{E}(\cos(tX)) \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

4.3. Tétel. (Inverziós formula eloszlás- és sűrűségfüggvényre) Legyen $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy véletlen vektor, F_X az eloszlásfüggvénye, φ_X pedig a karakterisztikus függvénye.

(i) Ha $d=1$ és $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{\mathbb{P}(X=a) + \mathbb{P}(X=b)}{2} + \mathbb{P}(a < X < b) = \lim_{c \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

Speciálisan, ha F_X folytonos a -ban és b -ben, akkor

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{c \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

Továbbá, tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ és $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^d$, esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^d \left(\frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{X_j \in \{a_j, b_j\}\}} + \mathbb{1}_{\{a_j < X_j < b_j\}} \right) \right) \\ &= \lim_{c \uparrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-c}^c \cdots \int_{-c}^c \left(\prod_{j=1}^d \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} \right) \varphi_X(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d. \end{aligned}$$

(ii) Ha $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}^d)$, azaz $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_X(t)| dt < \infty$, akkor X eloszlása abszolút folytonos, és egy sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \varphi_X(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ekkor f_X korlátos és folytonos.

A 4.3. Tételt nem bizonyítjuk, mindössze egy heurisztikus gondolatmenetet mutatunk az alábbi megjegyzés (iii) részében a $d=1$ esetben a 4.3. Tétel (i) részére felhasználva a 4.3. Tétel (ii) részét.

4.4. Megjegyzés. (i). Fontos megjegyezni, hogy a 4.3. Tétel (i) részében szereplő inverziós formulában a $\lim_{c \uparrow \infty} \int_{-c}^c \cdots \int_{-c}^c$ határérték helyett nem írhatjuk egyszerűen a $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbb{R}^d}$ integrált, hiszen általában az Lebesgue értelemben nem definiált. Továbbá, mivel

$$\left| \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \right| = \left| \frac{e^{-it(y-x)} - 1}{t} \right| \leq y - x, \quad t \neq 0, t \in \mathbb{R}, \quad x < y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

kapjuk, hogy tetszőleges $d \in \mathbb{N}$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^d$ és $c > 0$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-c}^c \cdots \int_{-c}^c \left(\prod_{j=1}^d \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} \right) \varphi_X(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d \right| \\ & \leq \int_{-c}^c \cdots \int_{-c}^c \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) dt_1 \dots dt_d = (2c)^d \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) < \infty. \end{aligned}$$

(ii). A 4.3. Tétel (i) részében, a tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén érvényes formula $d = 1$ esetén valóban visszaadja a $d = 1$ esetben megadott formulát, ugyanis, ha $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{X \in \{a, b\}\}} + \mathbb{1}_{\{a < X < b\}} \right) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X \in \{a, b\}) + \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(X = b)}{2} + \mathbb{P}(a < X < b). \end{aligned}$$

(iii). Tegyük fel, hogy $d = 1$ és $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$. Ekkor tetszőleges $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, esetén a 4.3. Tétel (ii) része alapján

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \int_a^b f_X(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t) \left(\int_a^b e^{-itx} dx \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t) \left[\frac{e^{-itx}}{-it} \right]_a^b dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt, \end{aligned}$$

ahol a harmadik egyenlőség esetén a két integrál felcserélése csak formális, a negyedik egyenlőség esetén pedig a belső integrál kiszámítása formailag csak $t \neq 0$ esetén helyes.

(iv). Az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \widehat{\varphi_X}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle t, x \rangle} \varphi_X(t) dt$ függvényt a φ_X függvény Fourier-transzformáltjának hívják. $\square$

Az alábbiakban ún. rácsos eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvénye és eloszlása közötti kapcsolattal foglalkozunk.

4.5. Tétel. Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy rácsos eloszlású valószínűségi változó, azaz létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ és $b > 0$, hogy $\mathbb{P}(X \in \{a + bn : n \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Jelölje φ_X az X karakterisztikus függvényét. Ekkor

$$\mathbb{P}(X = a + bn) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-it(a+bn)} \varphi_X(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Speciálisan, ha X egész értékű, akkor

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} \varphi_X(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bizonyítás. A $p_k := \mathbb{P}(X = a + bk)$, $k \in \mathbb{Z}$, jelöléssel, kapjuk, hogy

$$\varphi_X(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{it(a+bk)} p_k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beszorozva ezen egyenlet mindkét oldalát $e^{-it(a+bn)}$ -nel, majd integrálva $-\pi/b$ -től π/b -ig, kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-it(a+bn)} \varphi_X(t) dt = \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-it(a+bn)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{it(a+bk)} p_k dt = \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-itb(n-k)} p_k dt.$$

Mivel $|e^{-itb(n-k)} p_k| \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in [-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}]$, és $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1 < \infty$, Weierstrass tétele alapján a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-itb(n-k)} p_k$ függvénysor egyenletesen konvergens $[-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}]$ -n, ezért a $[-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}] \ni t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-itb(n-k)} p_k$ függvény valós és képzetes részei Riemann-integrálhatóak és így

$$\int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-it(a+bn)} \varphi_X(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-itb(n-k)} p_k dt.$$

Ha $k = n$, akkor

$$\int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-itb(n-k)} p_k dt = \frac{2\pi}{b} p_n,$$

ha $k \neq n$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-itb(n-k)} p_k dt &= \frac{p_k}{-ib(n-k)} \left(e^{-i\frac{\pi}{b}b(n-k)} - e^{-i\frac{-\pi}{b}b(n-k)} \right) \\ &= \frac{p_k}{-ib(n-k)} (-2i) \sin(\pi(n-k)) = 0. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{2\pi}{b} p_n = \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-it(a+bn)} \varphi_X(t) dt,$$

amiből következik az állítás.

Az $a = 0$ és $b = 1$ választásokkal a speciális eset is adódik. $\square$

4.6. Tétel. Legyen $\varphi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ egy $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.

- (i) Ha $|\varphi_X(t_0)| = 1$ valamely $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$, esetén, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy X az $\{a + \frac{2\pi}{t_0}n, n \in \mathbb{Z}\}$ halmazba koncentrálódik, azaz $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = a + \frac{2\pi}{t_0}n) = 1$.
- (ii) Ha $|\varphi_X(t)| = |\varphi_X(\alpha t)| = 1$ két különböző t és αt helyen, ahol $t \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor X degenerált, azaz létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$.

(iii) Ha $|\varphi_X(t)| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, akkor X degenerált.

Bizonyítás. (i). A feltételek alapján létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $\varphi_X(t_0) = e^{iat_0}$. Ekkor

$$e^{iat_0} = \varphi_X(t_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{it_0x} F_X(dx),$$

amiből

$$1 = \int_{\mathbb{R}} e^{it_0(x-a)} F_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} (\cos(t_0(x-a)) + i \sin(t_0(x-a))) F_X(dx).$$

Ezért

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \cos(t_0(x-a)) F_X(dx) \quad \text{és} \quad 0 = \int_{\mathbb{R}} \sin(t_0(x-a)) F_X(dx),$$

és így

$$\mathbb{E}(1 - \cos(t_0(X-a))) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(t_0(x-a))) F_X(dx) = 0.$$

Mivel $1 - \cos(t_0(x-a)) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\cos(t_0(X-a)) = 1) = 1$, ezért $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $k(\omega) \in \mathbb{Z}$, hogy $t_0(X(\omega) - a) = 2k(\omega)\pi$, azaz $X(\omega) = a + k(\omega)\frac{2\pi}{t_0}$.

(ii). Mivel $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $t \neq \alpha t$, kapjuk, hogy $t \neq 0$, így az (i) rész alapján létezik $a, b \in \mathbb{R}$, hogy

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = a + \frac{2\pi}{t}n) = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = b + \frac{2\pi}{\alpha t}m) = 1.$$

Ha X nemdegenerált lenne, akkor létezne legalább két különböző pont, aminek $\mathbb{P}_X$ -általi súlya pozitív, azaz létezne olyan $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, hogy

$$a + \frac{2\pi}{t}n_1 = b + \frac{2\pi}{\alpha t}m_1 \neq a + \frac{2\pi}{t}n_2 = b + \frac{2\pi}{\alpha t}m_2.$$

Ezért

$$\frac{2\pi}{t}(n_1 - n_2) = \frac{2\pi}{\alpha t}(m_1 - m_2) \neq 0,$$

amiből $\alpha = \frac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q}$, azaz ellentmondásra jutottunk.

(iii). A (ii) rész alapján következik. □

4.7. Tétel. (Pólya-tétel) Ha $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy olyan függvény, hogy folytonos, páros, $\varphi(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, és $\varphi|_{[0, \infty)}$ konvex, akkor φ karakterisztikus függvénye valamely $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak.

Megjegyezzük, hogy a Pólya-tétel feltételei mellett $\varphi|_{[0, \infty)}$ monoton csökkenő. Valóban, indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $0 \leq t_1 < t_2$, hogy $0 \leq \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ és $\varphi(t_2) > 0$, létezik olyan $t_3 > t_2$, hogy $\varphi(t_3) < \varphi(t_2)$. Mivel $t_1 < t_2 < t_3$, létezik olyan $\alpha \in (0, 1)$, hogy $t_2 = \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_3$, így felhasználva, hogy $\varphi|_{[0, \infty)}$ konvex, kapjuk, hogy

$$\varphi(t_2) = \varphi(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_3) \leq \alpha \varphi(t_1) + (1 - \alpha)\varphi(t_3) < \alpha \varphi(t_2) + (1 - \alpha)\varphi(t_2) = \varphi(t_2),$$

mely ellentmondás. A Pólya-tétel segítségével könnyű példát mutatni olyan karakterisztikus függvényekre, melyek megegyeznek egy véges intervallumon, anélkül, hogy a hozzájuk egyértelműen tartozó eloszlásfüggvények azonosak lennének.

Az alábbiakban az ún. momentum problémával foglalkozunk, azaz, hogy egy valószínűség-eloszlást egyértelműen meghatároznak-e a momentumai. Pontosabban, legyenek $F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ és $G : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ eloszlásfüggvények, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} x^n F(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^n G(dx), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Az a kérdés, hogy ekkor teljesül-e, hogy $F = G$? Véletlen változók nyelvére is átfogalmazhatjuk a problémát: legyenek ξ és η olyan valós értékű véletlen változók, hogy

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \mathbb{E}(\eta^n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Az a kérdés, hogy ekkor teljesül-e, hogy $F_\xi = F_\eta$? Általában véve nem teljesül, ahogy az alábbi példa mutatja.

4.8. Példa. Legyen ζ egy standard normális eloszlású véletlen változó, és $\xi := e^\zeta$ (melynek eloszlása lognormális eloszlás). Ismert, hogy ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}(\log(x))^2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$g(x) := \begin{cases} f_\xi(x)(1 + \sin(2\pi \log(x))) & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Belátjuk, hogy

$$\int_0^\infty x^n f_\xi(x) \sin(2\pi \log(x)) dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.6)$$

Ebből $n=0$ választással, felhasználva azt is, hogy g nemnegatív és Borel-mérhető, kapjuk, hogy g sűrűségfüggvénye valamely nemnegatív η véletlen változónak, és

$$\mathbb{E}(\eta^n) = \int_0^\infty x^n f_\xi(x)(1 + \sin(2\pi \log(x))) dx = \int_0^\infty x^n f_\xi(x) dx = \mathbb{E}(\xi^n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.7)$$

Végrehajtva a $\log(x) = s + n$ helyettesítést a (4.6)-beli baloldali integrálban, kapjuk, hogy tet-

szőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^n f_\xi(x) \sin(2\pi \log(x)) dx &= \int_{-\infty}^\infty (e^{s+n})^n f_\xi(e^{s+n}) \sin(2\pi(s+n)) e^{s+n} ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(n+1)(s+n)} \frac{1}{e^{s+n}} e^{-\frac{1}{2}(\log(e^{s+n}))^2} \sin(2\pi s) ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{n(s+n)} e^{-\frac{1}{2}(s+n)^2} \sin(2\pi s) ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{n^2}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} \sin(2\pi s) ds \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

hiszen $\sin$ páratlan függvény és

$$\int_{-\infty}^\infty |e^{-\frac{s^2}{2}} \sin(2\pi s)| ds \leq \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds < \infty.$$

Összefoglalva, ξ és η olyan nemnegatív véletlen változók, hogy az összes momentumok megegyezik (és véges), azonban $F_\xi \neq F_\eta$, hiszen ξ és η sűrűségfüggvényeik, f_ξ és g , különbözőek $((0, \infty)$ -en). $\square$

A következőkben olyan eredményeket tárgyalunk, melyek elegendő feltételeket adnak arra vonatkozóan, hogy egy véletlen változó eloszlását a momentumai egyértelműen meghatározzák.

4.9. Tétel. *Legyen μ egy valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mérhető téren, hogy*

$$\alpha_k := \int_{-\infty}^\infty x^k \mu(dx) \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Ha a $\sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha_k}{k!} r^k$ hatványsor konvergencia sugara pozitív, akkor μ az egyetlen olyan valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mérhető téren, melynek momentumai α_k , $k \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Jelölje

$$\beta_k := \int_{-\infty}^\infty |x|^k \mu(dx), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

a μ abszolút momentumait. Mivel $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, adódik, hogy $\beta_k \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Először belátjuk, hogy létezik olyan $r > 0$, hogy

$$\frac{\beta_k r^k}{k!} \rightarrow 0, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

A feltevés miatt létezik olyan $s \in (0, 1)$, hogy $\frac{\alpha_k s^k}{k!} \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$. Legyen $r \in (0, s)$. Ekkor $2kr^{2k-1} < s^{2k}$ elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ -re, hiszen $\frac{1}{k} \left(\frac{s}{r}\right)^{2k} \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$, így elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ -re teljesül, hogy $\frac{2}{r} < \frac{1}{k} \left(\frac{s}{r}\right)^{2k}$. Vegyük továbbá észre, hogy $|x|^{2k-1} \leq 1 + |x|^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, hiszen tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $|x| \leq 1$, akkor $|x|^{2k-1} \leq 1 \leq 1 + |x|^{2k}$; ha pedig $|x| > 1$, akkor

$$\frac{|x|^{2k-1}}{1 + |x|^{2k}} \leq \frac{|x|^{2k-1}}{|x|^{2k}} = \frac{1}{|x|} < 1,$$

melyből adódik, hogy $|x|^{2k-1} \leq 1 + |x|^{2k}$. Mindezek miatt

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{2k-1} r^{2k-1}}{(2k-1)!} &= \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2k-1} \mu(dx) \leq \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^{2k}) \mu(dx) \\ &= \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} \beta_{2k} \\ &\leq \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{s^{2k}}{2k} \frac{1}{(2k-1)!} \beta_{2k} \\ &= \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\beta_{2k} s^{2k}}{(2k)!} = \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{a_{2k} s^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel $r \in (0,1)$, kapjuk, hogy $\frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, illetve s megválasztása miatt $\frac{a_{2k} s^{2k}}{(2k)!} \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$. Ezért (4.8) teljesül, ha páratlan számokon keresztül tartunk végtelenbe. Mivel $\beta_{2k} = a_{2k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, kapjuk, hogy (4.8) akkor is teljesül, ha páros számokon keresztül tartunk a végtelenbe. Összefoglalva, beláttuk (4.8)-t.

Ismert, hogy

$$\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \min \left(\frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|y|^n}{n!} \right), \quad y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\left| e^{itx} \left(e^{ihx} - \sum_{k=0}^n \frac{(ihx)^k}{k!} \right) \right| \leq \left| e^{ihx} - \sum_{k=0}^n \frac{(ihx)^k}{k!} \right| \leq \frac{|hx|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad h, x \in \mathbb{R}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+h)x} \mu(dx) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} \mu(dx) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \left(e^{ihx} - \sum_{k=0}^n \frac{(ihx)^k}{k!} \right) \mu(dx) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|hx|^{n+1}}{(n+1)!} \mu(dx) = \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \int_{\mathbb{R}} |x|^{n+1} \mu(dx) = \frac{|h|^{n+1} \beta_{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Felhasználva (4.8)-ot, tetszőleges $h \in [-r, r]$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|h|^{n+1} \beta_{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

és így

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(t+h)x} \mu(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} \mu(dx), \quad h \in [-r, r].$$

Mivel $\beta_k \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, a 4.2. Tétel (ix) része alapján kapjuk, hogy

$$\varphi_{\mu}^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} \mu(dx), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol

$$\varphi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ezért

$$\varphi_\mu(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\mu^{(k)}(t)}{k!} h^k, \quad h \in [-r, r]. \quad (4.9)$$

Ha ν egy másik valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mérhető téren, melynek momentumai α_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, akkor ugyanezen gondolatmenettel adódik, hogy

$$\varphi_\nu(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^{(k)}(t)}{k!} h^k, \quad h \in [-r, r]. \quad (4.10)$$

Mivel

$$\varphi_\mu^{(k)}(0) = i^k \alpha_k = \varphi_\nu^{(k)}(0), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

a $t = 0$ választással élve az (4.9) és (4.10) összefüggésekben, kapjuk, hogy

$$\varphi_\mu(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\mu^{(k)}(0)}{k!} h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \alpha_k}{k!} h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^{(k)}(0)}{k!} h^k = \varphi_\nu(h), \quad h \in [-r, r].$$

Így

$$\varphi_\nu^{(k)}(h) = \varphi_\mu^{(k)}(h), \quad h \in (-r, r), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

A $t = r - \varepsilon$ választással élve az (4.9) és (4.10) összefüggésekben, ahol $\varepsilon \in (0, r)$, kapjuk, hogy

$$\varphi_\mu(r - \varepsilon + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\mu^{(k)}(r - \varepsilon)}{k!} h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^{(k)}(r - \varepsilon)}{k!} h^k = \varphi_\nu(r - \varepsilon + h), \quad h \in [-r, r],$$

melyből következik, hogy φ_μ és φ_ν megegyezik a $[-\varepsilon, 2r - \varepsilon]$ intervallumon. A $t = -r + \varepsilon$ választással élve az (4.9) és (4.10) összefüggésekben, ahol $\varepsilon \in (0, r)$, hasonlóan kapjuk, hogy φ_μ és φ_ν megegyezik a $[-2r + \varepsilon, \varepsilon]$ intervallumon is. Így φ_μ és φ_ν megegyezik a $[-\varepsilon, 2r - \varepsilon] \cup [-2r + \varepsilon, \varepsilon] = [-2r + \varepsilon, 2r - \varepsilon]$ intervallumon is. Mivel $\varepsilon \in (0, r)$ tetszőleges, kapjuk, hogy φ_μ és φ_ν megegyezik a $(-2r, 2r)$ intervallumon is. A fentiek hasonlóan eljárva, adódik, hogy φ_μ és φ_ν megegyezik a $(-3r, 3r)$ intervallumon is, és így tovább (egyfajta analitikus folytatás ez). Ezért kapjuk, hogy φ_μ és φ_ν megegyezik $\mathbb{R}$ -en. A karakterisztikus függvények egyértelműségi tétele alapján (4.2. Tétel (vi) része) adódik, hogy $\mu = \nu$. $\square$

4.10. Példa. A standard normális eloszlást meghatározzák a momentumai. Valóban, ha ξ egy standard normális eloszlású véletlen változó, akkor $\mathbb{E}(\xi^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{E}(\xi^{2k-1}) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, melyből adódik, hogy

$$|\mathbb{E}(\xi^n)| \leq n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\xi^n)}{n!} r^n$ hatványsor konvergencia sugara

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\mathbb{E}(\xi^n)|}{n!}}} \geq 1.$$

Így alkalmazhatjuk a 4.9. Tételt, melyből adódik, hogy a standard normális eloszlást meghatározzák a momentumai. $\square$

4.11. Tétel. *Legyen ξ egy véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(\xi^n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

(i) *Ha*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mathbb{E}(|\xi|^n))^{\frac{1}{n}}}{n} < \infty,$$

akkor az $\mathbb{E}(\xi^n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, momentumok egyértelműen meghatározzák ξ eloszlását.

(ii) *Ha*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mathbb{E}(\xi^{2n}))^{\frac{1}{2n}}}{2n} < \infty,$$

akkor az $\mathbb{E}(\xi^n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, momentumok egyértelműen meghatározzák ξ eloszlását.

4.12. Következmény. *Ha ξ egy korlátos véletlen változó, akkor ξ momentumai (melyek végesek) egyértelműen meghatározzák ξ eloszlását.*

4.13. Példa. Legyen ξ egy p -ed rendű és λ -paraméterű Gamma eloszlású véletlen változó, ahol $\lambda > 0$ és $p > 0$. Megmutatjuk, hogy ξ momentumai egyértelműen meghatározzák ξ eloszlását. A 4.11. Tétel (ii) részében szereplő feltételt ellenőrizzük le. Ismert, hogy

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)\lambda^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Így a Stirling formula alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbb{E}(\xi^{2n}))^{\frac{1}{2n}}}{2n} &= \frac{1}{2n} \left(\frac{\Gamma(p+2n)}{\Gamma(p)\lambda^{2n}} \right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2\lambda n} \left(\frac{\Gamma(p+2n)}{\Gamma(p)} \right)^{\frac{1}{2n}} \sim \frac{1}{2\lambda n} \left(\frac{\sqrt{2\pi}(p+2n)^{p+2n-\frac{1}{2}} e^{-(p+2n)}}{\Gamma(p)} \right)^{\frac{1}{2n}} \\ &\sim \frac{e^{-1}}{2\lambda} \left(2 + \frac{p}{n} \right) \left((p+2n)^{\frac{1}{2n}} \right)^{p-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$.

Az alábbiakban felhasználjuk, hogy ha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy pozitív számokból álló sorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in (0, \infty)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p+2n}{p+n} = 1,$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p + 2n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Ezért

$$\frac{(\mathbb{E}(\xi^{2n}))^{\frac{1}{2n}}}{2n} \sim \frac{1}{\lambda e}$$

amint $n \rightarrow \infty$. Teljesül tehát a 4.11. Tétel (ii) részének feltétele. $\square$

Megjegyezzük továbbá, hogy a Carleson teszt bizonyos sorok divergenciájának nyelvén fogalmaz meg elegendő feltételt a momentum problémára.

4.14. Definíció. Legyenek $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok. Azt mondjuk, hogy az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat eloszlásban konvergál X -hez, ha $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ az F_X minden $x \in \mathbb{R}^d$ folytonossági pontjában. Jelölése: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

4.15. Tétel. (Folytonossági tétel, Paul Lévy) Legyenek $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ véletlen vektorok.

(i) Ha létezik olyan $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{t \in \mathbb{R}^d: \|t\| \leq \delta\}} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Speciálisan, tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, ha $n \rightarrow \infty$.

(ii) Ha tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) =: \varphi(t)$, és φ folytonos a $0 \in \mathbb{R}^d$ pontban, akkor létezik olyan $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $\varphi_X = \varphi$, és $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$.

4.16. Tétel. (Folytonossági tétel, Paul Lévy) Legyenek $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és X véletlen vektorok. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(i) $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, ha $n \rightarrow \infty$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén,

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$.

Az alábbiakban arra mutatunk egy példát, hogy a folytonossági tétel (4.15. Tétel) (ii) részében nem hagyható el az a feltétel, hogy φ folytonos a $0 \in \mathbb{R}^d$ pontban.

4.17. Példa. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, legyen X_n egyenletes eloszlású a $(-n, n)$ intervallumon, azaz X_n eloszlásfüggvénye $F_{X_n}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -n, \\ \frac{x+n}{2n} & \text{ha } -n < x \leq n, \\ 1 & \text{ha } x > n. \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, ahol a határfüggvény, azaz az azonosan $1/2$ függvény folytonos, de nem eloszlásfüggvény, így X_n nem konvergál eloszlásban, amint $n \rightarrow \infty$. Ellenőrizhető, hogy X_n karakterisztikus függvénye (lásd a későbbi 5.17. Állítást)

$$\varphi_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(nt)}{nt} & \text{ha } t \neq 0, \\ 1 & \text{ha } t = 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \neq 0, \\ 1 & \text{ha } t = 0, \end{cases}$$

mely a 0-ban nem folytonos függvény. □

4.18. Tétel. (Momentumok módszere gyenge konvergencia bizonyítására) Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, és X véletlen változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_n^r) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, és $\mathbb{E}(X^r) \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Ha X eloszlását meghatározzák a momentumai és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^r) = \mathbb{E}(X^r), \quad r \in \mathbb{N},$$

akkor $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$.

A 4.8., 4.10. és 4.13. Példák alapján a 4.18. Tétel elvben használható standard normális eloszláshoz vagy Gamma-eloszláshoz való gyenge konvergencia bizonyítására, viszont nem használható lognormális eloszláshoz való gyenge konvergencia bizonyítására.

4.19. Példa. (Standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye) Legyen X egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. Több módszer is ismeretes X karakterisztikus függvényének meghatározására, itt egy differenciálegyenletekre alapuló módszert mutatunk be. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ugyanis ellenőrizzük, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Egyrészt tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

integrál véges (hiszen $\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$), másrészt $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ páratlan függvény, és így

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \int_{-\infty}^0 \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= - \int_0^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy mivel $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$, a 4.2. Tétel (xii) része alapján $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, így ebből is adódik, hogy

$$\varphi_X(t) = \operatorname{Re}(\varphi_X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Mivel $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, a 4.2. Tétel (ix) része alapján φ_X folytonosan differenciálható és

$$\varphi'_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -\sin(tx) \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\varphi'_X(t) = \left[\sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} t \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 - t\varphi_X(t) = -t\varphi_X(t)$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Így, felhasználva, hogy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy $\varphi_X(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$, alkalmas $C \in \mathbb{R}$ választással. Mivel $\varphi_X(0) = 1$, kapjuk, hogy $C = 1$, és így

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

4.20. Definíció. Ha az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor koordinátái nemnegatív egész értékeket vesznek fel, azaz X a $\mathbb{Z}_+^d$ halmazba koncentrálódik, vagyis $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, akkor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ **generátorfüggvénye** a

$$\begin{aligned} G_X(z) &:= G_{X_1, \dots, X_d}(z_1, \dots, z_d) := \mathbb{E}(z^X) := \mathbb{E}(z_1^{X_1} \cdots z_d^{X_d}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=0}^{\infty} z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d} \mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) \end{aligned}$$

d -változós komplex hatványsor összegfüggvénye (ahol létezik).

Ez a hatványsor abszolút konvergens a

$$\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| \leq 1, \dots, |z_d| \leq 1\}$$

halmazon, és X karakterisztikus függvénye a

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(t_1, \dots, t_d) = G_X(e^{it_1}, \dots, e^{it_d}), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$$

periodikus függvény ($\varphi_X(t+k2\pi) = \varphi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{Z}$, ahol $t+k2\pi = (t_1+k2\pi, \dots, t_d+k2\pi)^\top$).

A generátorfüggvény tulajdonságait foglalja össze a következő állítás.

4.21. Tétel. (i) $G_X(1, \dots, 1) = 1$.

(ii) G_X analitikus a $\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \dots, |z_d| < 1\}$ halmazon.

(iii) Tetszőleges $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) = \frac{\partial_1^{k_1} \dots \partial_d^{k_d} G_X(0, \dots, 0)}{r_1! \dots r_d!}.$$

(iv) Egyértelműségi tétel generátorfüggvényekre: $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y \iff \forall x \in [-1, 1]^d$ esetén $G_X(x) = G_Y(x)$.

(v) Ha X és Y függetlenek, akkor $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$ a $\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| \leq 1, \dots, |z_d| \leq 1\}$ halmazon.

(vi) Tetszőleges $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) < \infty \iff \partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} G_X(1-, \dots, 1-) < \infty,$$

és

$$\begin{aligned} \partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} G_X(1-, \dots, 1-) \\ = \mathbb{E}(X_1(X_1 - 1) \dots (X_1 - r_1 + 1) \dots X_d(X_d - 1) \dots (X_d - r_d + 1)). \end{aligned}$$

4.22. Tétel. (Folytonossági tétel generátorfüggvényekre) Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ olyan véletlen vektorok, hogy $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$ és $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$,

(ii) $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $k \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén,

(iii) $G_{X_n}(x) \rightarrow G_X(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in [-1, 1]^d$ esetén.

4.23. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy $d = 1$ esetén, ha létezik olyan $a \in (0, 1)$ és olyan $G: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(z) = G(z)$, $\forall z \in [-a, a]$, akkor

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in (-a, a),$$

ahol $p_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. A nemnegatív $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ sorozatra azonban általában nem teljesül, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, azaz nem biztos általában véve, hogy $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ valószínűség eloszlás. Az alábbiakban egy példát mutatunk, amikor $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ nem valószínűség eloszlás. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén X_n egy olyan valószínűségi változó, hogy $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2}$, akkor $G_{X_n}(z) = \frac{1+z^n}{2}$, $z \in \mathbb{R}$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(z) = \frac{1}{2} =: G(z)$, ha $z \in (-1, 1)$. Továbbá,

$$p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{ha } k \neq 0, \end{cases}$$

így $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $z \in (-1, 1)$, azonban $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \frac{1}{2} \neq 1$. □

4.24. Definíció. Ha az $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor koordinátái nemnegatív értékeket vesznek fel, azaz X az $\mathbb{R}_+^d$ halmazba koncentrálódik, vagyis $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+^d) = 1$, akkor X **Laplace-transzformáltja** $\psi_X : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi_X(s) := \psi_{X_1, \dots, X_d}(s_1, \dots, s_d) := \mathbb{E}(e^{-\langle s, X \rangle}) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-s_1 x_1 - \dots - s_d x_d} dF_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d),$$

ahol $s \in \mathbb{R}_+^d$.

Ha $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, akkor

$$\begin{aligned} \psi_X(s_1, \dots, s_d) &= G_X(e^{-s_1}, \dots, e^{-s_d}), \quad (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d, \\ G_X(x_1, \dots, x_d) &= \psi_X(-\log x_1, \dots, -\log x_d), \quad (x_1, \dots, x_d) \in (0, 1)^d. \end{aligned}$$

A Laplace-transzformált tulajdonságait foglalja össze a következő állítás.

4.25. Állítás. (i) $0 \leq \psi_X \leq 1$, és $\psi_X(0) = 1$.

(ii) ψ_X analitikus a $(0, \infty)^d$ halmazon.

(iii) Egyértelműségi tétel Laplace-transzformáltakra: $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ akkor és csak akkor, ha $\psi_X = \psi_Y$.

(iv) Ha X és Y függetlenek, akkor $\psi_{X+Y} = \psi_X \psi_Y$.

(v) Tetszőleges $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) < \infty \iff \partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \psi_X(0+, \dots, 0+) < \infty,$$

és

$$\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \psi_X(0+, \dots, 0+) = (-1)^{r_1 + \dots + r_d} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}).$$

4.26. Tétel. (Folytonossági tétel Laplace-transzformáltakra) Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ olyan véletlen vektorok, hogy $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+^d) = 1$ és $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{R}_+^d) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$,

(ii) $\psi_{X_n}(s) \rightarrow \psi_X(s)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $s \in \mathbb{R}_+^d$ esetén.

Az alábbiak egy nemnegatív véletlen változó Laplace-transzformáltja és nem egész (tört) momentuma kapcsolatával foglalkozunk *N. H. Bingham, R. A. Doney: Asymptotic properties of supercritical branching processes I: The Galton-Watson process, Advances in Applied Probability, 6(4) 711-731 (1974)* cikke nyomán (ahol általánosabb eredmények is találhatók).

Legyen a továbbiakban X egy nemnegatív véletlen változó, jelölje $\psi_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX})$, $s \in \mathbb{R}_+$, a Laplace-transzformáltját. Legyen

$$f_0(s) := 1 - \psi_X(s) = \mathbb{E}(1 - e^{-sX}), \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

és, amennyiben $\mathbb{E}(X) < \infty$, akkor legyen

$$f_1(s) := f_0(s) - 1 + s\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^{-sX} - 1 + sX) = \mathbb{E}(e^{-sX} - 1 + sX), \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

4.27. Tétel. *Legyen X egy nemnegatív véletlen változó, jelölje $\psi_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX})$, $s \in \mathbb{R}_+$, a Laplace-transzformáltját.*

(i) *Tetszőleges $\beta \in (0,1)$ esetén*

$$\mathbb{E}(X^\beta) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 f_0(s) s^{-1-\beta} ds < \infty, \quad \text{azaz} \quad \int_0^1 \mathbb{E}(1 - e^{-sX}) s^{-1-\beta} ds < \infty,$$

(ii) *Ha $\mathbb{E}(X) \in (0, \infty)$, akkor tetszőleges $\beta \in (0,1)$ esetén*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^{1+\beta}) < \infty &\quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 f_1(s) s^{-2-\beta} ds < \infty, \\ &\quad \text{azaz} \quad \int_0^1 \mathbb{E}(e^{-sX} - 1 + sX) s^{-2-\beta} ds < \infty. \end{aligned}$$

Bizonyítás. (i). Legyen $\beta \in (0,1)$, és $J : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$J(x) := \int_0^1 (1 - e^{-sx}) s^{-1-\beta} ds, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Ekkor a Fubini-tétel alapján

$$\mathbb{E}(J(X)) = \int_0^1 \mathbb{E}(1 - e^{-sX}) s^{-1-\beta} ds = \int_0^1 (1 - \psi_X(s)) s^{-1-\beta} ds.$$

Tekintsük az

$$\mathbb{E}(J(X)) = \mathbb{E}(J(X) \mathbb{1}_{\{X \leq 1\}}) + \mathbb{E}(J(X) \mathbb{1}_{\{X > 1\}})$$

felbontást. Tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén

$$J(x) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-sx}}{s} s^{-\beta} ds \leq \int_0^1 s^{-\beta} ds = \frac{1}{1-\beta} < \infty,$$

amiből következik, hogy

$$\mathbb{E}(J(X) \mathbb{1}_{\{X \leq 1\}}) \leq \frac{1}{1-\beta} < \infty.$$

Ezért

$$\int_0^1 \mathbb{E}(1 - e^{-sX}) s^{-1-\beta} ds < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(J(X) \mathbb{1}_{\{X > 1\}}) < \infty.$$

Tetszőleges $x > 1$ esetén tekintsük a $J(x) := J_1(x) + J_2(x)$ felbontást, ahol

$$J_1(x) := \int_0^{\frac{1}{x}} (1 - e^{-sx}) s^{-1-\beta} ds,$$

$$J_2(x) := \int_{\frac{1}{x}}^1 (1 - e^{-sx}) s^{-1-\beta} ds.$$

Ekkor $x > 1$ esetén az $sx = t$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$J_1(x) = \int_0^1 (1 - e^{-t}) \left(\frac{t}{x}\right)^{-1-\beta} \frac{1}{x} dt = x^\beta \int_0^1 (1 - e^{-t}) t^{-1-\beta} dt, \quad (4.11)$$

és, az $s = \frac{1}{t}$ helyettesítéssel,

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-1-\beta} ds - \int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-sx} s^{-1-\beta} ds \\ &\sim \int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-1-\beta} ds = \int_x^1 t^{1+\beta} (-t^{-2}) dt \\ &= \int_1^x t^{\beta-1} dt \quad \text{amint } x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.12)$$

hiszen

$$0 \leq \frac{\int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-sx} s^{-1-\beta} ds}{\int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-1-\beta} ds} \leq \frac{e^{-sx_0} \int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-1-\beta} ds}{\int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-1-\beta} ds} = e^{-sx_0}, \quad \text{ha } x \geq x_0 \geq 1$$

alapján

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-sx} s^{-1-\beta} ds}{\int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-1-\beta} ds} = 0.$$

Felhasználva (4.11)-et és (4.12)-t, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(J(X) \mathbb{1}_{\{X > 1\}}) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(X^\beta \mathbb{1}_{\{X > 1\}}) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(X^\beta) < \infty,$$

melyből adódik az (i) rész állítása.

(ii). Legyen $\beta \in (0, 1)$, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) \in (0, \infty)$. Legyen X_1 egy olyan nemnegatív véletlen változó, melynek eloszlásfüggvénye $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_1(x) := \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < x\}}) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \int_0^x t dF_X(t) & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Az (i) rész alapján

$$\mathbb{E}(X_1^\beta) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 \mathbb{E}(1 - e^{-sX_1}) s^{-1-\beta} ds < \infty.$$

Továbbá,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{1+\beta}) &= \int_0^\infty x^{1+\beta} dF_X(x) = \mathbb{E}(X) \int_0^\infty x^\beta \frac{1}{\mathbb{E}(X)} x dF_X(x) \\ &= \mathbb{E}(X) \int_0^\infty x^\beta dF_1(x) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(X_1^\beta).\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(X^{1+\beta}) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 \mathbb{E}(1 - e^{-sX_1}) s^{-1-\beta} ds < \infty.$$

Mivel

$$\begin{aligned}1 - \mathbb{E}(e^{-sX_1}) &= 1 - \int_0^\infty e^{-sx} dF_1(x) = 1 - \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{\mathbb{E}(X)} x dF_X(x) \\ &= 1 - \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \mathbb{E}(Xe^{-sX}) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} (1 - \mathbb{E}(Xe^{-sX})), \quad s \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{4.13}$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{1+\beta}) < \infty &\Longleftrightarrow \int_0^1 (1 - \mathbb{E}(Xe^{-sX})) s^{-1-\beta} ds < \infty \\ &\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{\mathbb{E}(X) + \psi'_X(s)}{\mathbb{E}(X)} s^{-1-\beta} ds < \infty \\ &\Longleftrightarrow \int_0^1 (\psi_X(s) - 1 + s \mathbb{E}(X))' s^{-1-\beta} ds < \infty \\ &\Longleftrightarrow \int_0^1 f'_1(s) s^{-1-\beta} ds < \infty.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Az alábbiakban felhasználjuk azt, hogy ha $h : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy monoton növekvő függvény, melyre az $\int_0^1 h(t) dt$ improprius integrál véges, akkor $\lim_{t \downarrow 0} th(t) = 0$. Ezt a következő módon láthatjuk be. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $x_\varepsilon > 0$, hogy $\int_0^x h(t) dt < \varepsilon$, ha $x \in (0, x_\varepsilon)$. Ekkor tetszőleges $x \in (0, x_\varepsilon)$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{x}{2} h(x/2) = \left(x - \frac{x}{2}\right) h(x/2) = h(x/2) \int_{x/2}^x 1 dt = \int_{x/2}^x h(x/2) dt \leq \int_{x/2}^x h(t) dt \leq \int_0^x h(t) dt < \varepsilon.$$

A $h(s) := f_1(s) = \mathbb{E}(e^{-sX} - 1 + sX)$, $s \in \mathbb{R}_+$, illetve $h(s) := f'_1(s) = \mathbb{E}(X(1 - e^{-sX}))$, $s \in \mathbb{R}_+$, választásokkal fogunk majd élni, melyek lehetséges választások, hiszen $f'_1(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{R}_+$, melyből következik, hogy f_1 monoton növekvő.

Belátjuk, hogy

$$\int_0^1 f'_1(s) s^{-1-\beta} ds < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 f_1(s) s^{-2-\beta} ds < \infty,$$

melyből (4.14) alapján következik a (ii) rész állítása.

Ha $\int_0^1 f_1'(s)s^{-1-\beta} ds < \infty$, akkor $\lim_{s \downarrow 0} f_1'(s)s^{-\beta} = 0$, azaz $\lim_{s \downarrow 0} \frac{f_1'(s)}{s^\beta} = 0$. Így a $\mathcal{L}$ Hospital szabály alapján, kapjuk, hogy $\lim_{s \downarrow 0} \frac{f_1(s)}{s^{1+\beta}} = 0$. Továbbá, parciális integrálás segítségével,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1'(s)s^{-1-\beta} ds &= f_1(1) - \lim_{s \downarrow 0} \left(\frac{f_1(s)}{s^{1+\beta}} \right) + (1+\beta) \int_0^1 f_1(s)s^{-2-\beta} ds \\ &= f_1(1) + (1+\beta) \int_0^1 f_1(s)s^{-2-\beta} ds, \end{aligned} \tag{4.15}$$

amiből következik, hogy $\int_0^1 f_1(s)s^{-2-\beta} ds < \infty$.

Ha $\int_0^1 f_1(s)s^{-2-\beta} ds < \infty$, akkor $\lim_{s \downarrow 0} f_1(s)s^{-1-\beta} = 0$, és így parciális integrálás segítségével, (4.15) alapján, kapjuk, hogy $\int_0^1 f_1'(s)s^{-1-\beta} ds < \infty$. $\square$

5. Nevezetes eloszlások

5.1. Definíció. Legyen $p \in [0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **p paraméterű Bernoulli-eloszlású**, ha lehetséges értékei: 0 és 1, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Ha $A \in \mathcal{A}$ egy esemény, akkor az

$$\mathbb{1}_A := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

véletlen változó Bernoulli-eloszlású $\mathbb{P}(A)$ paraméterrel.

5.2. Állítás. Legyen X egy p paraméterű Bernoulli-eloszlású véletlen változó, ahol $p \in [0, 1]$. Ekkor

(i) X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = 1 - p + pz = 1 + p(z - 1), \quad z \in \mathbb{C},$$

(ii) X Laplace-transzformáltja:

$$\psi_X(s) = 1 - p + pe^{-s} = 1 - p(1 - e^{-s}), \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

(iii) X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it} = 1 + p(e^{it} - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.3. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $p \in [0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **(n, p) paraméterű binomiális eloszlású**, ha lehetséges értékei: 0, 1, ..., n , és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Ha egy $A \in \mathcal{A}$ eseménnyel kapcsolatban n független kísérletet végzünk és

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

akkor az $X = X_1 + \dots + X_n$ véletlen változó $(n, \mathbb{P}(A))$ paraméterű binomiális eloszlású, és $X_1, \dots, X_n$ független, $\mathbb{P}(A)$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak.

5.4. Állítás. Legyen X (n, p) paraméterű binomiális eloszlású véletlen változó, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $p \in [0, 1]$. Ekkor

(i) X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = (1 - p + pz)^n = (1 + p(z - 1))^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

(ii) X Laplace-transzformáltja:

$$\psi_X(s) = (1 - p + pe^{-s})^n = (1 - p(1 - e^{-s}))^n, \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

(iii) X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n = (1 + p(e^{it} - 1))^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.5. Definíció. Legyenek $n, N, M \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $M \leq N$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **($n, M, N - M$) paraméterű hipergeometrikus eloszlású**, ha olyan egész k értékeket vehet fel, melyekre teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$ és $n - k \leq N - M$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van, és visszatevés nélkül húzunk ki n golyót, és X jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor az X véletlen változó $(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlású.

5.6. Definíció. Legyen $r \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású**, ha lehetséges értékei: $0, 1, \dots$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k \in \{0, 1, \dots\}.$$

A p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlást **p paraméterű geometriai eloszlásnak** is hívják.

Ha egy $A \in \mathcal{A}$ eseménnyel kapcsolatban független kísérleteket végzünk és az A r -edik bekövetkezéséhez szükséges kísérletek száma $r + X$, akkor az X véletlen változó $\mathbb{P}(A)$ paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású.

5.7. Állítás. (Elsőrendű negatív binomiális (geometriai) eloszlások konvolúciója)

Legyen $r \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1]$. Ha az $X_1, \dots, X_r$ véletlen változók függetlenek és p paraméterű elsőrendű negatív binomiális (geometriai) eloszlásúak, akkor az $X_1 + \dots + X_r$ véletlen változó p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású.

Bizonyítás. Tekintsük egy kísérlet független ismétléseit, és egy p valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezéseit. Ekkor a korábbiak alapján, ha $r + X$ jelöli az A r -edik bekövetkezéséhez szükséges kísérletek számát, akkor az X véletlen változó $\mathbb{P}(A) = p$ paraméterű r -edrendű

negatív binomiális eloszlású. Jelölje továbbá $1+X_1$ azt, hogy az A hányadik ismétlés során következik be először, $1+X_2$ azt, hogy az első bekövetkezés után hányadik lépésben következik be újra A , és így tovább. Nyilván $X_1, X_2, \dots$ független p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlású véletlen változók, és $r+X = (1+X_1) + \dots + (1+X_r)$, azaz $X = X_1 + \dots + X_r$, bizonyítva az állítást. $\square$

5.8. Állítás. Legyen X p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású véletlen változó, ahol $r \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1]$. Ekkor

(i) X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)z} \right)^r, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < \frac{1}{1-p},$$

ahol $p = 1$ esetén $\frac{1}{1-p} := \infty$.

(ii) X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^{it}} \right)^r, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az 5.7. Állítás alapján $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1 + \dots + X_r$, ahol $X_1, \dots, X_r$ független p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlású véletlen változók.

(i). A 4.21. Tétel (v) pontja szerint X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = G_{X_1}(z) \cdots G_{X_r}(z) = (G_{X_1}(z))^r,$$

ahol

$$G_{X_1}(z) = \mathbb{E}(z^{X_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k = \frac{p}{1 - z(1-p)},$$

ahol $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z(1-p)| < 1$, melyből következik a bizonyítandó állítás.

(ii). A 4.2. Tétel (viii) pontja szerint X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdots \varphi_{X_r}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^r, \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (e^{it}(1-p))^k = \frac{p}{1 - e^{it}(1-p)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hiszen $|e^{it}(1-p)| = 1-p \in (0, 1)$, melyből következik a bizonyítandó állítás. $\square$

5.9. Állítás. (Elsőrendű negatív binomiális eloszlás örökifjú tulajdonsága) Ha az X véletlen változó p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlású, ahol $p \in (0, 1]$, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq k + \ell \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq \ell), \quad k, \ell \in \{0, 1, \dots\}.$$

5.10. Definíció. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **λ paraméterű Poisson-eloszlású**, ha lehetséges értékei: $0, 1, \dots$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \{0, 1, \dots\}.$$

5.11. Állítás. Legyen X λ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó, ahol $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Ekkor

(i) X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(ii) X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z}.$$

(ii). Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}.$$

□

5.12. Állítás. (Binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással) Ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, binomiális eloszlású véletlen változók (n, p_n) paraméterrel, és $np_n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, ha $n \rightarrow \infty$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol az X véletlen változó λ paraméterű Poisson-eloszlású.

Az 5.12. Állítás bizonyítása során szükségünk lesz a következő lemmára.

5.13. Lemma. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ komplex számok egy sorozata, hogy $z_n \rightarrow z$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow e^z, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n} = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n} = 0$. Így elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 + \frac{z_n}{n} = r_n e^{i\varphi_n},$$

ahol

$$r_n := \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n}\right)^2} \quad \text{és} \quad \varphi_n := \arctan\left(\frac{\frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n}}{1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}}\right).$$

Ezért elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\varphi_n}$. Itt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n}\right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2\frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n} + \frac{(\operatorname{Re}(z_n))^2}{n^2} + \frac{(\operatorname{Im}(z_n))^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \left(2\operatorname{Re}(z_n) + \frac{(\operatorname{Re}(z_n))^2}{n} + \frac{(\operatorname{Im}(z_n))^2}{n} \right) \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= (e^{2\operatorname{Re}(z)})^{\frac{1}{2}} = e^{\operatorname{Re}(z)}, \end{aligned}$$

hiszen $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\operatorname{Re}(z_n) + \frac{(\operatorname{Re}(z_n))^2}{n} + \frac{(\operatorname{Im}(z_n))^2}{n} \right) = 2\operatorname{Re}(z).$$

Továbbá, felhasználva, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n}}{1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}} \cdot \frac{\arctan\left(\frac{\frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n}}{1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}}\right)}{\frac{\frac{\operatorname{Im}(z_n)}{n}}{1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}}} \cdot \mathbb{1}_{\{\operatorname{Im}(z_n) \neq 0\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(z_n)}{1 + \frac{\operatorname{Re}(z_n)}{n}} = \operatorname{Im}(z).$$

Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} = e^z.$$

□

Az 5.12. Állítás bizonyítása. Ha megmutatjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor a folytonossági tétel (lásd 4.15. Tétel (ii) része) alapján következik az állítás. Az 5.4. és 5.11. Állítások alapján ehhez azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1 + p_n(e^{it} - 1))^n \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}, \quad \text{ha } np_n \rightarrow \lambda. \quad (5.1)$$

Ekkor

$$(1 + p_n(e^{it} - 1))^n = \left(1 + \frac{np_n(e^{it} - 1)}{n}\right)^n,$$

és a feltétel miatt $np_n(e^{it} - 1) \rightarrow \lambda(e^{it} - 1)$, ha $n \rightarrow +\infty$. Az 5.13. Lemma alapján kapjuk (5.1)-t. Megjegyezzük, hogy a 4.22. Tételt felhasználva is bizonyíthatnánk az állítást. □

5.14. Definíció. Legyen $N \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **egyenletes eloszlású a $\{0, 1, \dots, N-1\}$ halmazon**, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

5.15. Állítás. Legyen X egyenletes eloszlású véletlen változó a $\{0, 1, \dots, N-1\}$ halmazon, ahol $N \in \mathbb{N}$. Ekkor

(i) X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = \frac{1}{N}(1 + z + \dots + z^{N-1}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z - 1} & \text{ha } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{ha } z = 1. \end{cases}$$

(ii) X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{N}(1 + e^{it} + \dots + e^{it(N-1)}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{e^{itN} - 1}{e^{it} - 1} & \text{ha } e^{it} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{ha } e^{it} = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.16. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a < b$. Azt mondjuk, hogy az X abszolút folytonos véletlen változó **egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon**, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in (a, b), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5.17. Állítás. Legyen X egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, ahol $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t} & \text{ha } t \neq 0, \\ 1 & \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \cos(tx) dx + i \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b \sin(tx) dx.$$

Ha $t = 0$, akkor $\varphi_X(t) = 1$. Ha $t \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(tx) dx &= \frac{1}{t} (\sin(tb) - \sin(ta)), \\ \int_a^b \sin(tx) dx &= \frac{1}{t} (\cos(ta) - \cos(tb)), \end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{(b-a)t} \left(\sin(tb) - \sin(ta) + i \cos(ta) - i \cos(tb) \right) \\ &= \frac{-i}{(b-a)t} \left(\cos(tb) + i \sin(tb) - \cos(ta) - i \sin(ta) \right) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}.\end{aligned}$$

□

5.18. Állítás. (Folytonos egyenletes eloszlás közelítése) Ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, egyenletes eloszlású véletlen változók a $\{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, halmazokon, akkor $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol az X véletlen változó egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

Bizonyítás. Ha megmutatjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_{X_n/n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor a folytonossági tétel (lásd 4.15. Tétel (ii) része) alapján következik az állítás. Az 5.15. és 5.17. Állítások alapján

$$\varphi_{X_n/n}(t) = \mathbb{E}(e^{it \frac{X_n}{n}}) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{e^{it/n} - 1}{e^{i \frac{t}{n}} - 1} & \text{ha } e^{i \frac{t}{n}} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{ha } e^{i \frac{t}{n}} = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

és

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{it} - 1}{it} & \text{ha } t \neq 0, \\ 1 & \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

Ha $t = 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n/n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = \varphi_X(t)$. Ha $t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, akkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, esetén $e^{i \frac{t}{n}} = \cos(\frac{t}{n}) + i \sin(\frac{t}{n}) \neq 1$, és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n/n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{it} - 1}{\frac{e^{i \frac{t}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{it} - 1}{(e^{itx})'|_{x=0}} = \frac{e^{it} - 1}{it} = \varphi_X(t).$$

□

5.19. Definíció. Legyen $\lambda > 0$. Azt mondjuk, hogy az X abszolút folytonos véletlen változó λ paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha X $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó, akkor eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5.20. Állítás. Legyen X egy véletlen változó. Az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) Az X véletlen változó exponenciális eloszlású.

(ii) **(Örökifjú tulajdonság)** Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén $\mathbb{P}(X \geq y) > 0$ és

$$\mathbb{P}(X \geq y+x \mid X \geq y) = \mathbb{P}(X \geq x).$$

(iii) Tetszőleges $x \in \mathbb{R}_+$ és az X véletlen változótól független, nemnegatív Y véletlen változó esetén $\mathbb{P}(X \geq Y) > 0$ és

$$\mathbb{P}(X \geq Y+x \mid X \geq Y) = \mathbb{P}(X \geq x).$$

Bizonyítás. (i) $\implies$ (ii). Legyen X $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén, $\mathbb{P}(X \geq y) = 1 - F_X(y) = e^{-\lambda y} > 0$ és a feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathbb{P}(X \geq y+x \mid X \geq y) = \frac{\mathbb{P}(X \geq y+x, X \geq y)}{\mathbb{P}(X \geq y)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq y+x)}{\mathbb{P}(X \geq y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \geq x).$$

(ii) $\implies$ (i). Vezessük be az X véletlen változó túlélési függvényét: $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$,

$$\bar{F}(x) := 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X \geq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A (ii) feltétel miatt tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén $\bar{F}(x) > 0$ és

$$\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq x+y)}{\mathbb{P}(X \geq y)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq y+x, X \geq y)}{\mathbb{P}(X \geq y)} = \mathbb{P}(X \geq y+x \mid X \geq y) = \mathbb{P}(X \geq x) = \bar{F}(x).$$

Így $\bar{F}(x+y) = \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén. Mivel $\bar{F}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, vehetjük az előző egyenlet logaritmusát:

$$\ln(\bar{F}(x+y)) = \ln(\bar{F}(x)) + \ln(\bar{F}(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}_+,$$

mely az ún. Cauchy-féle függvényegyenlet. Mivel $\bar{F}$ monoton csökkenő és balról folytonos, kapjuk, hogy $\ln(\bar{F})$ monoton csökkenő az $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ nemnegatív félegyenesen és balról folytonos a $(0, \infty)$ pozitív félegyenesen. Ismert, hogy ekkor a fenti Cauchy-féle függvényegyenlet megoldása $\ln(\bar{F}(x)) = cx$, $x \in \mathbb{R}_+$, alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Mivel $\ln(\bar{F}(x)) \in (-\infty, 0]$, $x \in \mathbb{R}_+$, kapjuk, hogy $c \leq 0$. Továbbá, $c = 0$ esetén $\ln(\bar{F}(x)) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, azaz $\bar{F}(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}_+$, azaz $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, mely ellentmondás, hiszen F eloszlásfüggvény. Ezért $c < 0$, és így létezik olyan $\lambda > 0$, hogy $c = -\lambda$, azaz $\ln(\bar{F}(x)) = -\lambda x$, $x \in \mathbb{R}_+$. Így $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, amiből $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, és $x=0$ választással $F_X(0) = 0$, azaz $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Ezért X exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel.

(ii) $\implies$ (iii). Felhasználva, hogy Y nemnegatív és független X -től, tetszőleges $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a teljes valószínűség tétele (lásd 8.18. Tétel (i) része) és a 8.14. Tétel (ii) része alapján

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \geq Y+x \mid X \geq Y) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq Y+x, X \geq Y)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq Y+x)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq Y+x \mid Y=y) \mathbb{P}_Y(dy)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq y+x) \mathbb{P}_Y(dy)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq y+x \mid X \geq y) \mathbb{P}(X \geq y) \mathbb{P}_Y(dy)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) \mathbb{P}(X \geq y) \mathbb{P}_Y(dy)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} \\
 &= \mathbb{P}(X \geq x) \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq y) \mathbb{P}_Y(dy)}{\mathbb{P}(X \geq Y)} = \mathbb{P}(X \geq x),
 \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőség (az előzőekhez hasonlóan) abból következik, hogy

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq y) \mathbb{P}_Y(dy) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq Y \mid Y=y) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{P}(X \geq Y).$$

(iii) $\implies$ (ii). Tetszőleges $y \in \mathbb{R}_+$ esetén éljünk az $Y(\omega) := y$, $\omega \in \Omega$, választással, mely egy nemnegatív, X -től független véletlen változó. $\square$

5.21. Állítás. Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó, ahol $\lambda > 0$. Ekkor

(i) X Laplace-transzformáltja:

$$\psi_X(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

(ii) X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \left(1 - i \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. (ii). Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \cos(tx) \lambda e^{-\lambda x} dx + i \int_0^\infty \sin(tx) \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Kétszeri parciális integrálással kaphatjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \cos(tx) \lambda e^{-\lambda x} dx &= \left[-\cos(tx) e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty t \sin(tx) e^{-\lambda x} dx = 1 - t \int_0^\infty \sin(tx) e^{-\lambda x} dx \\
 &= 1 - \left(t \left[\sin(tx) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} - t \int_0^\infty t \cos(tx) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} dx \right) \\
 &= 1 - \frac{t^2}{\lambda} \int_0^\infty \cos(tx) e^{-\lambda x} dx,
 \end{aligned}$$

és így

$$\left(\lambda + \frac{t^2}{\lambda}\right) \int_0^\infty \cos(tx) e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Ezért

$$\int_0^\infty \cos(tx) e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}.$$

Hasonlóan, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin(tx) \lambda e^{-\lambda x} dx &= \left[-\sin(tx) e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty t \cos(tx) e^{-\lambda x} dx = t \int_0^\infty \cos(tx) e^{-\lambda x} dx \\ &= t \left(\left[\cos(tx) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty (-t) \sin(tx) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \frac{t}{\lambda} - \frac{t^2}{\lambda} \int_0^\infty \sin(tx) e^{-\lambda x} dx, \end{aligned}$$

és így

$$\left(\lambda + \frac{t^2}{\lambda}\right) \int_0^\infty \sin(tx) e^{-\lambda x} dx = \frac{t}{\lambda}.$$

Ezért

$$\int_0^\infty \sin(tx) e^{-\lambda x} dx = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}.$$

Következésképpen, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2} i = \frac{\lambda(\lambda + it)}{\lambda^2 + t^2} = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(1 - i \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

□

5.22. Definíció. Legyen $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Azt mondjuk, hogy az X abszolút folytonos véletlen változó **(m, σ^2) paraméterű normális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A 4.19. Példa és a 4.2. Tétel (v) része alapján (vagy a 6.3. Tétel speciális eseteként) adódik az alábbi állítás.

5.23. Állítás. Legyen X (m, σ^2) paraméterű normális eloszlású véletlen változó, ahol $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Ekkor X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A következő eredmény nem más, mint a centrális határeloszlás-tétel de Moivre-féle alakja (1738).

5.24. Állítás. (de Moivre CLT, binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással)

Ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, binomiális eloszlású véletlen változók (n, p) paraméterrel, ahol $p \in (0, 1)$, akkor $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol az X véletlen változó $(0, 1)$ paraméterű normális eloszlású.

Bizonyítás. Ha megmutatjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) \rightarrow \varphi_X(t), \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

akkor a folytonossági tétel (lásd 4.15. Tétel (ii) része) alapján következik az állítás. Az 5.4. és 5.23. Állítások alapján

$$\varphi_{X_n}(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n, \quad \varphi_X(t) = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

és így

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) &= \mathbb{E} \left(e^{it \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}} \right) = e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \mathbb{E} \left(e^{it \frac{X_n}{\sqrt{np(1-p)}}} \right) \\ &= e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \varphi_{X_n} \left(\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} \right) = e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \left(pe^{\frac{it}{\sqrt{np(1-p)}}} + 1 - p \right)^n \\ &= \left(pe^{\frac{it(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}} + (1-p)e^{-\frac{itp}{\sqrt{np(1-p)}}} \right)^n = \left(pe^{it\sqrt{\frac{1-p}{np}}} + (1-p)e^{-it\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}} \right)^n \\ &=: \left(1 + \frac{n(z_n(t) - 1)}{n} \right)^n, \end{aligned}$$

ahol

$$z_n(t) := pe^{it\sqrt{\frac{1-p}{np}}} + (1-p)e^{-it\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}} \in \mathbb{C}.$$

Az 5.13. Lemma alapján, ahhoz, hogy megmutassuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) = \varphi_X(t) = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

elég azt belátni, hogy bármilyen $t \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} n(z_n(t) - 1) = -t^2/2$, melyet kétféleképpen is megmutatunk.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} (n(z_n(t) - 1)) = -\frac{t^2}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} (n(z_n(t) - 1)) = 0.$$

Ekkor

$$\operatorname{Re} (n(z_n(t) - 1)) = n \left[p \cos \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) + (1-p) \cos \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) - 1 \right],$$

és

$$\operatorname{Im} (n(z_n(t) - 1)) = n \left[p \sin \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) - (1-p) \sin \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) \right].$$

A L'Hôpital-szabály kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} (n(z_n(t) - 1)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-p \sin \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) t \sqrt{\frac{1-p}{p}} \left(-\frac{1}{2} \right) n^{-3/2} - (1-p) \sin \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) t \sqrt{\frac{p}{1-p}} \left(-\frac{1}{2} \right) n^{-3/2}}{-\frac{1}{n^2}} \\
 &= -\frac{t}{2} \sqrt{p(1-p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) + \sin \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right)}{n^{-\frac{1}{2}}} \\
 &= -\frac{t}{2} \sqrt{p(1-p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) t \sqrt{\frac{1-p}{p}} \left(-\frac{1}{2} \right) n^{-3/2} + \cos \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) t \sqrt{\frac{p}{1-p}} \left(-\frac{1}{2} \right) n^{-3/2}}{-\frac{1}{2} n^{-3/2}} \\
 &= -\frac{t^2}{2} \sqrt{p(1-p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cos \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) \sqrt{\frac{1-p}{p}} + \cos \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right] \\
 &= -\frac{t^2}{2} \sqrt{p(1-p)} \left[\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right] = -\frac{t^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Hasonlóan, A L'Hôpital-szabály kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} (n(z_n(t) - 1)) \\
 &= -\frac{t^2}{2} \sqrt{p(1-p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \left(t \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) \sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sin \left(t \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right] \\
 &= -\frac{t^2}{2} \sqrt{p(1-p)} (0 + 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Belátjuk most egy másik módon is, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} n(z_n(t) - 1) = -t^2/2$. Tekintsük az alábbi felbontást:

$$n(z_n(t) - 1) = n \left[p \left(e^{it\sqrt{\frac{1-p}{np}}} - 1 - it\sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) + (1-p) \left(e^{-it\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}} - 1 + it\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) \right].$$

Mivel $|e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2}| \leq \frac{|x|^3}{6}$, $x \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$e^{it\sqrt{\frac{1-p}{np}}} - 1 - it\sqrt{\frac{1-p}{np}} = \frac{1}{2} \left(it\sqrt{\frac{1-p}{np}} \right)^2 + O \left(|t|^3 \left(\frac{1-p}{np} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{t^2}{2} \frac{1-p}{np} + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

és hasonlóan

$$e^{-it\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}} - 1 + it\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} = -\frac{t^2}{2} \frac{p}{n(1-p)} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Így tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$n(z_n(t) - 1) = -\frac{t^2}{2} (1-p) + O(n^{-\frac{1}{2}}) - \frac{t^2}{2} p + O(n^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{t^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow -\frac{t^2}{2} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

□

6. Többdimenziós normális eloszlás

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **standard normális eloszlású**, ha $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$, ahol $Y_1, \dots, Y_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Azt mondjuk, hogy az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **normális eloszlású**, ha X eloszlása megegyezik $AY + m$ eloszlásával, ahol $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, és $m \in \mathbb{R}^d$.

6.2. Megjegyzés. Ha $X = (X_1, X_2)$ egy olyan véletlen vektor, hogy $\mathbb{D}^2(X_i) > 0$, $i = 1, 2$, és

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)}} \\ \frac{X_2 - \mathbb{E}(X_2)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X_2)}} \end{pmatrix}$$

2-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor, akkor

$$\frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)}} \quad \text{és} \quad \frac{X_2 - \mathbb{E}(X_2)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X_2)}}$$

független 1-dimenziós standard normális eloszlásúak, és így X_1 és X_2 is függetlenek és normális eloszlásúak. Továbbá,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbb{D}^2(X_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \end{pmatrix},$$

és ezért (X_1, X_2) 2-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy általában egy 2-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor koordinátái nem függetlenek.

□

6.3. Tétel. Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha karakterisztikus függvénye

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ i \langle m, t \rangle - \frac{1}{2} \langle Dt, t \rangle \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^d$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}^d$, és $D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, azaz $D^\top = D$, valamint tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\langle Dt, t \rangle \geq 0$. Továbbá $m = \mathbb{E}(X)$, $D = \text{Cov}(X)$.

Ha D invertálható, akkor X abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(D)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle D^{-1}(x - m), x - m \rangle \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bizonyítás. Ha $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású, akkor a 4.2. Tétel (viii) része és a 4.19. Példa alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{i(t_1 Y_1 + \dots + t_d Y_d)}) = \prod_{j=1}^d \mathbb{E}(e^{it_j Y_j}) = \prod_{j=1}^d e^{-t_j^2/2} = e^{-\|t\|^2/2}.$$

Ezért, ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ normális eloszlású, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, AY+m \rangle}) = e^{i\langle t, m \rangle} \mathbb{E}(e^{i\langle A^\top t, Y \rangle}) \\ &= e^{i\langle t, m \rangle} \varphi_Y(A^\top t) = e^{i\langle t, m \rangle} e^{-\|A^\top t\|^2/2} = \exp \left\{ i\langle t, m \rangle - \frac{1}{2} \langle AA^\top t, t \rangle \right\},\end{aligned}$$

tehát φ_X valóban a tételben szereplő alakú, ahol $D := AA^\top$ valóban szimmetrikus: $D^\top = (AA^\top)^\top = AA^\top = D$, és pozitív szemidefinit: tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\langle Dt, t \rangle = \langle AA^\top t, t \rangle = \langle A^\top t, A^\top t \rangle = \|A^\top t\|^2 \geq 0.$$

Továbbá $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(AY + m) = A \mathbb{E}(Y) + m = m$, és mivel $X - \mathbb{E}(X) \stackrel{\mathcal{D}}{=} AY$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^\top] = \mathbb{E}[(AY)(AY)^\top] \\ &= \mathbb{E}(AYY^\top A^\top) = A \mathbb{E}(YY^\top) A^\top = AA^\top = D.\end{aligned}$$

Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ olyan valószínűségi változó, melynek karakterisztikus függvénye a tételben megadott alakban áll elő, akkor a szimmetrikus mátrixok spektrális felbontása alapján létezik olyan $O \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ortogonális mátrix (azaz $O^{-1} = O^\top$), hogy $O^{-1}DO = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, ahol $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ olyan diagonális mátrix, melynek főátlójában a $\lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0$ számok állnak. Ezért $D = O \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) O^{-1} = OBB^\top O^\top$, ahol $B := \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$, így $D = AA^\top$ alakú, ahol $A := OB$. A bizonyítás első része alapján, ha $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású, akkor $AY + m$ karakterisztikus függvénye is a tételben megadott alakú, és így az egyértelműségi tétel (4.2. Tétel (vi) része) alapján $AY + m$ és X ugyanolyan eloszlású. Ezért definíció szerint X normális eloszlású.

Ha $Y = (Y_1, \dots, Y_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $Y_1, \dots, Y_d$ függetlenek és standard normális eloszlásúak, így Y is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye f_Y az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}f_Y(u) &= f_Y(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d f_{Y_i}(u_i) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_i^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d u_i^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{\|u\|^2}{2}}, \quad u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Nyilván $\det(D) = \det(A) \det(A^\top) = (\det(A))^2$, így D akkor és csak akkor invertálható, ha A invertálható. Továbbá, mivel D kovarianciamátrix, kapjuk, hogy D pozitív szemidefinit is, és így $\det(D) \geq 0$. Ezért, ha D invertálható, akkor $\det(D) > 0$ és $|\det(A)| > 0$.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy D invertálható. Ha $x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, $H := \{y \in \mathbb{R}^d : y_1 < x_1, \dots, y_d < x_d\}$ és X eloszlásfüggvényét F_X jelöli, akkor

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}(X_1 < x_1, \dots, X_d < x_d) = \mathbb{P}(X \in H) = \mathbb{P}(AY + m \in H) = \mathbb{P}(Y \in A^{-1}(H - m)) \\ &= \int_{A^{-1}(H-m)} f_Y(u) \, du = \int_{A^{-1}(H-m)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\|u\|^2/2} \, du \\ &= \int_H \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\det(A)|} e^{-\|A^{-1}(v-m)\|^2/2} \, dv,\end{aligned}$$

ahol az $u = A^{-1}(v - m)$ helyettesítést hajtottuk végre, melynek Jacobi-mátrixa A^{-1} , és $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. Továbbá, $(\det(D))^{\frac{1}{2}} = |\det(A)|$, és

$$\begin{aligned}\|A^{-1}(v - m)\|^2 &= \langle A^{-1}(v - m), A^{-1}(v - m) \rangle = \langle (A^{-1})^\top A^{-1}(v - m), v - m \rangle \\ &= \langle (AA^\top)^{-1}(v - m), v - m \rangle = \langle D^{-1}(v - m), v - m \rangle,\end{aligned}$$

így le lehet olvasni, hogy X -nek létezik sűrűségfüggvénye, mely a tételben adott alakú. $\square$

6.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **normális eloszlású** (m, D) **paraméterekkel**, ha X karakterisztikus függvénye a 6.3. Tételben adott alakú. Jelölése: $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(m, D)$.

6.5. Megjegyzés. Legyen ξ egy (1-dimenziós) standard normális eloszlású véletlen változó. Ekkor $(\xi, \xi)^\top$ 2-dimenziós normális eloszlású véletlen változó, de nem abszolút folytonos, mert

$$\mathbb{P} \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \right) = 1,$$

azonban az

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz 2-dimenziós Lebesgue-mértéke 0, és így ha $(\xi, \xi)^\top$ -nak létezne $f_{\xi, \xi}$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P} \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \in S \right) = \int_S f_{\xi, \xi}(x, y) \, dx dy = 0$$

lenne, mely ellentmondás. $\square$

Az alábbi következmény szerint tetszőleges normális eloszlású véletlen vektor lineáris transzformáltjai is normális eloszlású véletlen vektorok.

6.6. Következmény. Ha $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(m, D)$ d -dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, $a \in \mathbb{R}^\ell$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell \times d}$, akkor $a + BX \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(a + Bm, BDB^\top)$ ℓ -dimenziós normális eloszlású véletlen vektor.

Bizonyítás. Minden $t \in \mathbb{R}^\ell$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi_{a+BX}(t) &= \mathbb{E}(e^{i\langle t, a+BX \rangle}) = e^{i\langle t, a \rangle} \mathbb{E}(e^{i\langle B^\top t, X \rangle}) = e^{i\langle t, a \rangle} \varphi_X(B^\top t) \\ &= \exp \left\{ i\langle t, a \rangle + i\langle m, B^\top t \rangle - \frac{1}{2} \langle DB^\top t, B^\top t \rangle \right\} = \exp \left\{ i\langle a + Bm, t \rangle - \frac{1}{2} \langle BDB^\top t, t \rangle \right\},\end{aligned}$$

amiből következik az állítás, ugyanis $BDB^\top$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit is, mert

$$\langle BDB^\top t, t \rangle = \langle DB^\top t, B^\top t \rangle \geq 0,$$

hiszen D pozitív szemidefinit. $\square$

Az alábbi következmény karakterizálja a többdimenziós normális eloszlásokat.

6.7. Következmény. Egy $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha minden $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén a $c^\top X$ véletlen változó normális eloszlású.

Bizonyítás. Ha az X véletlen vektor normális eloszlású, akkor a 6.6. Következmény szerint tetszőleges $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén $c^\top X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(c^\top m, c^\top D c)$ normális eloszlású véletlen változó. Megfordítva tegyük fel, hogy $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -dimenziós valószínűségi vektorváltozó és tetszőleges $c \in \mathbb{R}^d$ esetén $c^\top X = \langle c, X \rangle$ normális eloszlású. Ekkor $\langle c, X \rangle$ karakterisztikus függvénye az $u \in \mathbb{R}$ helyen

$$\varphi_{\langle c, X \rangle}(u) = \mathbb{E}(e^{iu\langle c, X \rangle}) = \exp \left\{ i\langle c, \mathbb{E}(X) \rangle u - \frac{1}{2} \langle \text{Cov}(X)c, c \rangle u^2 \right\},$$

hiszen $\mathbb{E}(\langle c, X \rangle) = \langle c, \mathbb{E}(X) \rangle$, és a 3.39. Állítás alapján

$$\mathbb{D}^2(\langle c, X \rangle) = \mathbb{D}^2(c^\top X) = c^\top \text{Cov}(X)c = \langle \text{Cov}(X)c, c \rangle.$$

Így

$$\varphi_X(c) = \mathbb{E}(e^{i\langle c, X \rangle}) = \varphi_{\langle c, X \rangle}(1) = \exp \left\{ i\langle c, \mathbb{E}(X) \rangle - \frac{1}{2} \langle \text{Cov}(X)c, c \rangle \right\}, \quad c \in \mathbb{R}^d,$$

melyből a 6.3. Tétel alapján következik, hogy X d -dimenziós normális eloszlású. $\square$

6.8. Következmény. Legyen $(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_\ell)$ $d+\ell$ -dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, és tegyük fel, hogy bármely $i \in \{1, \dots, d\}$ és $j \in \{1, \dots, \ell\}$ esetén $\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$. Ekkor $(X_1, \dots, X_d)$ és $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ függetlenek.

Bizonyítás. A feltételek szerint $Z := (X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_\ell)$ szórásmátrixa

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{bmatrix}$$

alakú, ahol Σ_X és Σ_Y az $X := (X_1, \dots, X_d)$, illetve $Y := (Y_1, \dots, Y_\ell)$ szórásmátrixa. A Z várható érték vektora $m_Z = (m_X, m_Y)$ alakú, ahol m_X és m_Y az $(X_1, \dots, X_d)$, illetve $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ várható érték vektora. Így a 6.3. Tétel szerint Z karakterisztikus függvénye tetszőleges $t = (u, v)$ ($u \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^\ell$) pontban

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= \exp \left\{ i\langle m_Z, t \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_Z t, t \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ i\langle m_X, u \rangle + i\langle m_Y, v \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_X u, u \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_Y v, v \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ i\langle m_X, u \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_X u, u \rangle \right\} \exp \left\{ i\langle m_Y, v \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_Y v, v \rangle \right\} \\ &= \varphi_X(u) \varphi_Y(v), \end{aligned} \tag{6.1}$$

ahol az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}_d(m_X, \Sigma_X)$ és $Y \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}_\ell(m_Y, \Sigma_Y)$, és így a 6.3. Tétel alapján

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \exp \left\{ i \langle m_X, u \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_X u, u \rangle \right\}, & u \in \mathbb{R}^d, \\ \varphi_Y(v) &= \exp \left\{ i \langle m_Y, v \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_Y v, v \rangle \right\}, & v \in \mathbb{R}^\ell.\end{aligned}$$

Ez utóbbi állítások például ellenőrizhetők úgy, hogy a $B := [I_d \ 0] \in \mathbb{R}^{d \times (d+\ell)}$ választással a 6.6. Következmény szerint $X = BZ \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}_d(Bm_Z, B\Sigma_Z B^\top) = \mathcal{N}_d(m_X, \Sigma_X)$, a $B := [0 \ I_\ell] \in \mathbb{R}^{\ell \times (d+\ell)}$ választással pedig $Y = BZ \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}_\ell(Bm_Z, B\Sigma_Z B^\top) = \mathcal{N}_\ell(m_Y, \Sigma_Y)$. Végezetül, (6.1) és a 4.2. Tétel (vii) része alapján X és Y függetlenek. $\square$

6.9. Következmény. *Legyenek $X_1, \dots, X_d$ független, standard normális eloszlású véletlen változók, azaz $(X_1, \dots, X_d)$ d -dimenziós standard normális eloszlású. Az $a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$ és $b_1 X_1 + \dots + b_d X_d$ lineáris kombinációk akkor és csak akkor függetlenek, ha az $(a_1, \dots, a_d)$ és $(b_1, \dots, b_d)$ vektorok merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás. Az $(a_1 X_1 + \dots + a_d X_d, b_1 X_1 + \dots + b_d X_d)$ kétdimenziós véletlen vektor normális eloszlású, hiszen az $X := (X_1, \dots, X_d)^\top$ d -dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor lineáris transzformáltja:

$$(a_1 X_1 + \dots + a_d X_d, b_1 X_1 + \dots + b_d X_d)^\top = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_d \\ b_1 & \dots & b_d \end{bmatrix} X,$$

és alkalmazható a 6.6. Következmény. Így, felhasználva azt is, hogy független véletlen változók korrelálatlanok, a 6.8. Következmény szerint kapjuk, hogy az $a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$ és $b_1 X_1 + \dots + b_d X_d$ véletlen változók akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok. Az $a := (a_1, \dots, a_d)^\top$, $b := (b_1, \dots, b_d)^\top$ jelöléssel

$$a_1 X_1 + \dots + a_d X_d = a^\top X, \quad b_1 X_1 + \dots + b_d X_d = b^\top X,$$

és, felhasználva, hogy $\mathbb{E}(X) = 0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(a^\top X, b^\top X) &= \mathbb{E}[(a^\top X - \mathbb{E}(a^\top X))(b^\top X - \mathbb{E}(b^\top X))] \\ &= \mathbb{E}[(a^\top X - \mathbb{E}(a^\top X))(b^\top X - \mathbb{E}(b^\top X))^\top] \\ &= \mathbb{E}(a^\top X X^\top b) - \mathbb{E}(a^\top X) \mathbb{E}(X^\top b) - \mathbb{E}(a^\top X) \mathbb{E}(X^\top b) + \mathbb{E}(a^\top X) \mathbb{E}(X^\top b) \\ &= \mathbb{E}(a^\top X X^\top b) = a^\top \mathbb{E}(X X^\top) b = a^\top \text{Cov}(X) b = a^\top b = \langle a, b \rangle,\end{aligned}$$

hiszen $\text{Cov}(X)$ az egységmátrix. Így $a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$ és $b_1 X_1 + \dots + b_d X_d$ akkor és csak akkor függetlenek, ha $\langle a, b \rangle = 0$, azaz, ha az a és b vektorok merőlegesek egymásra. $\square$

6.10. Példa. Példát adunk egy olyan (ξ, η) 2-dimenziós valószínűségi vektorváltozóra, melynek koordinátái normális eloszlásúak, de (ξ, η) nem normális eloszlású.

Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega := [0, 1]$, $\mathcal{A}$ a $[0, 1]$ -beli Borel-halmazok σ -algebrája, $\mathbb{P}$ pedig a Lebesgue-mérték $[0, 1]$ -en. A ξ és η valószínűségi változókat értelmezzük a következőképpen: $\xi(x) := \Phi^{-1}(x)$, $x \in [0, 1]$, és

$$\eta(x) := \begin{cases} \Phi^{-1}(1-x) & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \Phi^{-1}(x-1/2) & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli. Mivel Φ szigorúan monoton növekvő így értelmes Φ^{-1} -ről beszélni. Megmutatjuk, hogy ξ és η is standard normális eloszlású, de (ξ, η) nem normális eloszlású.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\{y \in [0, 1] : \Phi^{-1}(y) < x\}) = \mathbb{P}(\{y \in [0, 1] : y < \Phi(x)\}) = \Phi(x),$$

így ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Továbbá

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\{y \in [0, 1] : \eta(y) < x\}) \\ &= \mathbb{P}(\{y \in [0, 1/2) : \eta(y) < x\}) + \mathbb{P}(\{y \in [1/2, 1] : \eta(y) < x\}) \\ &= \mathbb{P}(\{y \in [0, 1/2) : \Phi^{-1}(1-y) < x\}) + \mathbb{P}(\{y \in [1/2, 1] : \Phi^{-1}(y-1/2) < x\}) \\ &= \mathbb{P}(\{y \in [0, 1/2) : 1-y < \Phi(x)\}) + \mathbb{P}(\{y \in [1/2, 1] : y-1/2 < \Phi(x)\}) \\ &= \mathbb{P}(\{y \in [0, 1/2) : 1-\Phi(x) < y\}) + \mathbb{P}(\{y \in [1/2, 1] : y < \Phi(x)+1/2\}). \end{aligned}$$

Ha $x \geq 0$, úgy $\Phi(x) \geq 1/2$, és így

$$F_\eta(x) = \left(\frac{1}{2} - (1 - \Phi(x)) \right) + \frac{1}{2} = \Phi(x).$$

Ha pedig $x < 0$, úgy $\Phi(x) < 1/2$, és így

$$F_\eta(x) = 0 + \left(\Phi(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \Phi(x).$$

Összefoglalva, $F_\eta(x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, azaz η is standard normális eloszlású.

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}(\xi + \eta = 0) = 1/2$, amiből már következik, hogy (ξ, η) nem normális eloszlású. Ugyanis, ha (ξ, η) normális eloszlású lenne, akkor $\xi + \eta$ is, és így $\mathbb{P}(\xi + \eta = 0) = 0$ lenne. Jelen esetben

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi + \eta = 0) &= \mathbb{P}(y \in [0, 1/2) : \xi(y) + \eta(y) = 0) + \mathbb{P}(y \in [1/2, 1] : \xi(y) + \eta(y) = 0) \\ &= \mathbb{P}(y \in [0, 1/2) : \xi(y) + \xi(1-y) = 0) + \mathbb{P}(y \in [1/2, 1] : \xi(y) + \xi(y-1/2) = 0) \\ &= \mathbb{P}(y \in [0, 1/2) : \Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(1-y) = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(y \in [1/2, 1] : \Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(y-1/2) = 0). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\Phi^{-1}(y) = -\Phi^{-1}(1-y) \iff y = \Phi(-\Phi^{-1}(1-y)) = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-y)) = 1 - (1-y) = y,$$

és azt, hogy

$$\Phi^{-1}(y) = -\Phi^{-1}(y-1/2) \iff y = 1 - (y-1/2) = 3/2 - y,$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\xi + \eta = 0) = \mathbb{P}(y \in [0, 1/2] : y = y) + P(y \in [1/2, 1] : 2y = 3/2) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

□

7. Véletlen vektorok sorozatának konvergenciafajtái

7.1. Definíció. Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok. Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \dots$ sorozat X -hez konvergál

- **majdnem biztosan** (jelölése $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ vagy $X_n \rightarrow X$ $\mathbb{P}$ -m.b. vagy $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$), ha

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1;$$

- **sztochasztikusan** (jelölése $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ vagy $X_n \xrightarrow{st} X$), ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) = 0;$$

- **eloszlásban** (jelölése $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

minden olyan $x \in \mathbb{R}^d$ pontban, ahol F_X folytonos;

- **r -edik momentumban (L^r -ben)**, ahol $r > 0$ (jelölése $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ vagy $X_n \xrightarrow{L^r} X$), ha

$$\mathbb{E}(\|X\|^r) < \infty, \quad \mathbb{E}(\|X_n\|^r) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) = 0.$$

A majdnem biztos, sztochasztikus és r -edik momentumbeli konvergenciák kapcsolatáról szól a következő tétel.

7.2. Tétel. Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.

- (i) Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, vagy valamely $r > 0$ esetén $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
- (ii) Ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ valamely $r > 0$ esetén, akkor tetszőleges $s \in (0, r)$ esetén $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_s} X$.

Bizonyítás. (i). Egy $\mathbb{R}^d$ -beli sorozat konvergenciájának definíciója szerint:

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X & \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \\ \forall \varepsilon > 0 & \quad \text{esetén} \quad \mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}) = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Valóban,

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} &= \bigcap_{\varepsilon \in (0, \infty)} \{\omega \in \Omega : \|X_k(\omega) - X(\omega)\| > \varepsilon \text{ véges sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}\} \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \|X_k(\omega) - X(\omega)\| > \frac{1}{m} \text{ véges sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}\}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \|X_k(\omega) - X(\omega)\| > \frac{1}{m} \text{ véges sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}\}\right) = 1 \\ \iff & \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ esetén } \mathbb{P}\left(\|X_k - X\| > \frac{1}{m} \text{ véges sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}\right) = 1 \\ \iff & \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty) \text{ esetén } \mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ véges sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}) = 1 \\ \iff & \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty) \text{ esetén } \mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}) = 0, \end{aligned}$$

bizonyítva ezzel (7.1)-et. A fentiekben szereplő első ekvivalenciánál azt használtuk fel, hogy $A_m \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}$, események esetén $\mathbb{P}(A_m) = 1$, $m \in \mathbb{N}$, akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{P}(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m) = 1$. Valóban, ha $\mathbb{P}(A_m) = 1$, $m \in \mathbb{N}$, akkor ez a valószínűség folytonosságából (1.5. Állítás (v) része) és abból következik, hogy ha $A, B \in \mathcal{A}$ olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, akkor $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. Megfordítva, ha $\mathbb{P}(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m) = 1$, akkor peddig abból, hogy $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Továbbá, tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\|X_n - X\| > \varepsilon\} \subset A_n(\varepsilon) := \left\{ \sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| > \varepsilon \right\} = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\|X_k - X\| > \varepsilon\}. \quad (7.2)$$

Mivel $\sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n+1\}} \|X_k - X\| \leq \sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\|$, $n \in \mathbb{N}$, adódik, hogy $A_n(\varepsilon) \downarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)$, ha $n \rightarrow \infty$, így újra a valószínűség folytonosságát használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) & \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \{\|X_k - X\| > \varepsilon\}\right) \\ & = \mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}) \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$. A valószínűség monotinitása és (7.2) alapján, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) \\ & = \mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}). \end{aligned}$$

Ezért, ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, akkor (7.1)-et is használva, kapjuk, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) = 0$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, melyből adódik, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

A Markov-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$0 \leq \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\|X_n - X\|^r > \varepsilon^r) \leq \frac{\mathbb{E}(\|X_n - X\|^r)}{\varepsilon^r}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tehát, ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

(ii). A Ljapunov-egyenlőtlenség (3.7. Tétel (xvii) része) szerint tetszőleges $s \in (0, r)$ esetén

$$\mathbb{E}(\|X_n\|^s) \leq [\mathbb{E}(\|X_n\|^r)]^{\frac{s}{r}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(\|X\|^s) \leq [\mathbb{E}(\|X\|^r)]^{\frac{s}{r}},$$

és

$$0 \leq \mathbb{E}(\|X_n - X\|^s) \leq [\mathbb{E}(\|X_n - X\|^r)]^{\frac{s}{r}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tehát, ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_s} X$. $\square$

A sztochasztikus konvergencia határértékének egyértelműségéről szól a következő tétel.

7.3. Tétel. *Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok úgy, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, és $X_n = Y_n$ $\mathbb{P}$ -m.b. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $X = Y$ $\mathbb{P}$ -m.b. Speciálisan, ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$ és $X_n = Y_n$ $\mathbb{P}$ -m.b. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $X = Y$ $\mathbb{P}$ -m.b.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\|X_n - X\| \leq \varepsilon\} \cap \{\|Y_n - Y\| \leq \varepsilon\} \cap \{X_n = Y_n\} \subset \{\|X - Y\| \leq 2\varepsilon\},$$

hiszen

$$\|X - Y\| = \|(X - X_n) + (X_n - Y_n) + (Y_n - Y)\| \leq \|X_n - X\| + \|X_n - Y_n\| + \|Y_n - Y\|.$$

Így

$$\{\|X - Y\| > 2\varepsilon\} \subset \{\|X_n - X\| > \varepsilon\} \cup \{\|Y_n - Y\| > \varepsilon\} \cup \{X_n \neq Y_n\}.$$

Mivel $\mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, így

$$\mathbb{P}(\|X - Y\| > 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) + \mathbb{P}(\|Y_n - Y\| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbb{P}(\|X - Y\| > 2\varepsilon) = 0$. Felhasználva, hogy

$$\{\|X - Y\| > 0\} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \|X - Y\| > \frac{1}{\ell} \right\}$$

és

$$\left\{ \|X - Y\| > \frac{1}{n} \right\} \uparrow \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \|X - Y\| > \frac{1}{\ell} \right\} \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

a valószínűség folytonossága (1.5. Állítás (v) része) szerint kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\|X - Y\| > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\|X - Y\| > \frac{1}{n}\right) = 0,$$

vagyis $\mathbb{P}(\|X - Y\| = 0) = 1$. $\square$

Az alábbi tétel a sztochasztikus konvergencia egy ekvivalens átfogalmazásáról szól.

7.4. Tétel. *Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok. Az X_n , $n \in \mathbb{N}$, sorozat akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan valamilyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorhoz, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{m \in \mathbb{N} : m > n\}} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, ahol $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy véletlen vektor. Ekkor bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) < \varepsilon$, ha $n \geq n_0(\varepsilon)$. Így minden $m > n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(\|X_m - X\| + \|X - X_n\| > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(\{\|X_m - X\| > \varepsilon/2\} \cup \{\|X - X_n\| > \varepsilon/2\}) \\ &\leq \mathbb{P}(\|X_m - X\| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(\|X - X_n\| > \varepsilon/2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Így, ha $n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$, akkor $\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m > n\}} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) \leq \varepsilon$, amiből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{m \in \mathbb{N}: m > n\}} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) = 0.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{m \in \mathbb{N}: m > n\}} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) = 0$, mely írható $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\{n \in \mathbb{N}: n > m\}} \mathbb{P}(\|X_n - X_m\| > \varepsilon) = 0$ alakban is. Így bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mathbb{P}(\|X_n - X_m\| > 2^{-k}) < 2^{-k}, \quad \text{ha } n > m \geq m_k.$$

Legyen $n_1 := m_1$, és $n_{i+1} := \max(n_i + 1, m_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$, továbbá

$$X'_k := X_{n_k}, \quad \text{és} \quad A_k := \{\|X'_{k+1} - X'_k\| > 2^{-k}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| > 2^{-k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty,$$

így a Borel–Cantelli lemma alapján létezik olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény, hogy $\mathbb{P}(A) = 0$ és minden $\omega \in \Omega \setminus A$ esetén létezik olyan $k_0(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy

$$\|X'_{k+1}(\omega) - X'_k(\omega)\| \leq 2^{-k}, \quad k \geq k_0(\omega).$$

Ezért bármilyen $\omega \in \Omega \setminus A$ és $n \geq k_0(\omega)$ esetén

$$\begin{aligned} \sup_{\{m \in \mathbb{N}: m > n\}} \|X'_m(\omega) - X'_n(\omega)\| &\leq \sup_{\{m \in \mathbb{N}: m > n\}} \sum_{k=n}^{m-1} \|X'_{k+1}(\omega) - X'_k(\omega)\| \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \|X'_{k+1}(\omega) - X'_k(\omega)\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha $n \rightarrow \infty$. Felhasználva, hogy egy $\mathbb{R}^d$ -beli Cauchy-sorozat konvergens, kapjuk, hogy ha $\omega \in \Omega \setminus A$, akkor létezik a $\lim_{k \rightarrow \infty} X'_k(\omega) \in \mathbb{R}$ határérték, ahol $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1$. Legyen

$$X(\omega) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} X'_k(\omega) & \text{ha } \omega \in \Omega \setminus A, \\ 0 & \text{ha } \omega \notin \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Ekkor X véletlen vektor, és az előzőek alapján $X'_k(\omega) = X_{n_k}(\omega) \rightarrow X(\omega)$, ha $k \rightarrow \infty$ minden $\omega \in \Omega \setminus A$ esetén, azaz $X_{n_k} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, ha $k \rightarrow \infty$. A 7.2. Tétel (i) része alapján ekkor $X_{n_k} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, ha $k \rightarrow \infty$, is teljesül. Így bármilyen $\varepsilon > 0$ és $\ell \in \mathbb{N}$ esetén,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|X_\ell - X\| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(\|X_\ell - X_{n_k}\| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(\|X_{n_k} - X\| > \varepsilon/2) \\ &\leq \sup_{\{\tilde{\ell} \in \mathbb{N}: \tilde{\ell} > n_k\}} \mathbb{P}(\|X_{\tilde{\ell}} - X_{n_k}\| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(\|X_{n_k} - X\| > \varepsilon/2), \end{aligned}$$

ahol $n_k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n_k < \ell \leq n_{k+1}$ (ilyen n_k létezik, mert n_i , $i \in \mathbb{N}$, szigorúan monoton növekvően tart ∞ -be, amint $i \rightarrow \infty$). Mivel $\ell \rightarrow \infty$ esetén $n_k \rightarrow \infty$, felhasználva a feltételt is, kapjuk, hogy $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_\ell - X\| > \varepsilon) = 0$. Végezetül megjegyezzük, hogy a fenti bizonyítás egyfajta konstrukciót is szolgáltat az $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorra. $\square$

7.5. Állítás. Legyenek $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók. Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$, és $\mathbb{P}(0 \leq X_{n+1} \leq X_n) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Felhasználva, hogy megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(0 \leq X_{n+1} \leq X_n, \forall n \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{0 \leq X_{n+1} \leq X_n\}\right) = 1.$$

Így $X_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat $\mathbb{P}$ -majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, és ezért

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Mivel $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$. Legyen a továbbiakban $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor, felhasználva, hogy egy alulról korlátos (valós értékű) monoton csökkenő sorozat határértéke nem más, mint az infimuma, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) > \varepsilon\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) > \varepsilon\right\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n(\omega) > \varepsilon\}\right\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}(X_m > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_m| > \varepsilon), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Mivel

$$\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) > 0\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) > 1/k\right\},$$

a valószínűség folytonossága alapján, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) > 0\right\}\right) = 0. \quad (7.3)$$

Mivel $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\}) = 1$ és $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}) = 1$, felhasználva, hogy két 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \geq 0\right\}\right) = 1.$$

Így (7.3) alapján, adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0\right\}\right) = 1.$$

Megjegyezzük, hogy a 7.3. Tételt felhasználva a bizonyítást egyszerűbben is befejezhetjük. Mivel $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \inf_{m \in \mathbb{N}} X_m$ és $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, a 7.3. Tétel alapján $\inf_{m \in \mathbb{N}} X_m = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., és így $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$. $\square$

A majdnem biztos és sztochasztikus konvergencia további kapcsolatairól szól a következő tétel.

7.6. Tétel. *Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.*

(i) *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

$$(a) \quad X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X, \text{ amint } n \rightarrow \infty,$$

$$(b) \quad \sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \text{ amint } n \rightarrow \infty, \text{ azaz}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| > \varepsilon\right) = 0,$$

$$(c) \quad \sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \text{ amint } n \rightarrow \infty.$$

(ii) *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

$$(a) \quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ majdnem biztosan konvergál valamely } d\text{-dimenziós véletlen vektorhoz,}$$

$$(b) \quad \sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X_n\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \text{ amint } n \rightarrow \infty, \text{ azaz}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X_n\| > \varepsilon\right) = 0,$$

$$(c) \quad \sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X_n\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \text{ amint } n \rightarrow \infty.$$

(iii) *Ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_k - X\| \geq \varepsilon) < \infty$, akkor $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$.*

- (iv) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor és csak akkor, ha pozitív egészek bármely $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozata, hogy $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $i \rightarrow \infty$.
 Speciálisan, ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor létezik olyan $n_1 < n_2 < \dots$ részsorozat, hogy $X_{n_\ell} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $\ell \rightarrow \infty$ (Riesz-féle kiválasztási tétel).

Bizonyítás. (i). (a) $\iff$ (b): A 7.2. Tétel (i) részének bizonyítása során beláttuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X\| > \varepsilon \right) \rightarrow \mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}),$$

ha $n \rightarrow \infty$, amiből (7.1) alapján következik, hogy (a) $\iff$ (b).

(i). (c) $\implies$ (b): A 7.2. Tétel (i) részéből következik.

(i). (b) $\implies$ (c): A $\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X\|$, $n \in \mathbb{N}$, nemnegatív véletlen változók monoton csökkenő sorozata, mely sztochasztikusan konvergál 0-hoz, amint $n \rightarrow \infty$. Így a 7.5. Állítás alapján kapjuk a (c) rész állítását.

(ii). (a) $\iff$ (c): A (7.1) bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergens}) &= 1 \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \\ \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \mathbb{P} \left(\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Valóban, felhasználva, hogy $\mathbb{R}^d$ teljes, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergens}\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon \in (0, \infty)} \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|X_k(\omega) - X_n(\omega)\| \leq \varepsilon, \text{ ha } k > N \text{ és } n > N\} \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|X_k(\omega) - X_n(\omega)\| \leq \frac{1}{m}, \text{ ha } k > N \text{ és } n > N\}, \end{aligned}$$

és a valószínűség folytonossága alapján

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|X_k(\omega) - X_n(\omega)\| \leq \frac{1}{m}, \text{ ha } k > N \text{ és } n > N\} \right) = 1 \\ &\iff \forall m \in \mathbb{N} \text{ esetén } \mathbb{P} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \{\|X_k - X_n\| \leq \frac{1}{m}, \text{ ha } k > N \text{ és } n > N\} \right) = 1 \\ &\iff \forall \varepsilon \in (0, \infty) \text{ esetén } \mathbb{P} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \{\|X_k - X_n\| \leq \varepsilon, \text{ ha } k > N \text{ és } n > N\} \right) = 1 \\ &\iff \forall \varepsilon \in (0, \infty) \text{ esetén} \\ &\mathbb{P} \left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \{\|X_k - X_n\| > \varepsilon \text{ valamely } (k, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}) \text{ esetén}\} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, \infty)$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\forall N \in \mathbb{N} \exists (k_N, n_N) \in (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}) : \|X_{\max(k_N, n_N)} - X_{\min(k_N, n_N)}\| > \varepsilon\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, \infty) \text{ esetén } \mathbb{P}\left(\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén}\right) = 0,$$

bizonyítva ezzel (7.4)-t. A (7.1) formula alapján, tetszőleges Y_n , $n \in \mathbb{N}$, és Y (valós értékű) véletlen változók esetén

$$Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y \quad \text{akkor és csak akkor, ha}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén}) = 0.$$

Ezt alkalmazva az $Y_n := \sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, és $Y := 0$ választásokkal, kapjuk, hogy

$$\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \text{ amint } n \rightarrow \infty$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \mathbb{P}\left(\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén}\right) = 0.$$

Így (7.4) alapján adódik, hogy (a) $\Longleftrightarrow$ (c).

Megjegyezzük, hogy az (a) $\implies$ (c) implikációt egyszerűbben is levezethetjük. Valóban, ha $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ amint $n \rightarrow \infty$ valamely X d -dimenziós véletlen változó esetén, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén kapjuk, hogy

$$\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| \leq \sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X\| + \sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X - X_n\| = \sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X\| + \|X - X_n\|,$$

ahol az (i) rész (a) $\Longleftrightarrow$ (c) ekvivalenciája alapján $\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X\| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ ha $n \rightarrow \infty$.

(ii). (c) $\implies$ (b): A 7.2. Tétel (i) részéből következik.

(ii). (b) $\implies$ (a): Tegyük fel, hogy $\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X_n\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X_n\| > \varepsilon\right), \quad \forall m \geq n.$$

Így minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X_n\| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Ezért a 7.4. Tétel szerint létezik olyan $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Így minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X\| > \varepsilon\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X_n\| > \varepsilon/2\right) + \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon/2) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ahol a (b) feltételt is használtuk újra. Ezért

$$\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

és így az (i) rész (a) $\iff$ (b) ekvivalenciája alapján $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $n \rightarrow \infty$, azaz kapjuk az (a) rész állítását.

A fentiekből a (ii)-beli (a) $\implies$ (b) implikáció azonnal következik, ugyanis (a) $\implies$ (c) $\implies$ (b). Megjegyezzük, hogy (a)-ból közvetlenül is levezethetjük (b)-t. Valóban, tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy véletlen vektor. Ekkor az (i) rész (a) $\iff$ (b) ekvivalenciája alapján kapjuk, hogy $\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ha $n \rightarrow \infty$, melyből az is következik, hogy $\|X_n - X\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X_n\| > \varepsilon \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\sup_{\{m \in \mathbb{N}: m \geq n\}} \|X_m - X\| > \varepsilon/2 \right) + \mathbb{P}(\|X - X_n\| > \varepsilon/2) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(iii). Mivel egy konvergens sor általános tagja nullához konvergál, kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, azaz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. A tétel állításában szereplő ennél erősebb $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ konvergencia (7.1) alapján következik a Borel–Cantelli-lemma első részéből, ugyanis a feltétel alapján, a Borel–Cantelli lemma szerint $\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} \{\|X_k - X\| > \varepsilon\}) = 0$, $\varepsilon > 0$, azaz $\mathbb{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon$ végtelen sok $k \in \mathbb{N}$ esetén) $= 0$, $\varepsilon > 0$.

(iv). Tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, amint $n \rightarrow \infty$, és tekintsük pozitív egészek tetszőleges $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatát. A sztochasztikus konvergencia definíciója szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számokhoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) \leq \delta$ bármely $n \geq n_0$ esetén. Ezért tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ számhoz van olyan $k_i \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mathbb{P} \left(\|X_k - X\| \geq \frac{1}{i} \right) \leq \frac{1}{2^i} \quad \text{bármely } k \geq k_i \text{ esetén.}$$

Mivel $n_k \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P} \left(\|X_{n_k} - X\| \geq \frac{1}{i} \right) \leq \frac{1}{2^i} \quad \text{bármely } k \geq k_i \text{ esetén,}$$

és speciálisan $\mathbb{P}(\|X_{n_{k_i}} - X\| \geq \frac{1}{i}) \leq \frac{1}{2^i}$, $i \in \mathbb{N}$. Tehát az $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozatra teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\|X_{n_{k_i}} - X\| \geq \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty,$$

így a Borel–Cantelli-lemma első része szerint a $\left\{ \|X_{n_{k_i}} - X\| \geq \frac{1}{i} \right\}$, $i \in \mathbb{N}$, események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be, azaz 1 valószínűséggel véges sok $i \in \mathbb{N}$ index kivételével $\|X_{n_{k_i}} - X\| < \frac{1}{i}$, ezért $\|X_{n_{k_i}} - X\| \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, amint $i \rightarrow \infty$, amiből $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $i \rightarrow \infty$.

Megfordítva, indirekt módon tegyük fel, hogy pozitív egészek bármely $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozata, hogy $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $i \rightarrow \infty$, de $X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} X$, amint $n \rightarrow \infty$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) \not\rightarrow 0$, melyből következik, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) > 0$. Így megadható olyan $\varepsilon_0 > 0$ és pozitív egészek olyan $n_1 < n_2 < \dots$ sorozata, hogy $\mathbb{P}(\|X_{n_k} - X\| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon_0$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért a szóban forgó $n_1 < n_2 < \dots$ sorozat tetszőleges $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozata esetén $X_{n_{k_i}} \not\xrightarrow{\mathbb{P}} X$ amint $i \rightarrow \infty$, így a 7.2. Tétel (i) része alapján $X_{n_{k_i}} \not\xrightarrow{\text{m.b.}} X$ amint $i \rightarrow \infty$, mely ellentmondás, ugyanis az indirekt feltevés alapján az $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatnak kellene lennie legalább egy olyan részsorozatának, mely mentén 1-valószínűséggel konvergál X -hez. $\square$

Véletlen vektorok folytonos függvényének majdnem biztos és sztochasztikus konvergenciájáról szól a következő tétel.

7.7. Tétel. *Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, és $Y_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok és $g: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ folytonos függvény.*

(i) *Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$, akkor $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$.*

(ii) *Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, akkor $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X, Y)$.*

Bizonyítás. Először végiggondoljuk, hogy $g(X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, és $g(X, Y)$ véletlen változók. Az 1.22. Állítás alapján (X_n, Y_n) , $n \in \mathbb{N}$, és (X, Y) $\mathbb{R}^{2d}$ -beli értékű véletlen változók. Mivel g folytonos, így mérhető is, ezért az 1.18. Állítás (i) része szerint $g(X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, és $g(X, Y)$ véletlen változók.

(i). Tekintsük az

$$\Omega_1 := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} \in \mathcal{A}, \quad \Omega_2 := \{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

eseményeket. Mivel $g(X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, és $g(X, Y)$ véletlen változók, a mértékelméletből tanultak alapján (az 1.18. Állítás bizonyításában egy hasonló részt részleteztünk)

$$\{\omega \in \Omega : g(X_n(\omega), Y_n(\omega)) \rightarrow g(X(\omega), Y(\omega))\} \in \mathcal{A},$$

így beszélhetünk a $\mathbb{P}(g(X_n, Y_n) \rightarrow g(X, Y))$ valószínűségről. Továbbá, mivel g folytonos, kapjuk, hogy

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \{\omega \in \Omega : g(X_n(\omega), Y_n(\omega)) \rightarrow g(X(\omega), Y(\omega))\}.$$

A feltétel szerint $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1 = \mathbb{P}(\Omega_2)$, amiből $\mathbb{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$, ezért $\mathbb{P}(g(X_n, Y_n) \rightarrow g(X, Y)) = 1$.

(ii). Legyen $n_1 < n_2 < \dots$ pozitív egészek tetszőleges sorozata. Az $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ konvergencia alapján a 7.6. Tétel (iv) pontja szerint van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozat, hogy $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ amint $i \rightarrow \infty$. Az $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ konvergencia alapján megint a 7.6. Tétel (iv) pontja szerint ennek a részsorozatnak van olyan $n_{k_{i_1}} < n_{k_{i_2}} < \dots$ részsorozata, hogy $Y_{n_{k_{i_j}}} \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$ amint $j \rightarrow \infty$. Felhasználva, hogy nyilván $X_{n_{k_{i_j}}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ amint $j \rightarrow \infty$, az (i) pont szerint kapjuk, hogy

$g(X_{n_{k_{i_j}}}, Y_{n_{k_{i_j}}}) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$ amint $j \rightarrow \infty$. Összefoglalva: pozitív egészek tetszőleges $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_{i_1}} < n_{k_{i_2}} < \dots$ részsorozata, hogy $g(X_{n_{k_{i_j}}}, Y_{n_{k_{i_j}}}) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$ amint $j \rightarrow \infty$, ezért újra a 7.6. Tétel (iv) pontja szerint $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X, Y)$. $\square$

A konvergencia és műveletek kapcsolatáról szól a következő tétel.

7.8. Tétel. Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, és $Y_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.

- (i) Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X + Y$ és $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\text{m.b.}} \langle X, Y \rangle$.
- (ii) Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$ és $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, Y \rangle$.
- (iii) Ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ és $Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} Y$ valamely $r > 0$ esetén, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X + Y$.

Bizonyítás. Mivel az $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}^d$ és $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ függvények folytonosak, így (i) és (ii) következik a 7.7. Tétel (i) és (ii) részeiből. Az

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ \langle x, y \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

folytonos függvényre alkalmazva a 7.7. Tétel (ii) részét azt is kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} X_n + Y_n \\ \langle X_n, Y_n \rangle \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} X + Y \\ \langle X, Y \rangle \end{pmatrix}.$$

(iii). Felhasználva, hogy tetszőleges $r > 0$ és $a, b \geq 0$ esetén $(a+b)^r \leq (2 \max(a, b))^r \leq 2^r (a^r + b^r)$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\|X_n + Y_n\|^r) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\|X + Y\|^r) < \infty$, és

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|(X_n + Y_n) - (X + Y)\|^r) &= \mathbb{E}(\|(X_n - X) + (Y_n - Y)\|^r) \\ &\leq \mathbb{E}((\|X_n - X\| + \|Y_n - Y\|)^r) \\ &\leq 2^r \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) + 2^r \mathbb{E}(\|Y_n - Y\|^r) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$. $\square$

7.9. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Azt mondjuk, hogy az $\{X_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok **egyenletesen integrálhatók**, ha

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) = 0.$$

Ha az $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor integrálható (azaz $\mathbb{E}(\|X\|) < \infty$), akkor a majoráns konvergenciatétel alapján $\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X\| \mathbb{1}_{\{\|X\| > K\}}) = 0$, tehát ekkor az X véletlen vektor

egyenletesen integrálható. Fordítva, ha az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ vektor egyenletesen integrálható, akkor $\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X\| \mathbb{1}_{\{\|X\| > K\}}) = 0$ alapján van olyan $K_0 > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X\| \mathbb{1}_{\{\|X\| > K_0\}}) < \infty$, ezért

$$\mathbb{E}(\|X\|) = \mathbb{E}(\|X\| \mathbb{1}_{\{\|X\| \leq K_0\}}) + \mathbb{E}(\|X\| \mathbb{1}_{\{\|X\| > K_0\}}) \leq K_0 + \mathbb{E}(\|X\| \mathbb{1}_{\{\|X\| > K_0\}}) < \infty,$$

tehát az X véletlen vektor integrálható. Mindezek miatt, ha X_γ , $\gamma \in \Gamma$, azonos eloszlásúak és integrálhatóak, akkor $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ egyenletesen integrálható. Speciálisan, ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlású integrálható véletlen vektorok sorozata, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres véges halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletes integrálhatósága azzal ekvivalens, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) < \infty$. Végtelen számosságú Γ halmaz esetén a következő tétel szolgáltat szükséges és elégséges feltételt.

7.10. Tétel. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok akkor és csak akkor egyenletesen integrálhatók, ha*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) < \infty \quad (7.5)$$

és

$$\lim_{\mathbb{P}(A) \rightarrow 0} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) = 0, \quad (7.6)$$

amit úgy értünk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta$.

Bizonyítás. Ha $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ egyenletesen integrálhatók, akkor van olyan $K_0 > 0$, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K_0\}}) < \infty$, ezért

$$\begin{aligned} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) &= \sup_{\gamma \in \Gamma} (\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| \leq K_0\}}) + \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K_0\}})) \\ &\leq K_0 + \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K_0\}}) < \infty, \end{aligned}$$

tehát teljesül (7.5). Továbbá tetszőleges $\gamma \in \Gamma$, $A \in \mathcal{A}$ és $K > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{A \cap \{\|X_\gamma\| > K\}}) + \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{A \cap \{\|X_\gamma\| \leq K\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) + K \mathbb{P}(A). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatósága miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $K_0 > 0$, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K_0\}}) < \frac{\varepsilon}{2}$, így ha $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, hogy $\mathbb{P}(A) < \frac{\varepsilon}{2K_0} (=:\delta)$, akkor $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén, tehát teljesül (7.6).

Fordítva: tegyük fel, hogy teljesülnek a (7.5) és (7.6) feltételek. A (7.6) feltétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden

olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta$. Ezt $\{\|X_\gamma\| > K\}$, $K > 0$ alakú eseményekre szeretnénk alkalmazni. A Markov-egyenlőtlenséggel

$$\mathbb{P}(\|X_\gamma\| > K) \leq \frac{\mathbb{E}(\|X_\gamma\|)}{K} \leq \frac{\sup_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_{\tilde{\gamma}}\|)}{K}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

ahol $\sup_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_{\tilde{\gamma}}\|) < \infty$ a (7.5) feltétel szerint, tehát ha $K > \frac{\sup_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_{\tilde{\gamma}}\|)}{\delta}$, akkor $\mathbb{P}(\|X_\gamma\| > K) < \delta$, $\gamma \in \Gamma$. Összefoglalva, azt kaptuk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és $K > \frac{\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|)}{\delta}$ esetén, azaz $\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) = 0$. $\square$

Megjegyezzük, hogy ha Γ véges és (7.5) teljesül, akkor (7.6) is fennáll (mely összhangban van a 7.10. Tétel előtt írottakkal). Valóban, a dominált konvergenciatétel és Γ végessége miatt, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K_0 > 0$, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K_0\}}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Így, ha $A \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\mathbb{P}(A) < \frac{\varepsilon}{2K_0} (= \delta)$, akkor (7.7) alapján $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén.

A következő tétel elégséges feltételeket tartalmaz az egyenletes integrálhatóságra.

7.11. Tétel. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok.*

- (i) *Ha létezik olyan $r > 1$, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|^r) < \infty$, akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók.*
- (ii) *Ha az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ és $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók, akkor az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok is egyenletesen integrálhatók.*
- (iii) *Ha az $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\|X_\gamma\| \leq \|Y_\gamma\|$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok is egyenletesen integrálhatók.*

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $\gamma \in \Gamma$, $K > 0$ és $\omega \in \Omega$ esetén

$$\|X_\gamma(\omega)\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}(\omega) \leq \|X_\gamma(\omega)\| \left(\frac{\|X_\gamma(\omega)\|}{K} \right)^{r-1} \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}(\omega) \leq \frac{\|X_\gamma(\omega)\|^r}{K^{r-1}},$$

így

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) \leq \frac{1}{K^{r-1}} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|^r) \rightarrow 0,$$

amint $K \rightarrow \infty$, tehát az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók.

(ii). Elegendő megmutatni, hogy a 7.10. Tétel (7.5) és (7.6) feltételei teljesülnek az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorokra.

A 7.10. Tétel szerint $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) < \infty$ és $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|Y_\gamma\|) < \infty$, így

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma + Y_\gamma\|) \leq \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) + \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|Y_\gamma\|) < \infty,$$

tehát a 7.10. Tétel (7.5) feltétele teljesül az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorokra.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén újra a 7.10. Tételt alkalmazva léteznek olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$ számok, hogy $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon/2$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta_1$, és $\mathbb{E}(\|Y_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon/2$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta_2$. Ezért $\mathbb{E}(\|X_\gamma + Y_\gamma\| \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(\|Y_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tehát a 7.10. Tétel (7.6) feltétele is teljesül az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorokra.

(iii). Tetszőleges $\gamma \in \Gamma$ és $K > 0$ esetén $\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}} \leq \|Y_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|Y_\gamma\| > K\}}$ $\mathbb{P}$ -m.b., ezért

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) \leq \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|Y_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|Y_\gamma\| > K\}}) \rightarrow 0$$

amint $K \rightarrow \infty$, tehát az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók. $\square$

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad az r -edik momentumbeli konvergenciára.

7.12. Tétel. (Momentum konvergenciatétel, Vitali konvergenciatétel) *Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, és $r > 0$. Ekkor $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ akkor és csak akkor, ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és a $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$. Ekkor a definíció folytán $\|X_n\|^r$, $n \in \mathbb{N}$, és $\|X\|^r$ integrálhatóak. A 7.2. Tétel (i) pontja szerint ekkor $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Felhasználva, hogy tetszőleges $a, b \geq 0$ és $r > 0$ esetén $(a+b)^r \leq (2 \max(a, b))^r \leq 2^r(a^r + b^r)$, kapjuk, hogy tetszőleges $K > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}) &= \mathbb{E}(\|X_n \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r) \\ &= \mathbb{E}(\|(X_n - X) \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}} + X \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left(\|(X_n - X) \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\| + \|X \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|\right)^r\right) \\ &\leq 2^r \mathbb{E}\left(\|(X_n - X) \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r\right) + 2^r \mathbb{E}\left(\|X \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r\right) \\ &= 2^r \mathbb{E}\left(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) + 2^r \mathbb{E}\left(\|X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) \\ &\leq 2^r \mathbb{E}\left(\|X_n - X\|^r\right) + 2^r \mathbb{E}\left(\|X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right). \end{aligned}$$

Mivel $\|X\|^r$ integrálható, ezért egyenletesen integrálható (lásd a 7.9. Definíció utáni részt), így a 7.10. Tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X\|^r \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta$. Ezt $\{\|X_n\|^r > K\}$, $n \in \mathbb{N}$, $K > 0$ alakú eseményekre szeretnénk alkalmazni. Mivel

$$\{\|X_n\|^r > K\} = \{\|X_n\| > K^{\frac{1}{r}}\} \subset \{\|X_n - X\| > K^{\frac{1}{r}}/2\} \cup \{\|X\| > K^{\frac{1}{r}}/2\},$$

ezért

$$\mathbb{P}(\|X_n\|^r > K) \leq \mathbb{P}(\|X_n - X\| > K^{\frac{1}{r}}/2) + \mathbb{P}(\|X\| > K^{\frac{1}{r}}/2). \quad (7.8)$$

A mérték folytonossága miatt van olyan $K_1 > 0$, hogy $\mathbb{P}(\|X\| > K_1^{\frac{1}{r}}/2) < \delta/2$ minden $K \geq K_1$ esetén. Az $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ konvergencia miatt van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > K_1^{\frac{1}{r}}/2) < \delta/2$ minden $n \geq n_1$ esetén, így $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > K_1^{\frac{1}{r}}/2) < \delta/2$ minden $K \geq K_1$ és $n \geq n_1$ esetén (hiszen $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > K_1^{\frac{1}{r}}/2) \leq \mathbb{P}(\|X_n - X\| > K_1^{\frac{1}{r}}/2)$, ha $K \geq K_1$). Ezért (7.8) alapján $\mathbb{P}(\|X_n\|^r > K) < \delta$ minden $K \geq K_1$ és $n \geq n_1$ esetén, így ekkor $\mathbb{E}(\|X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}) < \varepsilon$. A $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ konvergencia miatt van olyan $n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) < \varepsilon$ minden $n \geq n_2$ esetén.

Összefoglalva: $\mathbb{E}(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}) < 2^r \varepsilon + 2^r \varepsilon = 2^{r+1} \varepsilon$ minden $K \geq K_1$ és $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ esetén.

Az $\|X_1\|^r, \dots, \|X_{n_0-1}\|^r$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók (lásd a 7.9. Definíció utáni részt), ezért van olyan $K_2 > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}) < 2^{r+1} \varepsilon$ teljesül minden $K \geq K_2$ és $n = 1, \dots, n_0 - 1$ esetén.

Végül is $\mathbb{E}(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}) < 2^{r+1} \varepsilon$ teljesül minden $K \geq K_0 := \max\{K_1, K_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók (a 7.9. Definíció szerint).

Fordítva: tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók. Először megmutatjuk, hogy $\mathbb{E}(\|X\|^r) < \infty$. Mivel az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók, a 7.10. Tétel szerint $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\|X_n\|^r) < \infty$. Mivel az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \|x\|^r \in \mathbb{R}$ függvény folytonos, így a 7.7. Tétel (ii) pontja szerint $\|X_n\|^r \xrightarrow{\mathbb{P}} \|X\|^r$. Ezért a 7.6. Tétel (iv) pontja szerint van pozitív egészek olyan $n_1 < n_2 < \dots$ sorozata, hogy $\|X_{n_k}\|^r \xrightarrow{\text{m.b.}} \|X\|^r$, amint $k \rightarrow \infty$. Így a Fatou-lemmával

$$\mathbb{E}(\|X\|^r) = \mathbb{E}(\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_{n_k}\|^r) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X_{n_k}\|^r) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\|X_n\|^r) < \infty.$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|X_n - X\|^r \leq (\|X_n\| + \|X\|)^r \leq 2^r (\|X_n\|^r + \|X\|^r)$, ugyanis tetszőleges $a, b \geq 0$ és $r > 0$ esetén $(a+b)^r \leq (2 \max(a, b))^r \leq 2^r (a^r + b^r)$. Ezért a 7.11. Tétel (ii) és (iii) pontjai alapján a $\{\|X_n - X\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók, hiszen az $\|X\|^r$ véletlen változó integrálható, így egyenletesen integrálható is (lásd a 7.9. Definíció utáni részt), és az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók is egyenletesen integrálhatók a feltétel szerint. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) &= \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r \leq \varepsilon\}}) + \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}}) \\ &\leq \varepsilon + \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}}). \end{aligned}$$

Az $\{\|X_n - X\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletes integrálhatósága szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}}) < \varepsilon$ minden $n \geq n_0$ esetén. Valóban, mivel $X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, és $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \|x\|^r \in \mathbb{R}$ folytonos függvény, a 7.2. Tétel (ii) része alapján $\|X_n - X\|^r \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Mivel $\{\|X_n - X\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálhatóak, a 7.10. Tétel szerint bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$ és

minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta$. Ezt $\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$, alakú eseményre szeretnénk alkalmazni. Mivel $\|X_n - X\|^r \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, kapjuk, hogy létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{P}(\|X_n - X\|^r > \varepsilon) < \delta$, ha $n \geq n_0$, ezért $n \geq n_0$ esetén élhetünk az $A = \{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}$ választással. Így $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) < 2\varepsilon$ minden $n \geq n_0$ esetén, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) = 0$. $\square$

Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz esetén jelölje A^- és A° az A lezártját, illetve belsejét. Ismert, hogy A^- zárt halmaz, A° pedig nyílt halmaz.

7.13. Definíció. Legyenek μ_n , $n \in \mathbb{N}$, és μ valószínűségi mértékek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren. Azt mondjuk, hogy a μ_n , $n \in \mathbb{N}$, sorozat **gyengén konvergál** μ -höz (jelölése: $\mu_n \Rightarrow \mu$), ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ minden olyan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mu(\partial A) = 0$, ahol $\partial A = A^- \setminus A^\circ$ az A halmaz határát jelöli.

7.14. Tétel. (Portmanteau tétel) Legyenek μ_n , $n \in \mathbb{N}$, és μ valószínűségi mértékek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren. A következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy)$ minden $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy)$ minden $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, egyenletesen folytonos függvény esetén.
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ minden $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmaz esetén.
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ minden $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nyitott halmaz esetén.
- (v) $\mu_n \Rightarrow \mu$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ minden $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mu(\partial A) = 0$.

A "portmanteau" szó eredetileg nagy utazó táskát jelentett. A nyelvészetben ma szóösszerántást jelent: két különböző jelentésű eredeti szó összevonásával teljesen új jelentésű szó jön létre (például: cső + orr $\rightarrow$ csőr vagy Hungarian + English $\rightarrow$ Hunglish).

A 7.14. Tétel bizonyítása. (i) $\implies$ (ii) triviális.

(ii) $\implies$ (iii). Legyen $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmaz, és legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_k(x) := 1 - \left(\frac{d(x, F)}{1 + d(x, F)} \right)^{1/k}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

ahol $d(x, F) := \inf \{\|x - y\| : y \in F\}$. Először megmutatjuk, hogy g_k egyenletesen folytonos függvény. A $h_k(x) := 1 - \left(\frac{x}{1+x} \right)^{1/k}$, $x \in \mathbb{R}_+$, függvény egyenletesen folytonos, hiszen folytonos, és $\lim_{x \rightarrow \infty} h_k(x) = 0$. Valóban, bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén, létezik egy olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $|h_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $x > N(\varepsilon)$. Így

$$|h_k(x) - h_k(y)| \leq |h_k(x)| + |h_k(y)| < \varepsilon, \quad \text{ha } x, y > N(\varepsilon). \quad (7.9)$$

Tekintsük a $[0, N(\varepsilon) + 1]$ intervallumot, mely kompakt, így h_k a $[0, N(\varepsilon) + 1]$ intervallumon egyenletesen is folytonos, azaz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|h_k(x) - h_k(y)| < \varepsilon, \quad \text{ha } |x - y| < \delta(\varepsilon), \quad x, y \in [0, N(\varepsilon) + 1].$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\delta(\varepsilon) < 1$. Legyenek most $x, y \geq 0$ olyanok, hogy $|x - y| < \delta(\varepsilon)$. Ha $x, y \leq N(\varepsilon) + 1$, akkor a fentiek alapján $|h_k(x) - h_k(y)| < \varepsilon$. Ha $x > N(\varepsilon) + 1$ (ill. $y > N(\varepsilon) + 1$), akkor, mivel $\delta(\varepsilon) < 1$, kapjuk, hogy $y > N(\varepsilon)$ (ill. $x > N(\varepsilon)$), így (7.9) alapján ekkor is teljesül, hogy $|h_k(x) - h_k(y)| < \varepsilon$. Így, felhasználva, hogy egyenletesen folytonos függvények kompozíciója is egyenletesen folytonos, elegendő azt belátni, hogy az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto d(x, F)$ függvény egyenletesen folytonos. Ez pedig abból következik, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^d$ esetén $|d(x, F) - d(y, F)| \leq \|x - y\|$. Ehhez szimmetria okok miatt azt elég ellenőrizni, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^d$ esetén $d(x, F) \leq \|x - y\| + d(y, F)$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ esetén $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$, így

$$\begin{aligned} d(x, F) &= \inf \{ \|x - z\| : z \in F \} \leq \inf \{ \|x - y\| + \|y - z\| : z \in F \} \\ &= \|x - y\| + \inf \{ \|y - z\| : z \in F \} = \|x - y\| + d(y, F). \end{aligned}$$

Tehát beláttuk, hogy g_k egyenletesen folytonos függvény.

Nyilván

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } d(x, F) = 0, \\ 0 & \text{ha } d(x, F) > 0, \end{cases}$$

és F zártsága miatt $d(x, F) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in F$. Valóban, ha $x \in F$, akkor $\|x - x\| = 0$ miatt $d(x, F) = 0$. Ha pedig $d(x, F) = 0$, akkor bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $z \in F$, hogy $\|x - z\| < \varepsilon$, és így $z \in B(x, \varepsilon) \cap F$, speciálisan $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, ahol $B(x, \varepsilon)$ az x körüli ε -sugarú nyílt gömböt jelöli. Ezért $x \in F^-$, és mivel F zárt, kapjuk, hogy $x \in F$. Mivel tetszőleges $a \in [0, 1)$ esetén a $\mathbb{N} \ni k \mapsto a^{1/k}$ függvény monoton növekvő, kapjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $1 \geq g_k(x) \downarrow \mathbb{1}_F(x)$, ha $k \uparrow \infty$. Ezért a monoton konvergencia-tétel és (ii) felhasználásával

$$\mu(F) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_F(x) \mu(dx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_k(x) \mu(dx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_k(x) \mu_n(dx). \quad (7.10)$$

Nyilván tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ esetén $g_k \geq \mathbb{1}_F$ miatt $\int_{\mathbb{R}^d} g_k(x) \mu_n(dx) \geq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_F(x) \mu_n(dx)$, így tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_k(x) \mu_n(dx) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_F(x) \mu_n(dx) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F).$$

Ezért, felhasználva (7.10)-et, kapjuk, hogy $\mu(F) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F)$, azaz teljesül (iii).

(iii) $\iff$ (iv) triviális a komplementerre való áttéréssel. Például, tegyük fel, hogy (iii) teljesül, és legyen $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{R}^d \setminus G$ zárt halmaz, és így

$$1 - \mu(G) = \mu(\mathbb{R}^d \setminus G) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}^d \setminus G) = 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G),$$

melyből $\mu(G) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G)$, azaz (iv) teljesül.

(iv) $\implies$ (v). Legyen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, melyre $\mu(\partial A) = 0$. Mivel már beláttuk, hogy (iv) $\implies$ (iii), így

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A^-) \leq \mu(A^-).$$

Az $A^- = A \cup (A^- \setminus A)$ diszjunkt felbontás alapján $\mu(A^-) = \mu(A) + \mu(A^- \setminus A)$, és $A^- \setminus A \subset A^- \setminus A^\circ = \partial A$ miatt $\mu(A^- \setminus A) \leq \mu(\partial A) = 0$, ezért $\mu(A^-) = \mu(A)$, tehát $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \mu(A)$. Továbbá (iv) felhasználásával

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A^\circ) \geq \mu(A^\circ).$$

Az $A = A^\circ \cup (A \setminus A^\circ)$ diszjunkt felbontás alapján $\mu(A) = \mu(A^\circ) + \mu(A \setminus A^\circ)$, ahol $A \setminus A^\circ \subset A^- \setminus A^\circ = \partial A$ miatt $\mu(A \setminus A^\circ) \leq \mu(\partial A) = 0$, ezért $\mu(A) = \mu(A^\circ)$, és így $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$, tehát következik (v).

(v) $\implies$ (i). Legyen $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény. Legyen $K > 0$ olyan, hogy $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)| < K$. Legyen

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = t\}) > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : \mu(g^{-1}(\{t\})) > 0\}.$$

Az $F(t) := \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) < t\})$, $t \in \mathbb{R}$, függvény nem más, mint az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ valószínűségi mezőn definiált $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ egydimenziós véletlen változó eloszlásfüggvénye, így F monoton növekvő és balról folytonos, továbbá D éppen azon $t \in \mathbb{R}$ pontok halmaza, ahol F nem folytonos, így D megszámlálható halmaz (lásd az 1.29. Állítás bizonyítását). Tekintsük a $[-K, K]$ intervallumnak egy olyan $-K = t_0 < t_1 < \dots < t_k = K$ beosztását, melyre $t_j \notin D$, $j = 1, \dots, k$ (ilyen beosztás létezik, mert a D megszámlálható halmazt el tudjuk kerülni). Jelölje $j = 1, \dots, k$ esetén $B_j := \{x \in \mathbb{R}^d : t_{j-1} \leq g(x) < t_j\}$. Ekkor $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^k B_j$ diszjunkt felbontás, és $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, k$ (ugyanis $B_j = g^{-1}([t_{j-1}, t_j))$ és g mérhető, hiszen folytonos). Mivel $\{x \in \mathbb{R}^d : t_{j-1} < g(x) < t_j\} = g^{-1}((t_{j-1}, t_j))$ nyílt halmaz (ugyanis g folytonos), így

$$\partial B_j \subset \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = t_{j-1} \text{ vagy } g(x) = t_j\} = g^{-1}(\{t_{j-1}\}) \cup g^{-1}(\{t_j\}).$$

Valóban, ha $x_0 \in \partial B_j$, akkor léteznek olyan $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ és $(x_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok, hogy $x_n^{(1)} \in B_j$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(2)} \in \mathbb{R}^d \setminus B_j$, $n \in \mathbb{N}$, és $x_n^{(i)} \rightarrow x_0$, ha $n \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Így g folytonossága miatt $g(x_0) \in [t_{j-1}, t_j]$ és $g(x_0) \in (-\infty, t_{j-1}] \cup [t_j, \infty)$ is teljesül, és ezért $g(x_0) \in \{t_{j-1}, t_j\}$. Ezért $t_{j-1}, t_j \notin D$ miatt $\mu(\partial B_j) = 0$ (hiszen $\mu(\partial B_j) \leq \mu(g^{-1}(\{t_{j-1}\})) + \mu(g^{-1}(\{t_j\})) = 0$), és így (v)

felhasználásával $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B_j) = \mu(B_j)$ teljesül minden $j = 1, \dots, k$ esetén. Továbbá

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu(dx) \right| \\
& \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu_n(dx) - \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) \right| + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) - \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) \right| \\
& \quad + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) - \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu(dx) \right| \\
& \leq \sum_{j=1}^k \int_{B_j} |g(x) - t_j| \mu_n(dx) + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) - \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) \right| + \sum_{j=1}^k \int_{B_j} |t_j - g(x)| \mu(dx) \\
& \leq 2 \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}) + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) - \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) \right|,
\end{aligned}$$

ugyanis

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu_n(dx) - \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) = \sum_{j=1}^k \int_{B_j} g(x) \mu_n(dx) - \sum_{j=1}^k \int_{B_j} t_j \mu_n(dx) = \sum_{j=1}^k \int_{B_j} (g(x) - t_j) \mu_n(dx),$$

és

$$\sum_{j=1}^k \int_{B_j} |g(x) - t_j| \mu_n(dx) \leq \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}) \sum_{j=1}^k \mu_n(B_j) = \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}) \mu_n(\mathbb{R}^d) = \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}),$$

és hasonlóan $\sum_{j=1}^k \int_{B_j} |t_j - g(x)| \mu(dx) \leq \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1})$. Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B_j) = \mu(B_j)$, $j = 1, \dots, k$, miatt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu(dx) \right| \leq 2 \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}),$$

ami tetszőlegesen kicsivé tehető (oly módon, hogy a D megszámlálható halmazt el tudjuk kerülni).

Az alábbiakban egy másik bizonyítást is adunk az (v) $\implies$ (i) részre. Legyen $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $g(x) \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Valóban, ha

$$\tilde{g} := \frac{g - \inf_{x \in \mathbb{R}^d} g(x) + \varepsilon}{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} g(x) - \inf_{x \in \mathbb{R}^d} g(x) + 2\varepsilon},$$

ahol $\varepsilon > 0$, akkor $\tilde{g}(x) \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}^d$, és felhasználva, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Ag(y) + B) \mu_n(dy) = A \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) + B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

és

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Ag(y) + B) \mu(dy) = A \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy) + B, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

kapjuk, hogy az (i) feltétel akkor és csak akkor teljesül g -re, ha teljesül $\tilde{g}$ -ra.

A 3.7. Tétel (xxii) része alapján

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) = \int_0^\infty \mu_n(g > t) dt = \int_0^1 \mu_n(g > t) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

és

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy) = \int_0^\infty \mu(g > t) dt = \int_0^1 \mu(g > t) dt.$$

Mivel g folytonos, kapjuk, hogy tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén

$$\partial\{y \in \mathbb{R}^d : g(y) > t\} \subset \{y \in \mathbb{R}^d : g(y) = t\}. \quad (7.11)$$

Valóban, ha $y_0 \in \partial\{y \in \mathbb{R}^d : g(y) > t\}$, akkor léteznek olyan $(y_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ és $(y_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok, hogy $g(y_n^{(1)}) > t$, $n \in \mathbb{N}$, $g(y_n^{(2)}) \leq t$, $n \in \mathbb{N}$, és $y_n^{(i)} \rightarrow y_0$, ha $n \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Így g folytonossága miatt $g(y_0) \geq t$ és $g(y_0) \leq t$, amiből adódik hogy $g(y_0) = t$. A korábbi (első) gondolatmenetben láttuk, hogy a $\{t \in [0,1] : \mu(g = t) > 0\}$ halmaz megszámlálható, és így $\mu(g = t) = 0$ megszámlálható sok $t \in [0,1]$ kivételével. Ezért (7.11) alapján $\mu(\partial\{y \in \mathbb{R}^d : g(y) > t\}) = 0$ megszámlálható sok $t \in [0,1]$ kivételével. Így az (v) feltétel alapján $\mu_n(g > t) \rightarrow \mu(g > t)$ amint $n \rightarrow \infty$ megszámlálható sok $t \in [0,1]$ kivételével. Ezért, a dominált konvergencia tételt is felhasználva, kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) = \int_0^1 \mu_n(g > t) dt \rightarrow \int_0^1 \mu(g > t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy), \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

□

7.15. Megjegyzés. A 7.14. Tétel (i) része a következőképpen is átfogalmazható. Tekintsük az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_n)$, $n \in \mathbb{N}$, és $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ valószínűségi mezőket. Ha $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos, folytonos függvény, akkor g véletlen változó ezen valószínűségi mezőkön (hiszen folytonos függvény Borel-mérhető), továbbá

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) \mu_n(dy) = \mathbb{E}_n(g), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}} g(y) \mu(dy) = \mathbb{E}(g),$$

ahol $\mathbb{E}_n$, illetve $\mathbb{E}$ a μ_n , illetve μ valószínűségi mértékek szerinti várható érték képzését jelöli. Ezért a 7.14. Tétel (i) része úgy is megfogalmazható, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(g) = \mathbb{E}(g)$ tetszőleges $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvényre. □

Az eloszlásbeli és gyenge konvergencia kapcsolatáról szól a következő tétel.

7.16. Tétel. Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -dimenziós véletlen vektorok. A következő állítások ekvivalensek:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

- (ii) $\mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X$.
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$ minden $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén.
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$ minden $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, egyenletesen folytonos függvény esetén.
- (v) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$ minden $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmazra.
- (vi) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ minden $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nyitott halmazra.
- (vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$ minden olyan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\mu_n := \mathbb{P}_{X_n}$, $n \in \mathbb{N}$, és $\mu := \mathbb{P}_X$. Ekkor a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) alapján

$$\mathbb{E}(g(X_n)) = \int_{\Omega} g(X_n(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathbb{P}_{X_n}(dy), \quad n \in \mathbb{N},$$

és

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathbb{P}_X(dy).$$

A portmanteau tétel alapján elegendő az (i) $\implies$ (vi) és (ii) $\implies$ (i) állításokat bizonyítani, ugyanis a portmanteau tétel alapján (ii) $\iff$ (iii) $\iff \dots \iff$ (vi), a (vii) pedig nem más, mint a (ii)-ben szereplő gyenge konvergencia definíció szerinti kiírása. Csak a $d = 1$ esetben bizonyítunk.

(i) $\implies$ (vi). Ha $G \subset \mathbb{R}$ nyitott halmaz, akkor a nyílt halmazok struktúratétele alapján előáll páronként diszjunkt, nyitott intervallumok megszámlálható uniójaként: $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$, ahol $I_k = (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, és $a_k, b_k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ha például $G = (0,1) \cup (2,3)$, akkor élhetünk az $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$ és $a_k = b_k = 0$, $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, választásokkal. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor léteznek olyan $I'_k = [a'_k, b'_k) \subset I_k$, $k \in \mathbb{N}$, intervallumok, hogy F_X folytonos az $a'_k, b'_k \in \mathbb{R}$ pontokban, és $\mu(I_k) \leq \mu(I'_k) + \varepsilon 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Valóban, egyrészt $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ monoton növekvő függvény, így legfeljebb megszámlálható sok $\{s_\ell: \ell \in \mathbb{N}\}$ pont kivételével folytonos. Másrészt, mivel a μ valószínűségi mérték folytonos, kapjuk, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mu([x_k^{(n)}, y_k^{(n)})) \uparrow \mu((a_k, b_k))$, azaz $\mu(I_k) - \mu([x_k^{(n)}, y_k^{(n)}))$, ha $x_k^{(n)} \downarrow a_k$ és $y_k^{(n)} \uparrow b_k$ amint $n \rightarrow \infty$. Mivel a megszámlálható $\{s_\ell: \ell \in \mathbb{N}\}$ halmazt el tudjuk kerülni, adott $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $I'_k := [x_k^{(n)}, y_k^{(n)})$ intervallum, hogy $x_k^{(n)}, y_k^{(n)} \notin \{s_\ell: \ell \in \mathbb{N}\}$ és $\mu(I_k) - \mu(I'_k) < \varepsilon 2^{-k}$. Felhívjuk, hogy ez a gondolatmenet akkor is működik, ha $a_k = -\infty$ vagy $b_k = \infty$.

Továbbá, mivel

$$\mu_n(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(I_k) = \int_{\mathbb{N}} f_n(k) \nu(dk), \quad n \in \mathbb{N},$$

ahol $f_n(k) := \mu_n(I_k)$, $n, k \in \mathbb{N}$, és ν a számláló mértéket jelöli $\mathbb{N}$ -en, a (tetszőleges mértéktérre vonatkozó) Fatou-lemma alkalmazásával, felhasználva azt is, hogy $I'_k \subset I_k$, $k \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in G) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{X_n}(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(I_k) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n(k) \nu(dk) \\ &\geq \int_{\mathbb{N}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(k) \nu(dk) = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I'_k). \end{aligned}$$

Viszont tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az (i) feltétel alapján, az a'_k, b'_k megválasztása miatt $\mu_n(I'_k) = F_{X_n}(b'_k) - F_{X_n}(a'_k) \rightarrow F_X(b'_k) - F_X(a'_k) = \mu(I'_k)$, ha $n \rightarrow \infty$, így

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I'_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(I_k) - \varepsilon 2^{-k}) = \mu(G) - \varepsilon = \mathbb{P}(X \in G) - \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen választható, így $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ tetszőleges $G \subset \mathbb{R}$ nyitott halmaz esetén, azaz (vi) teljesül.

(ii) $\implies$ (i). Nyilvánvaló, hiszen, ha $x \in \mathbb{R}$ és $A_x := (-\infty, x)$, akkor $\partial A_x = \{x\}$ miatt, ha az F_X függvény folytonos az x pontban, akkor $\mathbb{P}_X(\partial A_x) = \mathbb{P}(X = x) = F_X(x+0) - F_X(x) = 0$, így (ii) felhasználásával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{X_n}(A_x) = \mathbb{P}_X(A_x) = F_X(x),$$

tehát következik (i). □

Egy $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mérhető függvény esetén jelölje D_h a h szakadási (nem folytonossági) pontjaiból álló halmazt, azaz

$$D_h := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{létezik olyan } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ } \mathbb{R}^d\text{-beli sorozat, hogy } x_n \rightarrow x, \text{ de } h(x_n) \not\rightarrow h(x) \right\}.$$

Mértékelméletből ismert, hogy $D_h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

7.17. Tétel. (Leképezési tétel) Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok és $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mérhető függvény. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$, akkor $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$.

Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és h folytonos, akkor $D_h = \emptyset$, $\{X \in D_h\} = \emptyset$, így $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$, és ezért a 7.17. Tétel alapján $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$, mely esetben a leképezési tételt folytonos leképezések tételének is szokás hívni. Felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy a 7.17. Tételben $\{X \in D_h\}$ valóban esemény, hiszen $\{X \in D_h\} = X^{-1}(D_h)$, ahol $D_h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ és X mérhető leképezés, így értelmes $\{X \in D_h\}$ valószínűségéről beszélni.

A 7.17. Tétel bizonyítása. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ zárt halmaz esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(h(X_n) \in F) \leq \mathbb{P}(h(X) \in F), \quad (7.12)$$

melyből a 7.16. Tétel szerint következik, hogy $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$. Mivel $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, újra a 7.16. Tételt használva, kapjuk, hogy tetszőleges $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ zárt halmaz esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(h(X_n) \in F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in h^{-1}(F)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in \overline{h^{-1}(F)}) \leq \mathbb{P}(X \in \overline{h^{-1}(F)}),$$

ugyanis $\overline{h^{-1}(F)}$ egy $\mathbb{R}^d$ -beli zárt halmaz (ahol $\overline{h^{-1}(F)}$ a $h^{-1}(F)$ halmaz lezártját jelöli). Megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X \in \overline{h^{-1}(F)}) = \mathbb{P}(X \in h^{-1}(F)) = \mathbb{P}(h(X) \in F),$$

melyből az előzőek alapján következik (7.12). Felhasználva, hogy

$$h^{-1}(F) \subset \overline{h^{-1}(F)} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : h(x) \in F\}} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : h(x) \in F\} \cup D_h = h^{-1}(F) \cup D_h, \quad (7.13)$$

és $\mathbb{P}_X(D_h) = \mathbb{P}(X \in D_h) = 0$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}_X(h^{-1}(F)) \leq \mathbb{P}_X(\overline{h^{-1}(F)}) \leq \mathbb{P}_X(h^{-1}(F)) + \mathbb{P}_X(D_h) = \mathbb{P}_X(h^{-1}(F)),$$

és így $\mathbb{P}(X \in h^{-1}(F)) = \mathbb{P}(X \in \overline{h^{-1}(F)})$. A (7.13)-beli a második tartalmazást az alábbi módon indokolhatjuk: ha $x_0 \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : h(x) \in F\}}$, akkor $x_0 \in D_h$ vagy $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus D_h$ teljesül, és $x_0 \in (\mathbb{R}^d \setminus D_h) \cap \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : h(x) \in F\}}$ esetén létezik olyan $x_n, n \in \mathbb{N}$, sorozat, melyre $h(x_n) \in F$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow x_0$, amint $n \rightarrow \infty$ és (mivel x_0 a h folytonossági pontja) $h(x_n) \rightarrow h(x_0)$, amint $n \rightarrow \infty$ teljesül. Mivel F zárt, ezek maguk után vonják, hogy $h(x_0) \in F$, és így $x_0 \in h^{-1}(F)$. $\square$

7.18. Lemma. (Cramér–Slutsky) *Legyenek $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $Y_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, akkor $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmaz esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F),$$

melyből a 7.16. Tétel alapján következik, hogy $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Felhasználva, hogy az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto d(x, F) := \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$ függvény folytonos (lásd a 7.14. Tétel bizonyításában a (ii) $\implies$ (iii) részt, ahol egyenletes folytonosságot igazoltunk), kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $F_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, F) \leq \varepsilon\}$ halmaz zárt. Továbbá, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n \in F) &= \mathbb{P}(Y_n \in F, \|X_n - Y_n\| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(Y_n \in F, \|X_n - Y_n\| < \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(\|X_n - Y_n\| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $Y_n \in F$ és $\|X_n - Y_n\| < \varepsilon$ esetén $d(X_n, F) \leq \|X_n - Y_n\| + d(Y_n, F) = \|X_n - Y_n\| < \varepsilon$. Így a 7.16. Tétel és a feltétel alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \in F_\varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \quad (7.14)$$

Mivel F zárt, így $d(x, F) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x \in F$ (lásd a 7.14. Tétel bizonyításában a (ii) $\implies$ (iii) részt), és így $F_{1/m} \downarrow F$, ha $m \rightarrow \infty$, hiszen, ha $m_1 \geq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, akkor $F_{1/m_1} \subset F_{1/m_2}$ és $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{1/m}$ esetén $d(x, F) = 0$, melyből következik, hogy $x \in F$. Ezért a valószínűség folytonossága miatt $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \in F_{1/m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_X(F_{1/m}) = \mathbb{P}_X(F) = \mathbb{P}(X \in F)$. Így (7.14) alapján, az $\varepsilon := 1/m$ választással élve, majd $m \rightarrow \infty$ határátmenetet véve, kapjuk, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$.

A $d = 1$ esetben mutatunk egy másik bizonyítást is. Jelölje F_X az X eloszlásfüggvényét, és legyen $x \in \mathbb{R}$ az F_X egy folytonossági pontja. Legyen továbbá $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ egy olyan sorozat, hogy $\varepsilon_k \downarrow 0$, és $x \pm \varepsilon_k$ folytonossági pontjai F_X -nek minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel F_X legfeljebb megszámlálható sok ponttól eltekintve folytonos, ilyen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat létezik. Ekkor minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}(Y_n < x) = \mathbb{P}(Y_n < x, |X_n - Y_n| < \varepsilon_k) + \mathbb{P}(Y_n < x, |X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k) \\ &\leq \mathbb{P}(X_n < x + \varepsilon_k) + \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k) = F_{X_n}(x + \varepsilon_k) + \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k), \end{aligned}$$

ugyanis, ha $Y_n < x$ és $|X_n - Y_n| < \varepsilon_k$, akkor $X_n = Y_n + X_n - Y_n < x + \varepsilon_k$. Hasonlóan, minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x - \varepsilon_k) &= \mathbb{P}(X_n < x - \varepsilon_k) = \mathbb{P}(X_n < x - \varepsilon_k, |X_n - Y_n| < \varepsilon_k) + \mathbb{P}(X_n < x - \varepsilon_k, |X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k) \\ &\leq \mathbb{P}(Y_n < x) + \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k) = F_{Y_n}(x) + \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Így minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_{X_n}(x - \varepsilon_k) - \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k) \leq F_{Y_n}(x) \leq F_{X_n}(x + \varepsilon_k) + \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon_k).$$

Ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, a feltételt is használva,

$$\begin{aligned} F_X(x - \varepsilon_k) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x - \varepsilon_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x + \varepsilon_k) = F_X(x + \varepsilon_k), \end{aligned}$$

melyből $k \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$. $\square$

7.19. Tétel. Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, és $c \in \mathbb{R}^d$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, akkor $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$.

Bizonyítás. Megmutatjuk először, hogy $(X_n, c) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$. A 7.16. Tétel alapján ehhez elég belátni, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén $\mathbb{E}(f(X_n, c)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X, c))$. Vezessük be a $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := f(x, c)$, $x \in \mathbb{R}^d$, függvényt. Ekkor g is folytonos és korlátos, így újra a 7.16. Tétel alapján $\mathbb{E}(g(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(g(X))$, azaz $\mathbb{E}(f(X_n, c)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X, c))$. Mivel

$$(X_n, Y_n) - (X_n, c) = (0, Y_n - c) \xrightarrow{\mathbb{P}} (0, 0) \in \mathbb{R}^{2d},$$

a Cramér–Slutsky lemma (7.18. Lemma) alapján $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$. $\square$

7.20. Tétel. (Véletlen vektorok konvergenciája) Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $Z_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, és $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$.

(i) Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

(ii) **(Cramér–Slutsky)** Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$ és $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, akkor $Y_n X_n + Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX + a$.
Speciálisan, ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, és $a, a_n \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, $b, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow b$, akkor $b_n X_n + a_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX + a$.

(iii) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ akkor és csak akkor, ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a$.

Bizonyítás. (i). Az $X'_n := X$, $n \in \mathbb{N}$, sorozatra triviálisan teljesül, hogy $X'_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, így, mivel $X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, a Cramér–Slutsky lemma (7.18. Lemma) alapján kapjuk, hogy $X_n = X'_n + X_n - X \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

(ii). Mivel $Z_n - a \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, a Cramér–Slutsky lemma (7.18. Lemma) alapján elég belátni, hogy $Y_n X_n + a \xrightarrow{\mathcal{D}} bX + a$, melyhez elég belátni, hogy $Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX$ (gondoljunk például a folytonossági tételre). A 7.19. Tétel alapján $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, b)$, és a leképezési tételt (7.17. Tétel) alkalmazva a $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $h(x, y) := yx$, $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, folytonos függvényre, kapjuk, hogy $Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX$.

A $d = 1$ esetben egy másik bizonyítást adunk arra, hogy $Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX$. Mivel $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ alapján $bX_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX$, a Cramér–Slutsky lemma szerint az $Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX$ konvergenciához elég belátni, hogy $(Y_n - b)X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Legyen $\delta > 0$ és válasszunk egy olyan $h > 0$ számot, hogy $\pm h$ folytonossági pontjai F_X -nek és $F_X(h) - F_X(-h) \geq 1 - \delta$. Ilyen $h > 0$ létezik, ugyanis a valószínűség folytonossága szerint

$$F_X(h) - F_X(-h) = \mathbb{P}(-h \leq X < h) \rightarrow 1, \quad \text{ha } h \uparrow \infty,$$

és F_X -nek legfeljebb megszámlálható sok szakadási helye lehet. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|(Y_n - b)X_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|(Y_n - b)X_n| > \varepsilon, |X_n| \leq h) + \mathbb{P}(|(Y_n - b)X_n| > \varepsilon, |X_n| > h) \\ &\leq \mathbb{P}(|Y_n - b| > \varepsilon/h) + \mathbb{P}(|X_n| > h) \\ &= \mathbb{P}(|Y_n - b| > \varepsilon/h) + 1 - \mathbb{P}(-h \leq X_n \leq h). \end{aligned}$$

Mivel $\pm h$ folytonossági pontjai F_X -nek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-h \leq X_n \leq h) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-h \leq X_n < h) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (F_{X_n}(h) - F_{X_n}(-h)) = F_X(h) - F_X(-h) \geq 1 - \delta. \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|(Y_n - b)X_n| > \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n - b| > \varepsilon/h) + 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-h \leq X_n \leq h) \leq \delta, \quad \forall \delta > 0,$$

melyből $\delta \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk az állítást.

(iii). Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, akkor az (i) rész alapján $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $F_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - a\| \geq \varepsilon\}$ zárt halmazra, $a \notin F_\varepsilon$ és a 7.16. Tétel alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - a\| \geq \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon) \leq \mathbb{P}(a \in F_\varepsilon) = 0,$$

és így $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$. □

Véletlen vektorok mérhető függvényének sztochasztikus konvergenciájáról szól a következő tétel, melyet hívhatunk sztochasztikus konvergenciára vonatkozó leképezési tételnek is.

7.21. Tétel. *Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mérhető függvény, és $x \in \mathbb{R}^d$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x$ és $x \notin D_h$, akkor $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(x)$.*

Bizonyítás. Mivel $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x$, így a 7.20. Tétel (i) része szerint $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} x$. Így felhasználva, hogy $x \notin D_h$, a leképezési tétel (7.17. Tétel) alapján kapjuk, hogy $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(x)$. Végezetül a 7.20. Tétel (iii) része alapján adódik, hogy $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(x)$. □

Véletlen vektorok folytonos függvényének sztochasztikus konvergenciájáról szól a következő tétel, melyet hívhatunk sztochasztikus konvergenciára vonatkozó folytonos leképezési tételnek is. Ez a tétel valójában speciális esete a 7.7. Tétel (ii) részének, azonban azért, hogy a különböző leképezési tételeket könnyebben összehasonlíthassuk, újra megfogalmazzuk.

7.22. Tétel. *Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok, és $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ folytonos függvény. Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, akkor $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X)$.*

Bizonyítás. Mivel $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, így a 7.6. Tétel (iv) része szerint pozitív egészek bármely $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozata, hogy $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $i \rightarrow \infty$. Mivel h folytonos, kapjuk, hogy $h(X_{n_{k_i}}) \xrightarrow{\text{m.b.}} h(X)$, amint $i \rightarrow \infty$. Így alkalmazva újra a 7.6. Tétel (iv) részét, kapjuk, hogy $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X)$, amint $n \rightarrow \infty$. □

Valós véletlen változók mérhető függvényei várható értékének konvergenciájáról szól a következő eredmény, melyet tekinthetünk egy speciális leképezési tételnek is.

7.23. Tétel. *Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok és $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és mérhető függvény, melyre $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, akkor $\mathbb{E}(h(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(h(X))$.*

Bizonyítás. Jelölje M a h egy korlátját, azaz $|h(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$. A 7.17. Tétel szerint $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$. Így a 7.16. Tétel alapján kapjuk, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén $\mathbb{E}(f(h(X_n))) \rightarrow \mathbb{E}(f(h(X)))$, ha $n \rightarrow \infty$. Az

$$f(x) := \begin{cases} -M & \text{ha } x < -M, \\ x & \text{ha } -M \leq x \leq M, \\ M & \text{ha } x > M, \end{cases}$$

☐

7.24. Állítás. Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók. Ha $X_n \xrightarrow{D} X$, akkor $\mathbb{E}(|X|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \geq t) dt = \int_0^\infty \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq t) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_n| \geq t) dt = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|).\end{aligned}$$
☐

Bizonyítás. Mivel $\{X_n: n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható, a 7.10. Tétel alapján kapjuk, hogy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, így a 7.24. Állítás alapján

$$\mathbb{E}(|X|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^+ - X_n^-) = \mathbb{E}(X_n^+) - \mathbb{E}(X_n^-) \rightarrow \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) = \mathbb{E}(X), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \int_{\Omega} X_n(\omega) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_{\{X_n \leq K\}} X_n(\omega) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) + \int_{\{X_n > K\}} X_n(\omega) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{\{X_n \leq K\}} \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[t, \infty)}(X_n(\omega)) \mathrm{d}t \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_n(\omega) \leq K\}} \mathbb{1}_{[t, \infty)}(X_n(\omega)) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \right) \mathrm{d}t + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{t \leq X_n(\omega) \leq K\}} \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \right) \mathrm{d}t + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) \\
&= \int_0^K \mathbb{P}(t \leq X_n \leq K) \mathrm{d}t + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}), \tag{7.15}
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^K \mathbb{P}(t \leq X \leq K) dt + \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X > K\}}). \quad (7.16)$$

Mivel $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ és $\{X\}$ nemnegatív valószínűségi változókból álló egyenletesen integrálható családok, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K_0 \geq 0$, hogy

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) < \varepsilon, \quad \text{ha } K \geq K_0,$$

és

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X > K\}}) < \varepsilon, \quad \text{ha } K \geq K_0.$$

Rögzítsünk a továbbiakban egy olyan $\tilde{K} > K_0$ értéket, melyre $\mathbb{P}(X = \tilde{K}) = 0$ (ilyen $\tilde{K}$ létezik, mert X eloszlásfüggvénye legfeljebb megszámlálható sok pontban nem folytonos). Ekkor

$$|\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X)| \leq \left| \int_0^{\tilde{K}} \mathbb{P}(t \leq X_n \leq \tilde{K}) dt - \int_0^{\tilde{K}} \mathbb{P}(t \leq X \leq \tilde{K}) dt \right| + 2\varepsilon, \quad n \in \mathbb{N},$$

így elég belátni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tilde{K}} \mathbb{P}(t \leq X_n \leq \tilde{K}) dt = \int_0^{\tilde{K}} \mathbb{P}(t \leq X \leq \tilde{K}) dt.$$

Ez a dominált konvergencia tételből következik, ugyanis

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(t \leq X_n \leq \tilde{K}) = \mathbb{P}(t \leq X \leq \tilde{K})$ legfeljebb megszámlálható sok $t \in [0, \tilde{K}]$ kivételével, hiszen $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$,
- $|\mathbb{P}(t \leq X_n \leq \tilde{K})| \leq 1$, $t \in [0, \tilde{K}]$, $n \in \mathbb{N}$, és $\int_0^{\tilde{K}} 1 dt = \tilde{K} < \infty$.

□

7.26. Állítás. Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók. Ha $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $X \geq 0$, $\mathbb{E}(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X) < \infty$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható.

Bizonyítás. Mivel $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, a 7.25. Állítás bizonyítása alapján kapjuk, hogy minden olyan $K > 0$ esetén, melyre $\mathbb{P}(X = K) = 0$, teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^K \mathbb{P}(t \leq X_n \leq K) dt = \int_0^K \mathbb{P}(t \leq X \leq K) dt.$$

Így, felhasználva, hogy $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$, (7.15) és (7.16) alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X > K\}})$$

minden olyan $K > 0$ esetén, melyre $\mathbb{P}(X = K) = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan $K_0 > 0$ értéket, melyre $\mathbb{P}(X = K_0) = 0$ és $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X > K_0\}}) < \varepsilon$. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K_0\}}) < \varepsilon$, ha $n \geq n_0$, és így, felhasználva, hogy $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K_0\}}) < \varepsilon, \quad \text{ha } n \geq n_0 \text{ és } K \geq K_0.$$

Továbbá tudunk olyan $K_1 > 0, K_2 > 0, \dots, K_{n_0-1} > 0$ értékeket választani, hogy

$$\mathbb{E}(X_i \mathbb{1}_{\{X_i > K_i\}}) < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n_0 - 1.$$

Így tetszőleges $K \geq \max(K_0, K_1, \dots, K_{n_0-1})$ esetén $\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, melyből következik, hogy $\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n > K\}}) = 0$, azaz $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható. $\square$

8. Feltételes valószínűség, feltételes várható érték, reguláris feltételes eloszlás

A későbbiekben gyakran használjuk majd a várható érték következő tulajdonságát.

8.1. Lemma. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra.

- (i) Ha $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{F}$ -mérhető valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(|\zeta|) < \infty$ és minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\zeta \mathbb{1}_A) \geq 0$, akkor $\zeta \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.m.
- (ii) Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{F}$ -mérhető valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$, és minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$, akkor $\xi \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.m.
- (iii) Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{F}$ -mérhető valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$, és minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$, akkor $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.m.

Bizonyítás. (i). Ha $p := \mathbb{P}(\zeta < 0) > 0$ volna, akkor a valószínűség folytonossága alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\zeta < -1/n) = \mathbb{P}(\zeta < 0)$ teljesülne, ugyanis $\{\zeta < -1/n\} \uparrow \{\zeta < 0\}$, ha $n \rightarrow \infty$. Így létezne olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\mathbb{P}(\zeta < -1/n) > p/2$, és ekkor az $A := \{\omega \in \Omega : \zeta(\omega) < -1/n\} \in \mathcal{F}$ eseményre

$$\mathbb{E}(\zeta \mathbb{1}_A) \leq -\frac{1}{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = -\frac{1}{n} \mathbb{P}(A) = -\frac{1}{n} \mathbb{P}(\zeta < -1/n) < -\frac{p}{2n} < 0$$

teljesülne, ami ellentmondana a feltételeknek.

(ii). Alkalmazzuk az (i) állítást a $\zeta := \eta - \xi$ valószínűségi változóra.

(iii). Nyilvánvalóan következik (ii)-ből. □

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $B \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén definiálható a

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

feltételes valószínűség. De ha például X és Y véletlen változók, és X abszolút folytonos, akkor $\mathbb{P}(Y \leq b | X = a)$ nem definiálható a fenti módon, mert $\mathbb{P}(X = a) = 0$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha $\mathbb{P}(B) \in (0, 1)$, akkor $\mathbb{P}(A | B)$ ismerete még nem írja le az összes információt, melyet a B eseményre vonatkozó megfigyelés ad az A eseményre vonatkozóan; ehhez még $\mathbb{P}(A | \overline{B})$ is hozzá tartozik. Általánosabban: ha $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathbb{P}(B_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor egy $A \in \mathcal{A}$ eseményre vonatkozó teljes információt a $\{\mathbb{P}(A | B_n)\}_{n=1}^\infty$ feltételes valószínűségek írják le. Hogyan lehetne ezt az információt úgy megadni, hogy ne kelljen hozzá a $\mathbb{P}(B_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$ feltétel? Tekintsük a következő módon definiált $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lépcsős függvényt:

$$f(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{1}_{B_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Ez nyilván véletlen változó, sőt még a $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ események által generált $\mathcal{F}$ σ -algebrára nézve is mérhető. Az $\mathcal{F}$ σ -algebra éppen a $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ eseményekből képezett összes megszámlálható unióból áll. Valóban,

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{\ell \in F} B_\ell : F \subset \mathbb{N}, F \text{ megszámlálható} \right\}, \quad (8.1)$$

ahol $\bigcup_{\ell \in \emptyset} B_\ell := \emptyset$, ugyanis a jobboldalon levő halmazrendszer egy σ -algebra, hiszen

- (i) tartalmazza az Ω -t, mivel $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$,
- (ii) ha tartalmazza az $A = \bigcup_{\ell \in F} B_\ell$ halmazt, ahol $F \subset \mathbb{N}$ megszámlálható, akkor $\Omega \setminus A = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N} \setminus F} B_\ell$, ahol $\mathbb{N} \setminus F$ megszámlálható,
- (iii) zárt a megszámlálható unióképzésre is, mert megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Továbbá, a 3.7. Tétel (xi) része alapján

$$\mathbb{E}(|f|) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(\mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{1}_{B_n}) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A) < \infty.$$

Így az f véletlen változót a 8.1. Lemma (iii) része alapján egyértelműen meghatározzák az $\{\mathbb{E}(f \mathbb{1}_B) : B \in \mathcal{F}\}$ várható értékek, ugyanis $\mathcal{F}$ -ben az egyedüli $\mathbb{P}$ -null mértékű halmaz az üreshalmaz. Vegyük észre továbbá, hogy az $\{\mathbb{E}(f \mathbb{1}_B) : B \in \mathcal{F}\}$ halmaz nem feltétlenül megszámlálható. Továbbá, ha $B \in \mathcal{F}$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén vagy $B_n \subset B$ (és így $B_n \cap B = B_n$) vagy pedig $B_n \cap B = \emptyset$, ezért $1 = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{B_n}$ alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f \mathbb{1}_B) &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(f \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{B_n}) = \sum_{\{n: B_n \subset B\}} \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B \cap B_n) = \sum_{\{n: B_n \subset B\}} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(B_n)} \mathbb{P}(B_n) \\ &= \sum_{\{n: B_n \subset B\}} \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B). \end{aligned}$$

Tehát az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változót egyértelműen meghatározza a következő két tulajdonság: $\mathcal{F}$ -mérhető, és minden $B \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(f \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)$. Ilyen f függvény olyan $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ teljes eseményrendszer esetén is létezik, melynél nem feltétlenül teljesül $\mathbb{P}(B_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, de ekkor f nem lesz egyértelműen meghatározott, csak $\mathcal{F}$ -mérhető $\mathbb{P}$ -nullmértékű halmaz erejéig.

Hasonló gondolatmenet érvényes a feltételes várható értékre is. Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Ha $B \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor definiálható az

$$\mathbb{E}(X | B) := \int_\Omega X(\omega) Q_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \quad (8.2)$$

feltételes várható érték, ahol a $Q_B: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, $Q_B(A) := \mathbb{P}(A | B)$ halmazfüggvény valószínűségi mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren. Felhívjuk a figyelmet, hogy ha $B \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor $\mathbb{E}(X | B)$ nem más, mint X -nek a B halmazon vett $\mathbb{P}$ -szerinti integrálátlaga. A Q_B valószínűségi mérték abszolút folytonos $\mathbb{P}$ -re nézve, és Q_B -nek $\mathbb{P}$ -re vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja $\frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{1}_B(\omega)$, $\omega \in \Omega$, formálisan $Q_B(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$. Speciálisan, ha például $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$ alakú, ahol $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, és $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X(\omega) Q_B(d\omega) &= \sum_{i=1}^n c_i Q_B(A_i) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}(A_i | B) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i \cap B}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_{\Omega} (X \mathbb{1}_B)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B). \end{aligned}$$

Ha $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathbb{P}(B_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor az X véletlen változó várható értékére vonatkozó teljes információt a $\{\mathbb{E}(X | B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ feltételes várható értékek írják le. Ennek az információnak a megadásához tekintsük a következő módon definiált $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lépcsős függvényt:

$$g(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X | B_n) \mathbb{1}_{B_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Ez is nyilván véletlen változó, és még a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ események által generált $\mathcal{F}$ σ -algebrára nézve is mérhető. Továbbá, a 3.7. Tétel (xi) része alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|g|) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | B_n) \mathbb{1}_{B_n}|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | B_n) \mathbb{1}_{B_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X| | B_n) \mathbb{P}(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} |X|(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} |X|(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(|X|) < \infty. \end{aligned}$$

Így a g véletlen változót a 8.1. Lemma (iii) része alapján egyértelműen meghatározzák az $\{\mathbb{E}(g \mathbb{1}_B) : B \in \mathcal{F}\}$ várható értékek, ugyanis $\mathcal{F}$ -ben az egyedüli $\mathbb{P}$ -null mértékű halmaz az üreshalmaz. Továbbá, ha $B \in \mathcal{F}$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén vagy $B_n \subset B$, vagy pedig $B_n \cap B = \emptyset$, ezért (8.2) és $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}$ alapján,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g \mathbb{1}_B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(g \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{B_n}) = \sum_{\{n: B_n \subset B\}} \mathbb{E}(X | B_n) \mathbb{P}(B \cap B_n) \\ &= \sum_{\{n: B_n \subset B\}} \int_{B_n} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B). \end{aligned}$$

Tehát a $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változót egyértelműen meghatározza a következő két tulajdonság: $\mathcal{F}$ -mérhető, és minden $B \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(g \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B)$.

Az előzőek motiválják a σ -algebrára vonatkozó feltételes várható érték definícióját.

8.2. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Azt mondjuk, hogy egy $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó az X **feltételes várható értéke az $\mathcal{F}$ feltételre nézve**, ha

- (i) $X_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$ -mérhető, $\mathbb{E}(|X_{\mathcal{F}}|) < \infty$,
- (ii) minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)$.

Megjegyezzük, hogy a 8.2. Definícióban az $\mathbb{E}(|X_{\mathcal{F}}|) < \infty$ feltétel valójában redundáns, ugyanis a definíció (ii) részében az $A = \Omega$ választással kapjuk, hogy $\mathbb{E}(X_{\mathcal{F}}) = \mathbb{E}(X)$, és így $\mathbb{E}(X_{\mathcal{F}})$ is véges, amiből a 3.6. Megjegyzés (i) része szerint $\mathbb{E}(|X_{\mathcal{F}}|) < \infty$. Megjegyezzük továbbá, hogy a fentiekben szereplő motivációs részben levő f , illetve g nem más, mint $\mathbb{1}_A$ -nak, illetve X -nek a (8.1) -beli $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozó feltételes várható értéke.

8.3. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Ekkor létezik $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ feltételes várható érték, mely $\mathbb{P}$ -m.b. egyértelműen meghatározott.

Első bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) := \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)$. Ekkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ véges (de nem feltétlenül nemnegatív), σ -additív halmazfüggvény az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhetőségi téren. Valóban, $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(\Omega) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\Omega}) = \mathbb{E}(X) < \infty$, és ha $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, akkor a dominált konvergencia tétel alapján (felhasználva az $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ feltételt):

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X \mathbb{1}_{A_n}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^m X \mathbb{1}_{A_n}\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{A_n}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A_n). \end{aligned}$$

Így $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ előjeles mérték, ugyanis $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ előáll $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}} = \mathbb{Q}_{\mathcal{F}}^{(1)} - \mathbb{Q}_{\mathcal{F}}^{(2)}$ alakban, ahol $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}^{(1)}(A) := \mathbb{E}(X^+ \mathbb{1}_A)$, $A \in \mathcal{F}$, és $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}^{(2)}(A) := \mathbb{E}(X^- \mathbb{1}_A)$, $A \in \mathcal{F}$, véges mértékek $(\Omega, \mathcal{F})$ -en. Tekintsük a $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ megszorítását is az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhetőségi térre. Ekkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}} \ll \mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ (azaz $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ abszolút folytonos $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ -re nézve, vagyis ha $A \in \mathcal{F}$ olyan, hogy $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}(A) = 0$, akkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) = 0$), ugyanis $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \int_A X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, és, ha $A \in \mathcal{F}$ olyan, hogy $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}(A) = 0$, akkor $\mathbb{P}(A) = 0$, mely az integrál tulajdonságai alapján maga után vonja, hogy $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) = 0$. Ezért a Radon-Nikodym-tétel (3.16. Tétel) alapján létezik olyan $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ -m.b. (és így $\mathbb{P}$ -m.b.) egyértelműen meghatározott $\mathcal{F}$ -mérhető $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) = \int_A X_{\mathcal{F}} d\mathbb{P}_{\mathcal{F}} = \int_A X_{\mathcal{F}} d\mathbb{P}$, vagyis $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A)$. Az $X_{\mathcal{F}}$ függvény azért lesz valós értékű, mert $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ valós értékű; továbbá a 8.1. Lemma (i) része szerint az is igaz, hogy ha X nemnegatív, akkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ nemnegatív, és így $X_{\mathcal{F}}$ is nemnegatív $\mathbb{P}$ -m.m.

Második bizonyítás. Jelölje (rögzített $\mathcal{F}$ esetén) $\mathcal{H}$ azon $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók halmazát, melyekre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és melyekhez létezik $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ feltételes várható érték. Jelölje $\mathcal{H}^+$ a $\mathcal{H}$ -beli nemnegatív véletlen változók halmazát.

Először belátjuk, hogy $\mathcal{H}$ tartalmazza az összes korlátos véletlen változót. Ha X korlátos, akkor $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nyilván $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy zárt altere az $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Hilbert-térnek, mely a $\langle \xi, \eta \rangle := \mathbb{E}(\xi\eta)$, $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, belsőszorzattal van ellátva. Jelölje $X_{\mathcal{F}}$ a X merőleges vetületét az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ altérre. Ekkor $X_{\mathcal{F}}$ nyilván $\mathcal{F}$ -mérhető és négyzetesen integrálható és így integrálható is. Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{1}_A \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ezért $X_{\mathcal{F}} - X \perp L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ miatt $\langle X_{\mathcal{F}} - X, \mathbb{1}_A \rangle = 0$, így

$$\mathbb{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \int_{\Omega} X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A d\mathbb{P} = \langle X_{\mathcal{F}}, \mathbb{1}_A \rangle = \langle X, \mathbb{1}_A \rangle = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A).$$

Tehát $X_{\mathcal{F}}$ az X -nek egy feltételes várható értéke $\mathcal{F}$ -re nézve.

Legyen $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}^+$ egy monoton növekvő sorozat. Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $X_{n,\mathcal{F}}$ a X_n egy feltételes várható értékét $\mathcal{F}$ -re nézve. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq X_{n,\mathcal{F}} \leq X_{n+1,\mathcal{F}}$ teljesül $\mathbb{P}$ -m.b., ugyanis a feltételes várható érték definíciója alapján tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mathbb{E}(X_{n,\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(X_{n+1,\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_A),$$

így, mivel $\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_A)$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(X_{n,\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(X_{n+1,\mathcal{F}} \mathbb{1}_A)$. Ezért a 8.1. Lemma (ii) része alapján $X_{n,\mathcal{F}} \leq X_{n+1,\mathcal{F}}$ $\mathbb{P}$ -m.b. és a szóban forgó $\mathbb{P}$ -nullmértékű halmaz $\mathcal{F}$ -mérhető is. Így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik az X_n -nek olyan $\tilde{X}_{n,\mathcal{F}}$ feltételes várható értéke $\mathcal{F}$ -re nézve, hogy az $\{\tilde{X}_{n,\mathcal{F}}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monoton növekvő (mindenütt). Jelölje $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Jelölje $X_{\mathcal{F}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_{n,\mathcal{F}}$. Ekkor $X_{\mathcal{F}}$ nyilván $\mathcal{F}$ -mérhető, és tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén a monoton konvergencia tétel alapján

$$\mathbb{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{X}_{n,\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A),$$

tehát $X_{\mathcal{F}}$ az X -nek egy feltételes várható értéke $\mathcal{F}$ -re nézve, azaz $X \in \mathcal{H}^+$. Mivel $\mathcal{H}$ tartalmazza az összes korlátos véletlen változót, így az előző konstrukció alapján $\mathcal{H}^+$ tartalmazza az összes $\mathbb{P}$ -integrálható nemnegatív véletlen változót (valóban az 1.17. Lemma alapján egy nemnegatív valószínűségi változóhoz létezik egyszerű valószínűségi változókból álló olyan sorozat, mely minden $\omega \in \Omega$ -ra monoton növekvően konvergál hozzá, és egy egyszerű véletlen változó korlátos). Ezért $\mathcal{H}$ nyilván tartalmazza az összes $\mathbb{P}$ -integrálható véletlen változót.

Az $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó $\mathbb{P}$ -m.b. egyértelműen meghatározott (a definíciójából következően). $\square$

8.4. Definíció. A 8.3. Tétel alapján létező $X_{\mathcal{F}}$ véletlen változó $\mathbb{P}$ szerinti ekvivalenciaosztályát, és ennek egy tetszőleges reprezentánsát is $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ fogja jelölni.

A 8.4. Definícióban az alábbi ekvivalenciareláció által indukált osztályozásról (ekvivalenciaosztályokról) van szó. Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változóról akkor mondjuk, hogy relációban állnak, ha $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. Ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció a véletlen változók halmazán, így azon indukál egy osztályozást.

A következő tételben a véletlen változók közötti egyenlőségek, illetve egyenlőtlenségek mindig $\mathbb{P}$ -m.m. értendők, ezt a legtöbb esetben külön nem írjuk ki.

8.5. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra.

- (i) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$ és $X \leq Y$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$.
- (ii) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $|\mathbb{E}(X | \mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X| | \mathcal{F})$.
- (iii) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = X$.
- (iv) Ha X $\mathcal{F}$ -mérhető és $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = X$.
- (v) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F})] = \mathbb{E}(X)$.
- (vi) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és X független $\mathcal{F}$ -től, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$.
- (vii) **Toronyszabály:** ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ rész- σ -algebra, akkor

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{F}] = \mathbb{E}(X | \mathcal{G}).$$

- (viii) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{F}) = a \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) + b \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}).$$

- (ix) Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ és Y $\mathcal{F}$ -mérhető, akkor $\mathbb{E}(XY | \mathcal{F}) = Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$.
- (x) Ha $X_1, X_2, \dots$ $\mathbb{P}$ -integrálhatók, $X_n \uparrow X$ $\mathbb{P}$ -m.b. és X is $\mathbb{P}$ -integrálható, továbbá létezik olyan Y valószínűségi változó, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ $\mathbb{P}$ -m.b.
- (xi) Ha $X_1, X_2, \dots$ $\mathbb{P}$ -integrálhatók, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b., ahol Y egy olyan valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, és $\mathbb{E}\left(\left|\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right|\right) < \infty$, akkor $\mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{F}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F})$.
- (xii) Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, és létezik olyan Y $\mathbb{P}$ -integrálható véletlen változó, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|X_n| \leq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$, és $\mathbb{E}(|X_n - X| | \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.
- (xiii) Ha $X_1, X_2, \dots$ $\mathbb{P}$ -integrálhatók, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., és $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ is $\mathbb{P}$ -integrálható, akkor $\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n | \mathcal{F}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F})$.

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F})) \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) \\ &= \mathbb{E}((Y - X) \mathbb{1}_A) \geq 0, \end{aligned}$$

amiből, felhasználva, hogy $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ és $\mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ -mérhetőek és integrálhatóak (definíció alapján), a 8.1. Lemma (ii) része alapján következik az állítás.

(ii). Következik (i)-ből, hiszen $-|X| \leq X \leq |X|$ alapján

$$\mathbb{E}(-|X| | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}),$$

és $\mathbb{E}(-|X| | \mathcal{F}) = -\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F})$ (mely a definíció alapján könnyen ellenőrizhető).

(iii). Következik a definícióból, ugyanis X $\mathcal{A}$ -mérhető, integrálható, és a 8.2. Definíció (ii) tulajdonsága triviálisan teljesül.

(iv). Hasonlóan következik a definícióból.

(v). Az $\Omega \in \mathcal{F}$ eseményre a definíció alapján teljesül

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_\Omega) = \mathbb{E}(X).$$

(vi). Nyilván a konstans $\mathbb{E}(X)$ véletlen változó $\mathcal{F}$ -mérhető, integrálható és X és $\mathcal{F}$ függetlensége miatt tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén az X és $\mathbb{1}_A$ véletlen változók függetlenek, ezért $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X) \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)$.

(vii). A definíció alapján nyilván $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ -mérhető, integrálható és tetszőleges $A \in \mathcal{G}$ esetén $A \in \mathcal{F}$ is teljesül, ezért

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A].$$

Így $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$. Az $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ egyenlőség abból következik, hogy $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ -mérhető, integrálható, és így $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ miatt $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ $\mathcal{F}$ -mérhető is, és ezért (iv) alkalmazható.

(viii). A definíció alapján nyilván $a \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) + b \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ -mérhető, integrálható és tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(a \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) + b \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})) \mathbb{1}_A] &= a \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] + b \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] \\ &= a \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] + b \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[(aX + bY) \mathbb{1}_A]. \end{aligned}$$

(ix). A definíció alapján nyilván $Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ -mérhető. Ha Y egy $\mathcal{F}$ -mérhető indikátorváltozó, azaz $Y = \mathbb{1}_B$, ahol $B \in \mathcal{F}$, akkor $XY = X \mathbb{1}_B$ is $\mathbb{P}$ -integrálható, és

$$\mathbb{E}(|Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})|) = \mathbb{E}(|\mathbb{1}_B \mathbb{E}(X | \mathcal{F})|) \leq \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{F})|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F})) = \mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{F}$ és így

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_{A \cap B}] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A \cap B}] = \mathbb{E}[Y X \mathbb{1}_A],$$

így ekkor teljesül $\mathbb{E}(XY | \mathcal{F}) = Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$. Nyilván ez teljesül $\mathcal{F}$ -mérhető indikátorváltozók véges, lineáris kombinációira is. Ha $Y \geq 0$ és $\mathcal{F}$ -mérhető, akkor az 1.17. Lemma alapján létezik $\mathcal{F}$ -mérhető indikátorváltozók véges, lineáris kombinációinak $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ monoton növekvő

sorozata úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Y_n \geq 0$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$. Ha még az is teljesül, hogy $X \geq 0$, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\right) \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\right) X \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}[Y X \mathbb{1}_A], \end{aligned}$$

ahol a második és negyedik egyenlőség a monoton konvergencia tétel következménye, ugyanis, mivel X (így $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$) és Y_n , $n \in \mathbb{N}$, nemnegatívak, a 0 integrálható alsó korlát. Továbbá az $A = \Omega$ választással

$$\mathbb{E}(|Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})|) = \mathbb{E}(Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})) = \mathbb{E}(Y X) = \mathbb{E}(|Y X|) < \infty,$$

ezért $\mathcal{F}$ -mérhető nemnegatív Y és nemnegatív X esetén is teljesül, hogy $\mathbb{E}(XY | \mathcal{F}) = Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$. Végül az $XY = (X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) = X^+Y^+ - X^+Y^- - X^-Y^+ + X^-Y^-$ felbontás alapján kapjuk az általános esetet.

(x). Mivel $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növekvő $\mathbb{P}$ -m.b., az (i) rész alapján $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ -m.b., így $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F})$ létezik $\mathbb{P}$ -m.b., és $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ -mérhető. Továbbá, az (i) és (ii) részek alapján $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \geq \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(Y | \mathcal{F})|) \leq \mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Így tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén a monoton konvergencia tétel alapján

$$\mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A].$$

Így a feltételes várható érték definíciója alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ $\mathbb{P}$ -m.m., és ezért $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ $\mathbb{P}$ -m.m., ha $n \rightarrow \infty$.

(xi). Nyilván (i) alapján, felhasználva azt is, hogy megszámlálható sok 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}\left(\inf_{n \geq m} X_n | \mathcal{F}\right) \leq \inf_{n \geq m} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}), \quad \forall m \in \mathbb{N}\right) = 1. \quad (8.3)$$

Az $Y_m := \inf_{n \geq m} X_n$, $m \in \mathbb{N}$, sorozatra teljesül, hogy

$$Y \leq Y_m \uparrow \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} X_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad \text{ha } m \rightarrow \infty,$$

ahol a feltétel miatt $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ és így Y_m , $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ -integrálhatóak. Alkalmazva (x)-et azt kapjuk, hogy $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_m | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{F})$, azaz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\inf_{n \geq m} X_n | \mathcal{F}\right) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{F}),$$

ezért (8.3) alapján

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{F}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}).$$

(xii). Nyilván elég a második állítást bizonyítani, hiszen

$$|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F})| = |\mathbb{E}(X_n - X | \mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X_n - X| | \mathcal{F}).$$

Mivel $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, a $Z_n := \sup_{m \geq n} |X_m - X|$, $n \in \mathbb{N}$ sorozatra $Z_n \downarrow 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Z_n \geq 0$, ezért (x) alapján $\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}) \downarrow 0$ $\mathbb{P}$ -m.b. A (x) rész alkalmazható, mert $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ és $|X_n| \leq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b. miatt $|X| \leq Y$, és így $|Z_n| \leq \sup_{m \geq n} (|X_m| + |X|) \leq 2Y$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq |X_n - X| \leq Z_n$, ezért (i) alapján $0 \leq \mathbb{E}(|X_n - X| | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F})$, amiből $\mathbb{E}(|X_n - X| | \mathcal{F}) \downarrow 0$ $\mathbb{P}$ -m.b.

(xiii). Következik (x)-ből. A nemnegativitás ott van kihasználva, hogy az $(X_1 + \dots + X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ részletösszeg sorozat monoton növekvően konvergál $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ -hez, és hogy a részletösszegek 0-val alulról korlátozhatóak. $\square$

8.6. Tétel. (Feltételes Jensen-egyenlőtlenség többdimenzióban) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, melyre $\mathbb{E}(\|X\|) < \infty$.

(i) Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ nemüres, konvex, zárt és $X \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) := (\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}), \dots, \mathbb{E}(X_d | \mathcal{F})) \in K \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}$$

(ii) Továbbá, ha $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ konvex és $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$, akkor $g(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})) \leq \mathbb{E}(g(X) | \mathcal{F})$.

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén alkalmazzuk az A.5. Lemmát $x = \mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega)$ és $y = X(\omega)$ szereposztással. Mivel $X \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b., azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega)^\top [\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))] \\ \geq h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))^\top [\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))] \\ \geq X(\omega)^\top [\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))] \quad \mathbb{P}\text{-m.b.} \end{aligned}$$

Feltételes várható értéket véve az $\mathcal{F}$ rész- σ -algebrára, felhasználva azt is, hogy h_K mérhető, mely az A.4. Lemmából következik, adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega)^\top [\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))] \\ \geq h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))^\top [\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))] \\ \geq \mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega)^\top [\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega))] \quad \mathbb{P}\text{-m.b.} \end{aligned}$$

Mivel az első és harmadik kifejezés megegyezik, így mindkét helyen egyenlőség van, ezért az A.5. Lemma szerint $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b.

(ii) Tekintsük a

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \mathbb{R}^d, y \in [g(x), \infty)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

zárt, konvex halmazt. Valóban konvex halmaz K , ugyanis, ha $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$, akkor $y_i \geq g(x_i)$, $i = 1, 2$, és így g konvexsége alapján, minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén,

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2,$$

amiből következik, hogy $\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in K$. A K halmaz zártága abból következik, hogy ismert, hogy $\mathbb{R}^d$ egy konvex, nyílt halmazán értelmezett valós értékű konvex függvény folytonos is. Mivel $(X, g(X)) \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\|X\|) < \infty$ és $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$, így (i) alapján $\mathbb{E}((X, g(X)) | \mathcal{F}) = (\mathbb{E}(X | \mathcal{F}), \mathbb{E}(g(X) | \mathcal{F})) \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b., ezért K definíciója szerint $\mathbb{E}(g(X) | \mathcal{F}) \geq g(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}))$ $\mathbb{P}$ -m.b. $\square$

8.7. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra. Egy $A \in \mathcal{A}$ eseménynek a **feltételes valószínűsége az $\mathcal{F}$ feltételre nézve** $\mathbb{P}(A | \mathcal{F}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{F})$.

8.8. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ekkor az X **feltételes várható értéke az Y -ra nézve** $\mathbb{E}(X | Y) := \mathbb{E}(X | \sigma(Y))$.

8.9. Lemma. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ekkor létezik olyan $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(X | Y) = f(Y)$. Ez az a $\mathbb{P}_Y$ -m.b. egyértelműen meghatározott $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén teljesül, hogy

$$\int_B f(y) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}),$$

ahol $\mathbb{P}_Y$ az Y eloszlását jelöli, azaz minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén $\mathbb{P}_Y(B) := \mathbb{P}(Y \in B)$.

Bizonyítás. Az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren $\mathbb{P}_Y$ valószínűségi mérték. Legyen továbbá minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén $\mathbb{Q}(B) := \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$. Ez véges, σ -additív (nem feltétlenül nemnegatív) halmazfüggvény az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren, melyre $\mathbb{Q}(\emptyset) = 0$, ugyanis, ha $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, akkor a dominált konvergenciatétel alapján (felhasználva, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $|\sum_{n=1}^m X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B_n)}| \leq \sum_{n=1}^m |X| \mathbb{1}_{Y^{-1}(B_n)} \leq |X|$, ahol a feltétel alapján $\mathbb{E}(|X|) < \infty$):

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B_n)}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^m X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B_n)}\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B_n)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{Q}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(B_n). \end{aligned}$$

Továbbá, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}_Y$, ugyanis

$$\mathbb{Q}(B) = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{Y^{-1}(B)} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega),$$

és mértékelméletből ismert, hogy ha $\mathbb{P}(Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}_Y(B) = 0$, akkor $\mathbb{Q}(B) = 0$. A $\mathbb{Q}$ előjeles mérték, ugyanis $\mathbb{Q}$ előáll $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1 - \mathbb{Q}_2$ alakban, ahol $\mathbb{Q}_1(B) := \mathbb{E}(X^+ \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, és $\mathbb{Q}_2(B) := \mathbb{E}(X^- \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, véges mértékek $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -n. Ezért a Radon-Nikodym-tétel (3.16. Tétel) alapján létezik olyan $\mathbb{P}_Y$ -m.b. egyértelműen meghatározott $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén $\mathbb{Q}(B) = \int_B f d\mathbb{P}_Y$, és így a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}) &= \mathbb{Q}(B) = \int_B f(x) \mathbb{P}_Y(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{1}_B(x) \mathbb{P}_Y(dx) = \int_{\Omega} f(Y(\omega)) \mathbb{1}_B(Y(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} (f \circ Y)(\omega) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{Y^{-1}(B)} (f \circ Y)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}((f \circ Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}). \end{aligned}$$

Mivel $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ (lásd 1.13. Megjegyzés (ii) része), így tetszőleges $A \in \sigma(Y)$ esetén $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}((f \circ Y) \mathbb{1}_A)$. Nyilván $f \circ Y$ $\sigma(Y)$ -mérhető, és $\mathbb{E}(|f \circ Y|) < \infty$ (mely a fentiekben $B = \mathbb{R}^d$ választással adódik az $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ feltétel alapján), így a feltételes várható érték definíciója szerint $\mathbb{E}(X | Y) = f \circ Y = f(Y)$. Ha pedig valamely $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény esetén $\mathbb{E}(X | Y) = \tilde{f}(Y)$, akkor minden $A \in \sigma(Y)$ esetén teljesül $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\tilde{f}(Y) \mathbb{1}_A)$, így minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén teljesül, hogy $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}) = \mathbb{E}(\tilde{f}(Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$, amiből a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) alapján következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(B) &= \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}) = \mathbb{E}(\tilde{f}(Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}) = \int_{\Omega} \tilde{f}(Y(\omega)) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x) \mathbb{1}_B(x) \mathbb{P}_Y(dx) = \int_B \tilde{f} d\mathbb{P}_Y, \end{aligned}$$

ezért a Radon-Nikodym-tétel egyértelműségi része alapján $\tilde{f} = f$ $\mathbb{P}_Y$ -m.m. □

8.10. Megjegyzés. (i) A 8.9. Lemma bizonyítása szerint (a 8.9. Lemmában szereplő) f nem más, mint a $\mathbb{Q}(B) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, véges, előjeles (azaz nem feltétlenül nemnegatív) mértéknek a $\mathbb{P}_Y$ -ra vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhető téren.

(ii) Ha a 8.9. Lemmában Y olyan diszkrét véletlen vektor, hogy értékkészlete $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$, akkor a $B = \{y_i\}$ választással kapjuk, hogy

$$\int_{\{y_i\}} f(y) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}), \quad i \in \mathbb{N},$$

ahol

$$\int_{\{y_i\}} f(y) \mathbb{P}_Y(dy) = f(y_i) \mathbb{P}_Y(\{y_i\}) = f(y_i) \mathbb{P}(Y = y_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Így

$$f(y_i) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}})}{\mathbb{P}(Y = y_i)} = \mathbb{E}(X | Y = y_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

és

$$\mathbb{E}(X | Y) = f(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i) \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y_i) \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}.$$

Itt $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y_i) \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}$ nem más, mint a 8.2. Definíciót megelőző motivációs részben szereplő $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a $B_i := \{Y = y_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, teljes eseményrendszerhez tartozóan. $\square$

8.11. Jelölés. A 8.9. Lemma alapján létező f függvény $\mathbb{P}_Y$ szerinti ekvivalencia-osztályát, és ennek egy tetszőleges reprezentánsát is $\mathbb{E}(X | Y = y)$ fogja jelölni.

8.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy Ω nemüres halmaz részhalmazainak $\mathcal{C}$ rendszere monoton osztály, ha $A_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, és $A_n \uparrow A$, amint $n \rightarrow \infty$ esetén $A \in \mathcal{C}$ fennáll.

8.13. Tétel. (Monoton osztály tétel) Legyen $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{H}$ az Ω részhalmazainak egy halmazalgebrája, $\mathcal{C}$ egy monoton osztálya, hogy $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$. Ekkor $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}$.

8.14. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor.

- (i) Ha $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|Xg(Y)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(Xg(Y) | Y = y) = g(y) \mathbb{E}(X | Y = y)$.
- (ii) Ha X és Y függetlenek, és $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(X, Y) | Y = y) = \mathbb{E}(g(X, y) | Y = y) = \mathbb{E}(g(X, y))$ és $\mathbb{E}(g(X, Y) | Y) = \mathbb{E}(g(X, y))|_{y=Y}$.
- (iii) Ha $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(X, Y) | Y) = \mathbb{E}(g(X, y) | Y)|_{y=Y}$.

Bizonyítás. (i). Következik a 8.5. Tétel (ix) pontjából ugyanis $g(Y)$ $\sigma(Y)$ -mérhető.

(ii). Elég azt bizonyítani, hogy az állítás teljesül egy mérhető halmaz indikátorfüggvényére, azaz amikor $g = \mathbb{1}_B$ valamely $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, ugyanis ebből már levezethető az állítás a 8.5. Tétel (ix) részének bizonyításában használt gondolatmenettel. Tehát elég azt bizonyítani, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X, Y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X, y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X, y)). \quad (8.4)$$

A 8.5. Tétel (xiii) pontja alapján azok a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -beli halmazok, melyekre teljesül (8.4) monoton osztályt alkotnak. Valóban, ha B_n , $n \in \mathbb{N}$, olyan Borel-mérhető részhalmazai $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ -nek, hogy $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}(X, Y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}(X, y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_n}(X, y))$, $n \in \mathbb{N}$, és $B_n \uparrow B$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor mivel

$$\mathbb{1}_{B_{n+1}} - \mathbb{1}_{B_n} = \mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n},$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, Y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, Y) | Y = y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, y) | Y = y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, y)),$$

és a 8.5. Tétel (xiii) pontja alapján

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, Y) | Y = y \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, y) | Y = y \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_{n+1} \setminus B_n}(X, y) \right).$$

Mivel

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{n+1} \setminus B_n) \right),$$

és $B_1, B_{n+1} \setminus B_n, n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunktak, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X, Y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X, y) | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X, y)).$$

Ezért a monoton osztály tétel alapján elég (8.4)-t egy olyan halmazalgebrán belátni, mely generálja a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ -algebrát. Megjegyezzük, hogy a 8.5. Tétel (xiii) pontja alapján az is belátható, hogy azok a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -beli halmazok, melyekre teljesül (8.4) σ -algebrát alkotnak, és így a Carathéodory-féle kiterjesztési tételt is használhatnánk. A monoton osztály tulajdonságot könnyebb belátni, mint azt, hogy a szóban forgó halmazrendszer σ -algebrát alkot.

Az előzőekben említett halmazalgebrát alkotnak a $C \times D$ ($C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) alakú halmazok páronként diszjunkt, véges uniói. Valóban, a

$$\mathcal{H} := \left\{ \text{a } C \times D \text{ alakú halmazok páronként diszjunkt, véges uniói, ahol } C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}$$

halmazalgebra, ugyanis

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,
- zárt a komplementerképzésre nézve. Azt ellenőrizzük le, hogy ha $C \times D \in \mathcal{H}$, ahol $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, akkor $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \setminus (C \times D) \in \mathcal{H}$. Ekkor

$$\begin{aligned} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \setminus (C \times D) &= (\overline{C} \times \mathbb{R}^d) \cup (\mathbb{R} \times \overline{D}) = (\overline{C} \times D) \cup (\overline{C} \times \overline{D}) \cup (C \times \overline{D}) \cup (\overline{C} \times \overline{D}) \\ &= (\overline{C} \times D) \cup (\overline{C} \times \overline{D}) \cup (C \times \overline{D}), \end{aligned}$$

mely unió véges sok páronként diszjunkt, megfelelő típusú halmaz uniója.

- zárt a véges unió képzésre. Azt ellenőrizzük le, hogy ha $C \times D \in \mathcal{H}$ és $\tilde{C} \times \tilde{D} \in \mathcal{H}$, ahol $C, \tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $D, \tilde{D} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, akkor $(C \times D) \cup (\tilde{C} \times \tilde{D}) \in \mathcal{H}$. Ekkor

$$\begin{aligned} & (C \times D) \cup (\tilde{C} \times \tilde{D}) \\ &= \left([(C \setminus \tilde{C}) \cup (C \cap \tilde{C})] \times [(D \setminus \tilde{D}) \cup (D \cap \tilde{D})] \right) \\ & \quad \cup \left([(\tilde{C} \setminus C) \cup (\tilde{C} \cap C)] \times [(\tilde{D} \setminus D) \cup (\tilde{D} \cap D)] \right) \\ &= [(C \setminus \tilde{C}) \times (D \setminus \tilde{D})] \cup [(C \setminus \tilde{C}) \times (D \cap \tilde{D})] \cup [(C \cap \tilde{C}) \times (D \setminus \tilde{D})] \cup [(C \cap \tilde{C}) \times (D \cap \tilde{D})] \\ & \quad \cup [(\tilde{C} \setminus C) \times (\tilde{D} \setminus D)] \cup [(\tilde{C} \setminus C) \times (\tilde{D} \cap D)] \cup [(\tilde{C} \cap C) \times (\tilde{D} \setminus D)], \end{aligned}$$

mely unió véges sok páronként diszjunkt, megfelelő típusú halmaz uniója.

Ezért elég azt belátni, hogy (8.4) teljesül a $B = C \times D$ Borel-halmazokra, ahol $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. A 8.9. Lemma alapján ez pedig azért igaz, mert az

$$\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C \times D}(X, y)) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_C(X) \mathbb{1}_D(y)] = \mathbb{P}(X \in C) \mathbb{1}_D(y)$$

függvény mérhető, és tetszőleges $\tilde{D} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén teljesül, hogy

$$\int_{\tilde{D}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C \times D}(X, y)) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C \times D}(X, Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(\tilde{D})}),$$

hiszen a baloldal

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_C(X) \mathbb{1}_D(y)) \mathbb{P}_Y(dy) &= \int_{\tilde{D} \cap D} \mathbb{E}(\mathbb{1}_C(X)) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{P}(X \in C) \mathbb{P}_Y(\tilde{D} \cap D) \\ &= \mathbb{P}(X \in C) \mathbb{P}(Y \in \tilde{D} \cap D), \end{aligned}$$

a jobboldal pedig X és Y függetlensége miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{1}_C(X) \mathbb{1}_D(Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(\tilde{D})}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_C(X) \mathbb{1}_{\tilde{D} \cap D}(Y)) = \mathbb{P}(X \in C, Y \in \tilde{D} \cap D) \\ &= \mathbb{P}(X \in C) \mathbb{P}(Y \in \tilde{D} \cap D). \end{aligned}$$

Így a 8.9. Lemma alapján $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{C \times D}(X, Y) | Y) = f(Y)$, ahol $f(y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C \times D}(X, y))$, $y \in \mathbb{R}$.

(iii). Hasonlóan bizonyítható, mint a (ii). $\square$

8.15. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Egy $A \in \mathcal{A}$ eseménynek a **feltételes valószínűsége az Y -ra nézve**

$$\mathbb{P}(A | Y) := \mathbb{P}(A | \sigma(Y)) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \sigma(Y)).$$

A 8.9. Lemma alapján létezik olyan $\mathbb{P}_Y$ -m.b. egyértelműen meghatározott $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $\mathbb{P}(A | Y) = f(Y)$. Ezen f függvény $\mathbb{P}_Y$ -szerinti ekvivalencia osztályát és ennek egy tetszőleges reprezentációját is $\mathbb{P}(A | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | Y = y)$ fogja jelölni összhangban a 8.11. Jelöléssel.

8.16. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje (X, Y) sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$. Defináljuk az $f_{X|Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ függvényt a következő módon:

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_Y az Y sűrűségfüggvénye, és $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tetszőleges sűrűségfüggvény. Ekkor érvényesek a következő állítások:

- (i) Bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$ függvény sűrűségfüggvény.
- (ii) Bármely $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X) | Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx$, $\mathbb{P}_Y$ -m.m. $y \in \mathbb{R}$ esetén.
- (iii) Ha $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, melyre $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(X) | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx$ $\mathbb{P}_Y$ -m.m. $y \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. (i). A szóban forgó függvény mérhetősége abból következik, hogy $f_{X,Y}$ és h mérhetőek (hiszen sűrűségfüggvények). A szóban forgó függvény integrálhatósága abból következik, hogy $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$, $y \in \mathbb{R}$, illetve abból, hogy h sűrűségfüggvény.

(ii). Speciális esete (iii)-nak a $g = \mathbb{1}_A$ függvénnyel.

(iii). Nyilván $\mathbb{R} \ni y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx$ mérhető a Fubini-tétel alapján, ugyanis g mérhetősége miatt $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto g(x) f_{X|Y}(x|y)$ mérhető függvény. Továbbá minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \int_B \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx \right) \mathbb{P}_Y(dy) &= \int_B \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X,Y}(x,y) dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int_{B \cap \{f_Y \neq 0\}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mathbb{1}_{B \cap \{f_Y \neq 0\}}(y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \mathbb{E}(g(X) \mathbb{1}_B(Y) \mathbb{1}_{\{f_Y(Y) \neq 0\}}) = \mathbb{E}(g(X) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}), \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőség abból következik, hogy

$$\mathbb{P}(f_Y(Y) = 0) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{f_Y(Y)=0\}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f_Y=0\}}(y) f_Y(y) dy = 0,$$

ugyanis $\mathbb{1}_{\{f_Y=0\}}(y) f_Y(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$. Így a 8.9. Lemma alapján következik az állítás. $\square$

8.17. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos valószínűségi változó. A 8.16. Tételben definiált $f_{X|Y}$ függvényt az X -nek Y -ra vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

8.18. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó. Ekkor érvényesek a következő állítások:

(i) **Teljes valószínűség tétele:** tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre teljesül

$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A | Y = y) \mathbb{P}_Y(dy).$$

Speciálisan, ha Y abszolút folytonos és f_Y jelöli a sűrűségfüggvényét, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A | Y = y) f_Y(y) dy.$$

(ii) **Teljes várható érték tétele:** ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y) \mathbb{P}_Y(dy).$$

Speciálisan, ha Y abszolút folytonos és f_Y jelöli a sűrűségfüggvényét, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y) f_Y(y) dy.$$

Bizonyítás. (i). Speciális esete (ii)-nek az $X = \mathbb{1}_A$ indikátorfüggvénnyel.

(ii). Következik a 8.5. Tétel (v) pontjából és a 8.9. Lemmából, ugyanis

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y)) = \mathbb{E}(f(Y)) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(X | Y = y) \mathbb{P}_Y(dy),$$

ahol $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 8.9. Lemma szerint $\mathbb{P}_Y$ -m.b. egyértelműen meghatározott függvény. $\square$

8.19. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje (X, Y) sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$, az X sűrűségfüggvényét f_X , az Y -nak X -re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét pedig $f_{Y|X}$. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel-halmaz esetén érvényes **Bayes tétele:**

$$\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \frac{\int_A f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx} \quad \mathbb{P}_Y\text{-m.m. } y \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. Az állítás következik a 8.16. Tétel (ii) pontjából. Valóban,

$$f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} f_{Y,X}(y, x) & \text{ha } f_X(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f_X(x) = 0, \end{cases}$$

és $\int_B f_X(x) dx = \mathbb{P}(X \in B) = 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, esetén

$$\int_{\mathbb{R}^d \times B} f_{Y,X}(y, x) dy dx = \mathbb{P}((Y, X) \in \mathbb{R}^d \times B) \leq \mathbb{P}(X \in B) = 0$$

is fennáll, amiből $f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = f_{Y,X}(y, x)$ Lebesgue-m.m. $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, és így $f_Y(y) \neq 0$ esetén

$$\frac{\int_A f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \, dx} = \frac{\int_A f_{Y,X}(y, x) \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y,X}(y, x) \, dx} = \frac{\int_A f_{Y,X}(y, x) \, dx}{f_Y(y)} = \int_A f_{X|Y}(x|y) \, dx.$$

Mivel $\mathbb{P}_Y(f_Y \neq 0) = \mathbb{P}(f_Y(Y) \neq 0) = 1$ (lásd a 8.16. Tétel (iii) részének bizonyítását) kapjuk az állítást. $\square$

8.20. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy egy $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó az X **négyzetes középben vett legjobb $\mathcal{F}$ -mérhető becslése**, ha

- (i) Y $\mathcal{F}$ -mérhető, négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható,
- (ii) tetszőleges $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -mérhető, négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható valószínűségi változó esetén $\mathbb{E}((X - Y)^2) \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$.

Tulajdonképpen az $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vektorhoz keresünk olyan $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vektort, melyre bármely $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ esetén teljesül, hogy $\|X - Y\|_{L^2} \leq \|X - Z\|_{L^2}$, ahol $\|\xi\|_{L^2} := (\mathbb{E}(\xi^2))^{1/2}$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; ez nyilván X merőleges vetülete az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zárt, lineáris altérre.

8.21. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható valószínűségi változó. Ekkor létezik X -nek négyzetes középben vett legjobb $\mathcal{F}$ -mérhető becslése, mégpedig $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ (mely négyzetesen integrálható).

Bizonyítás. Legyen $Y := \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$, mely a 8.3. Tétel második bizonyítása alapján létezik, $\mathcal{F}$ -mérhető, és négyzetesen integrálható. Ekkor bármely $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ esetén

$$\mathbb{E}((X - Z)^2) = \mathbb{E} \left[((X - Y) + (Y - Z))^2 \right] = \mathbb{E}((X - Y)^2) + 2 \mathbb{E}[(X - Y)(Y - Z)] + \mathbb{E}((Y - Z)^2).$$

Mivel Y és Z is $\mathcal{F}$ -mérhető, így a 8.5. Tétel (ix) pontjának segítségével

$$\mathbb{E}[(X - Y)(Y - Z)] = \mathbb{E} \left(\mathbb{E}[(X - Y)(Y - Z) | \mathcal{F}] \right) = \mathbb{E} \left((Y - Z) \mathbb{E}[X - Y | \mathcal{F}] \right) = 0,$$

hiszen $\mathbb{E}[X - Y | \mathcal{F}] = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}) = Y - Y = 0$. Ezért

$$\mathbb{E}((X - Z)^2) = \mathbb{E}((X - Y)^2) + \mathbb{E}((Y - Z)^2) \geq \mathbb{E}((X - Y)^2),$$

amiből következik az állítás. $\square$

8.22. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $X, Y_1, \dots, Y_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható véletlen változók. Azt mondjuk, hogy egy $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó az X **négyzetes középben vett legjobb lineáris becslése az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján**, ha

(i) Y benne van az $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Hilbert-térnek abban a $L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ zárt, lineáris altérben, melyet az $Y_1, \dots, Y_n$ lineáris kombinációi alkotnak,

(ii) tetszőleges $Z \in L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ esetén $\mathbb{E}((X - Y)^2) \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$.

Tulajdonképpen az $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vektorhoz keresünk olyan $Y \in L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ vektort, melyre bármely $Z \in L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ esetén teljesül $\|X - Y\|_{L^2} \leq \|X - Z\|_{L^2}$; ez nyilván X merőleges vetülete az $L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ zárt, lineáris altérre. Mivel $L^2(Y_1, \dots, Y_n) \subset L^2(\Omega, \sigma(Y_1, \dots, Y_n), \mathbb{P})$, ezért az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján vett legjobb lineáris becslés általában „rosszabb”, mint a legjobb $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -mérhető becslés (mely a 8.21. Tétel és a 8.9. Lemma alapján $f(Y_1, \dots, Y_n)$ alakú valamely $\mathbb{P}_{Y_1, \dots, Y_n}$ -m.m. egyértelműen meghatározott $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvénnyel).

8.23. Tétel. Legyen $(X, Y_1, \dots, Y_n)$ egy $n + 1$ -dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1) = \dots = \mathbb{E}(Y_n) = 0$. Ekkor X négyzetes középben vett legjobb lineáris becslése az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján megegyezik a legjobb $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -mérhető becsléssel, így szintén $\mathbb{E}(X | Y_1, \dots, Y_n)$.

Bizonyítás. Mivel $X, Y_1, \dots, Y_n$ normális eloszlásúak, négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálhatóak. Jelölje Y az X négyzetes középben vett legjobb lineáris becslését az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján. Belátjuk, hogy X és Y teljesíti a 8.20. Definíció feltételeit az $\mathcal{F} := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ választással, melyből következik az állítás. Nyilván, Y $\mathcal{F}$ -mérhető és négyzetesen integrálható, hiszen $\mathcal{F}$ -mérhető, négyzetesen integrálható véletlen változók (véges) lineáris kombinációja. Továbbá, tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\langle X - Y, Y_i \rangle_{L^2} = 0$, ahol $\langle \xi, \eta \rangle_{L^2} := \mathbb{E}(\xi\eta)$, $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Így, felhasználva, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1) = \dots = \mathbb{E}(Y_n) = 0$, kapjuk, hogy $\text{Cov}(X - Y, Y_i) = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Mivel $(X, Y_1, \dots, Y_n)$ normális eloszlású, a 6.7. Következmény szerint $X, Y_1, \dots, Y_n$ tetszőleges lineáris kombinációja normális eloszlású. Felhasználva, hogy Y az $Y_1, \dots, Y_n$ valamely lineáris kombinációja, újra a 6.7. Következmény alapján $(X - Y, Y_1, \dots, Y_n)$ is normális eloszlású (hiszen a koordinátáik tetszőleges lineáris kombinációja $X, Y_1, \dots, Y_n$ valamely lineáris kombinációja). Így a 6.8. Következmény szerint $X - Y$ és $(Y_1, \dots, Y_n)$ függetlenek, ezért $\mathbb{E}(X - Y | \sigma(Y_1, \dots, Y_n)) = \mathbb{E}(X - Y) = 0$. Ezért alkalmazható a 8.21. Tétel bizonyításában használt gondolatmenet, amivel azt kapjuk, hogy bármely $Z \in L^2(\Omega, \sigma(Y_1, \dots, Y_n), \mathbb{P})$ esetén

$$\mathbb{E}((X - Z)^2) = \mathbb{E}((X - Y)^2) + \mathbb{E}((Y - Z)^2) \geq \mathbb{E}((X - Y)^2),$$

amiből következik az állítás. □

8.24. Következmény. Legyen (X, Y) egy kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2(Y) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{E}(X | Y) = \mathbb{E}(X) + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}^2(Y)}(Y - \mathbb{E}(Y)).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$. A 8.23. Tétel szerint $\mathbb{E}(X | Y)$ az X merőleges vetülete a $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -beli $\{cY : c \in \mathbb{R}\}$ zárt, lineáris altérre, így $\mathbb{E}(X | Y) = cY$ valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén. Továbbá $X - \mathbb{E}(X | Y) \perp L^2(\Omega, \sigma(Y), \mathbb{P})$ miatt $\langle X - cY, Y \rangle_{L^2} = 0$, így $\mathbb{E}((X - cY)Y) = 0$, azaz $\mathbb{E}(XY) = c \mathbb{E}(Y^2)$, amiből $c = \text{Cov}(X, Y) / \mathbb{D}^2(Y)$, és így kapjuk az állítást.

Az általános esetben legyen $X' := X - \mathbb{E}(X)$ és $Y' := Y - \mathbb{E}(Y)$. Ekkor $\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(Y') = 0$, és az előzőek alapján

$$\mathbb{E}(X' | Y') = \frac{\text{Cov}(X', Y')}{\mathbb{D}^2(Y')} Y'.$$

Mivel $\sigma(Y) = \sigma(Y - \mathbb{E}(Y)) = \sigma(Y')$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X' | Y') = \mathbb{E}(X' | Y) = \mathbb{E}(X | Y) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) | Y) = \mathbb{E}(X | Y) - \mathbb{E}(X),$$

amiből

$$\mathbb{E}(X | Y) = \mathbb{E}(X) + \frac{\text{Cov}(X', Y')}{\mathbb{D}^2(Y')} (Y - \mathbb{E}(Y)).$$

Felhasználva továbbá, hogy $\frac{\text{Cov}(X', Y')}{\mathbb{D}^2(Y')} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}^2(Y)}$, kapjuk az általános esetben is a bizonyítandó állítást. $\square$

8.25. Megjegyzés. Legyen (X, Y) egy kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy (X, Y) kovariancia mátrixa invertálható, azaz $\mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y) - (\text{Cov}(X, Y))^2 > 0$. Ekkor X feltételes eloszlása az $Y = y$ feltételre vonatkozóan normális eloszlás, mégpedig

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(X | Y = y), \mathbb{D}^2(X) - (\text{Cov}(X, Y))^2 / \mathbb{D}^2(Y)\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(X) + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}^2(Y)}(y - \mathbb{E}(Y)), \mathbb{D}^2(X) - \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{\mathbb{D}^2(Y)}\right), \end{aligned}$$

ahol $y \in \mathbb{R}$. Felhívjuk a figyelmet, hogy X -nek az $Y = y$ feltételre vonatkozó $\mathbb{D}^2(X | Y = y)$ feltételes szórásnégyzete nem függ y -től. A bizonyítás gondolatmenete a következő. A 8.9. Lemma alapján tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}(X < x | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X < x\}} | Y = y) = f(y),$$

ahol $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az a $\mathbb{P}_Y$ -m.m. $y \in \mathbb{R}$ esetén egyértelműen meghatározott függvény, melyre

$$\int_B f(y) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Mivel (X, Y) kovariancia mátrixa invertálható, ezért a 6.3. Tétel alapján (X, Y) abszolút folytonos eloszlású, így a 8.16. Tétel (ii) része szerint

$$f(y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u | y) du, \quad \mathbb{P}_Y\text{-m.m. } y \in \mathbb{R},$$

ahol

$$f_{X|Y}(u|y) = \frac{f_{X,Y}(u,y)}{f_Y(y)}, \quad u, y \in \mathbb{R}.$$

□

A fejezet hátralevő részében a reguláris feltételes eloszlással és reguláris feltételes eloszlás-függvénnyel foglalkozunk.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra. Legyen $A \in \mathcal{A}$ egy esemény. Ekkor a 8.5. Tétel (i) része alapján, felhasználva, hogy $\mathbb{1}_A \in [0,1]$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{F}) \in [0,1] \quad \mathbb{P}\text{-m.b.} \quad (8.5)$$

Hangsúlyozzuk, hogy (8.5) csak $\mathbb{P}$ -majdnem biztosan igaz. Esetlegesen azt gondolhatnánk, hogy létezik olyan $\mathcal{N} \in \mathcal{A}$, hogy $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$ és $\mathbb{P}(A | \mathcal{F})(\omega) \in [0,1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ és $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ esetén. Azonban általában még ez sem teljesül, melynek magyarázata a következő. Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ egy esemény legyen

$$\mathcal{N}_A := \{\omega \in \Omega : \mathbb{P}(A | \mathcal{F})(\omega) \notin [0,1]\}.$$

Az előzőek alapján $\mathcal{N}_A \in \mathcal{A}$ és $\mathbb{P}(\mathcal{N}_A) = 0$. Továbbá, a "kivételes" halmaz $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{N}_A$, mely azonban nem biztos, hogy esemény, mert a fenti unió nem biztos, hogy megszámlálható (hiszen egy szigma-algebra számossága vagy véges vagy legalább kontinuum), és a nem megszámlálható unióképzés művelete egy σ -algebrából kivezethet.

Legyenek továbbá $X_n, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ -integrálható nemnegatív véletlen változók, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ is $\mathbb{P}$ -integrálható. Ekkor a 8.5. Tétel (xiii) része alapján

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n | \mathcal{F}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}$$

Speciálisan, ha $B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, páronként diszjunkt események, akkor

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n | \mathcal{F}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{F}) \quad \mathbb{P}\text{-m.b.} \quad (8.6)$$

Hasonlóan az előzőekhez, hangsúlyozzuk, hogy (8.6) csak $\mathbb{P}$ -majdnem biztosan igaz, és hogy egy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén a $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathbb{P}(B | \mathcal{F})(\omega)$ leképezés nem feltétlenül (valószínűségi) mérték. Esetlegesen azt gondolhatnánk, hogy létezik olyan $\mathcal{N} \in \mathcal{A}$, hogy $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$ és $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathbb{P}(B | \mathcal{F})(\omega)$ (valószínűségi) mérték tetszőleges $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ esetén. Azonban általában még ez sem teljesül, melynek magyarázata a következő. Tetszőleges páronként diszjunkt $B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, események esetén legyen

$$\mathcal{N}((B_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \left\{ \omega \in \Omega : \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n | \mathcal{F}\right)(\omega) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{F})(\omega) \right\}.$$

Az előzőek alapján $\mathcal{N}((B_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{A}$ és $\mathbb{P}(\mathcal{N}((B_n)_{n \in \mathbb{N}})) = 0$. Továbbá, a "kivételes" halmaz

$$\bigcup_{\{B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}: \text{páronként diszjunktak}\}} \mathcal{N}((B_n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

mely azonban nem biztos, hogy esemény, mert a fenti unió nem biztos, hogy megszámlálható, és a nem megszámlálható unióképzés művelete egy σ -algebrából kivezethet. Az alább bevezetendő reguláris feltételes eloszlás fogalma a fenti problémákat hidalja át.

8.26. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Egy $\nu: \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$ leképezést az X véletlen változó $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozó reguláris feltételes eloszlásának nevezünk, ha

- (i) tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \nu(\omega, B)$ leképezés valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en,
- (ii) tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén, az $\Omega \ni \omega \mapsto \nu(\omega, B)$ leképezés a $\mathbb{P}(X \in B \mid \mathcal{F})$ feltételes valószínűség egy reprezentánsa, azaz $\nu(\omega, B) = \mathbb{P}(X \in B \mid \mathcal{F})(\omega)$ $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén.

8.27. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Egy $F: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ leképezést az X véletlen változó $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozó reguláris feltételes eloszlásfüggvényének nevezünk, ha

- (i) tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén, az $\mathbb{R} \ni x \mapsto F(\omega, x)$ leképezés eloszlásfüggvény,
- (ii) tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, az $\Omega \ni \omega \mapsto F(\omega, x)$ leképezés a $\mathbb{P}(X < x \mid \mathcal{F})$ feltételes valószínűség egy reprezentánsa, azaz $F(\omega, x) = \mathbb{P}(X < x \mid \mathcal{F})(\omega)$ $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén.

8.28. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Ekkor X -nek létezik az $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozóan reguláris feltételes eloszlása és reguláris feltételes eloszlásfüggvénye is.

Bizonyítás. Tetszőleges $r \in \mathbb{Q}$ és $\omega \in \Omega$ esetén legyen

$$F_r(\omega) := \mathbb{P}(X < r \mid \mathcal{F})(\omega).$$

Jelölje $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a racionális számok egy felsorolását. Tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$A_i := \{\omega \in \Omega : F_{r_i}(\omega) \notin [0,1]\}.$$

Ekkor $A_i \in \mathcal{A}$, hogy $\mathbb{P}(A_i) = 0$ és $F_{r_i}(\omega) \in [0,1]$ tetszőleges $\omega \in \Omega \setminus A_i$ esetén. Ha $r_i, r_j \in \mathbb{Q}$ olyanok, hogy $r_i < r_j$, akkor

$$F_{r_i}(\omega) = \mathbb{P}(X < r_i \mid \mathcal{F})(\omega) \leq \mathbb{P}(X < r_j \mid \mathcal{F})(\omega) = F_{r_j}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega,$$

és így

$$A_{i,j} := \{\omega \in \Omega : F_{r_j}(\omega) < F_{r_i}(\omega)\} \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A_{i,j}) = 0.$$

Ezért

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_{i,j} \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A) = 0.$$

Legyen továbbá

$$B_i := \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} F_{r_i-1/n}(\omega) \neq F_{r_i}(\omega) \right\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

és $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Mivel $\mathbb{1}_{(-\infty, r_i-1/n)} \uparrow \mathbb{1}_{(-\infty, r_i)}$ ha $n \rightarrow \infty$ tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ esetén, a 8.5. Tétel (x) része alapján (feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tétel) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{r_i-1/n}(\omega) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, r_i-1/n)}(X) | \mathcal{F})(\omega) \\ &\uparrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, r_i)}(X) | \mathcal{F})(\omega) = F_{r_i}(\omega) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty \text{ } \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \text{ esetén.} \end{aligned}$$

Így $B_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{P}(B_i) = 0$, $i \in \mathbb{N}$, amiből következik az is, hogy $B \in \mathcal{A}$ és $\mathbb{P}(B) = 0$.

Legyen továbbá

$$C := \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\omega) \neq 1 \right\} \cup \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow -\infty} F_n(\omega) \neq 0 \right\}.$$

Mivel $\{X < n\} \uparrow \Omega$, ha $n \rightarrow \infty$ és $\{X < n\} \downarrow \emptyset$, ha $n \rightarrow -\infty$, kapjuk, hogy

$$F_n(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, n)}(X) | \mathcal{F})(\omega) \uparrow \mathbb{E}(1 | \mathcal{F})(\omega) = 1 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty \text{ } \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \text{ esetén,}$$

és

$$F_n(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty, n)}(X) | \mathcal{F})(\omega) \downarrow \mathbb{E}(0 | \mathcal{F})(\omega) = 0 \quad \text{ha } n \rightarrow -\infty \text{ } \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Így $C \in \mathcal{A}$ és $\mathbb{P}(C) = 0$.

Tekintsük az $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F(\omega, x) := \begin{cases} \sup\{F_r(\omega) : r < x, r \in \mathbb{Q}\} = \lim_{r \uparrow x, r \in \mathbb{Q}} F_r(x) & \text{ha } \omega \notin A \cup B \cup C, \\ G(x) & \text{ha } \omega \in A \cup B \cup C, \end{cases} \quad (8.7)$$

függvényt, ahol $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ egy tetszőleges eloszlásfüggvény. Belátjuk, hogy F teljesíti a 8.27. Definíció feltételeit, és így F egy reguláris feltételes eloszlásfüggvénye ξ -nek az $\mathcal{F}$ σ -algebrára nézve.

A konstrukció miatt

$$\mathbb{P}(X < r | \mathcal{F})(\omega) = F_r(\omega) = F(\omega, r), \quad \omega \notin A \cup B \cup C, \quad r \in \mathbb{Q}. \quad (8.8)$$

Először a 8.27. Definíció (i) feltételét ellenőrizzük le, azaz, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto F(\omega, x)$ leképezés eloszlásfüggvény. Például a monoton növekvőséget az alábbi módon kaphatjuk. Ha $r < s$, $r, s \in \mathbb{Q}$, akkor az A halmaz megválasztása miatt $F_r(\omega) \leq F_s(\omega)$ tetszőleges $\omega \notin A \cup B \cup C$ esetén, amiből adódik, hogy $F(\omega, r) \leq F(\omega, s)$ tetszőleges $\omega \notin A \cup B \cup C$ esetén. Ha $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$, akkor léteznek olyan $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ racionális számokból álló sorozatok,

hogy $r_n \uparrow x$ és $s_n \uparrow y$, ha $n \rightarrow \infty$, és feltehetjük azt is, hogy $r_n < s_n$, $n \in \mathbb{N}$. Így $F_{r_n}(\omega) \leq F_{s_n}(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, és ezért

$$F(\omega, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{r_n}(\omega) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{s_n}(\omega) = F(\omega, y).$$

Ha $\omega \in A \cup B \cup C$, akkor $\mathbb{R} \ni x \mapsto F(\omega, x)$ automatikusan eloszlásfüggvény, hiszen ekkor $F(\omega, x) = G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ahol G egy eloszlásfüggvény.

A 8.27. Definíció (ii) feltételét az alábbi módon ellenőrizhetjük le. Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor (8.8) alapján $F(\omega, r) = \mathbb{P}(X < r | \mathcal{F})(\omega)$ $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor létezik racionális számoknak olyan $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy $r_n \uparrow x$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor, felhasználva, hogy a 8.27. Definíció (ii) feltételét már ellenőriztük, kapjuk, hogy $F(\omega, r_n) \uparrow F(\omega, r)$ ha $n \rightarrow \infty$ tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén. Továbbá, a 8.5. Tétel (x) része alapján (feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tétel) kapjuk, hogy

$$F(\omega, r_n) = \mathbb{P}(X < r_n | \mathcal{F})(\omega) \rightarrow \mathbb{P}(X < x | \mathcal{F})(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Ezért, felhasználva a határérték egyértelműségét, kapjuk, hogy

$$F(\omega, x) = \mathbb{P}(X < x | \mathcal{F})(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogy X -nek létezik reguláris feltételes eloszlása az $\mathcal{F}$ σ -algebrára nézve. Tekintsük a $\nu : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$

$$\nu(\omega, B) := \int_B 1 F(\omega, dx), \quad \omega \in \Omega, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

függvényt, ahol $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ a (8.7)-ben definiált. Mivel tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\mathbb{R} \ni x \mapsto F(\omega, x)$ eloszlásfüggvény, kapjuk, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \nu(\omega, B)$ valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en (a Lebesgue-Stieltjes integrál tulajdonságai alapján). Így a 8.26. Definíció (i) feltétele teljesül ν -re.

Belátjuk, hogy ν teljesíti a 8.26. Definíció (ii) feltételét is. Legyen

$$\mathcal{C} := \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \nu(\omega, B) = \mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \right\}.$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\nu(x, (-\infty, x)) = F(\omega, x) = \mathbb{P}(X < x | \mathcal{F})(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega,$$

kapjuk, hogy $\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}$, melyből adódik, hogy

$$\left\{ [a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{C}.$$

Így $\mathcal{C}$ tartalmazza a $[a, b)$ (ahol $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$) típusú intervallumok véges diszjunkt unióiból álló $\mathcal{H}$ halmazalgebrát is. Felhasználva, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \nu(\omega, B)$ valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en és azt, hogy $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})(\omega)$ szintén valószínűségi

mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén, belátható, hogy $\mathcal{C}$ monoton osztály (lásd, 8.12. Definíció). Így a monoton osztály tétel (lásd, 8.13. Tétel) alapján, felhasználva azt is, hogy $\mathcal{C}$ tartalmazza a $\mathcal{H}$ halmazalgebrát adódik, hogy $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}$. Mivel $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, kapjuk, hogy $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

8.29. Megjegyzés. Belátható az is, hogy ha X egy teljes szeparábilis metrikus térbeli értékű véletlen változó, akkor X -nek létezik reguláris feltételes eloszlása egy $\mathcal{F}$ rész σ -algebrára vonatkozóan. Speciálisan, ha X egy $\mathbb{R}^n$ -beli értékű véletlen vektor, akkor X -nek létezik reguláris feltételes eloszlása egy $\mathcal{F}$ rész σ -algebrára vonatkozóan. $\square$

8.30. Példa. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Legyen továbbá $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ egy olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathbb{P}(A_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és legyen $\mathcal{F} := \sigma(\{A_n, n \in \mathbb{N}\})$. Ekkor a 8.2. Definíciót megelőző motivációs rész alapján az $\mathcal{F}$ σ -algebra éppen az $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ eseményekből képezett összes megszámlálható unióból áll:

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{\ell \in F} A_\ell : F \subset \mathbb{N}, F \text{ megszámlálható} \right\},$$

ahol $\bigcup_{\ell \in \emptyset} A_\ell := \emptyset$, és tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in B | A_n) \mathbb{1}_{A_n}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Legyen $\nu: \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$,

$$\nu(\omega, B) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in B | A_n) \mathbb{1}_{A_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ekkor tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén egyértelműen létezik olyan $n_\omega \in \mathbb{N}$, hogy $\omega \in A_{n_\omega}$, és így $\nu(\omega, B) = \mathbb{P}(X \in B | A_{n_\omega})$, ahol a jobb oldal, és így a bal oldal is, mint $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ függvénye valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en. Így ν az X véletlen változónak egy reguláris feltételes eloszlása az $\mathcal{F}$ rész σ -algebrára vonatkozóan. $\square$

8.31. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Jelölje $\nu: \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$ az X -nek egy reguláris feltételes eloszlását az $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozóan. Legyen továbbá $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan mérhető függvény, melyre $\mathbb{E}(|f(X)|) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(f(X) | \mathcal{F})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \nu(\omega, dx) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Bizonyítás. Legyen először $f := \mathbb{1}_B$, ahol $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor azt kell igazolni, hogy

$$\mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})(\omega) = \nu(\omega, B) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega,$$

mely a 8.26. Definíció (ii) feltétele miatt teljesül. Felhasználva a feltételes várható érték, illetve a várható érték linearitását, kapjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőség egyszerű mérhető függvények esetén is teljesül.

Legyen most $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy olyan *nemnegatív* mérhető függvény, melyre $\mathbb{E}(f(X)) < \infty$. Ekkor léteznek olyan nemnegatív egyszerű mérhető függvények $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, hogy $f_n(x) \uparrow f(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. A 8.5. Tétel (x) része (feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tétel) alapján

$$\mathbb{E}(f_n(X) | \mathcal{F})(\omega) \uparrow \mathbb{E}(f(X) | \mathcal{F})(\omega) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega. \quad (8.9)$$

Mivel f_n , $n \in \mathbb{N}$, nemnegatív egyszerű mérhető függvények, az előzőek alapján tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{E}(f_n(X) | \mathcal{F})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \nu(\omega, dx) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Így, felhasználva, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\mathcal{A} \ni B \mapsto \nu(\omega, B)$ valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en, a 3.7. Tétel (x) része alapján (várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tétel) adódik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f_n(X) | \mathcal{F})(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \nu(\omega, dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \nu(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \nu(\omega, dx) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Így (8.9) and (8.10) alapján kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget olyan *nemnegatív* mérhető függvény $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ esetén is, melyre $\mathbb{E}(f(X)) < \infty$.

Ha f valós értékű, akkor az $f = f^+ - f^-$ felbontást használva kaphatjuk az állítást. $\square$

8.32. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók. Egy $\mu: \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ leképezést az X véletlen változó Y véletlen változóra vonatkozó reguláris feltételes eloszlásának nevezünk, ha

(i) tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \mu(Y(\omega), B)$ leképezés valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en,

(ii) tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén, az $\Omega \ni \omega \mapsto \mu(Y(\omega), B)$ leképezés a $\mathbb{P}(X \in B | Y)$ feltételes valószínűség egy reprezentánsa, azaz $\mu(Y(\omega), B) = \mathbb{P}(X \in B | Y)(\omega)$ $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén.

8.33. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók. Ekkor az X véletlen változónak létezik az Y véletlen változóra vonatkozó reguláris feltételes eloszlása.

8.34. Példa. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje (X, Y) sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$, illetve X -nek az Y -ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét $f_{X|Y}$, azaz $f_{X|Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_Y az Y sűrűségfüggvénye, és $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy tetszőleges sűrűségfüggvény (lásd 8.16. Tétel és 8.17. Definíció). Legyen $\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$,

$$\mu(y, B) := \int_B f_{X|Y}(x|y) dx, \quad y \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

A 8.16. Tétel (i) és (ii) részei alapján μ az X véletlen változó egy reguláris feltételes eloszlása az Y véletlen változóra nézve. $\square$

9. Nagy számok gyenge törvényei

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véletlen változók, és jelölje

$$S_n := X_1 + \dots + X_n, \quad \bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

9.1. Tétel. Ha $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és $\mathbb{E}(X_k X_\ell) = 0$ ha $k \neq \ell$, akkor minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^2).$$

Speciálisan, ha $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^2) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Bizonyítás. Nyilván $\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(X_k X_\ell) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(X_\ell^2)$, így a Markov-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(X_\ell^2) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^2).$$

□

9.2. Tétel. (Csebisev) Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként korrelálatlanok, $\sup_{\ell \geq 1} \text{Var}(X_\ell) < \infty$, és

$\mathbb{E}(X_n) = m$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $m \in \mathbb{R}$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$, és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$.

Bizonyítás. A 9.1. Tételt lehet alkalmazni az $X_1 - \mathbb{E}(X_1), X_2 - \mathbb{E}(X_2), \dots$ sorozatra. Valóban, a páronkénti korrelálatlanság miatt $\mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}(X_k))(X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell))) = 0$, ha $k \neq \ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, és $\overline{X_n - \mathbb{E}(X_n)} = \bar{X}_n - m$, $n \in \mathbb{N}$, és $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}((X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell))^2) = \sup_{\ell \geq 1} \text{Var}(X_\ell) < \infty$ (így speciálisan $\mathbb{E}(X_\ell^2) < \infty$, $\ell \in \mathbb{N}$). Ezért a 9.1. Tétel alapján $\bar{X}_n - m \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, azaz $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$. □

9.3. Tétel. (Markov) Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként korrelálatlanok, $\sup_{\ell \geq 1} \text{Var}(X_\ell) < \infty$, és létezik

$a \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\bar{X}_n) =: m \in \mathbb{R}$ határérték, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$, és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$.

Bizonyítás. A 9.1. Tételt lehet alkalmazni az $X_1 - \mathbb{E}(X_1), X_2 - \mathbb{E}(X_2), \dots$ sorozatra. Valóban, a páronkénti korrelálatlanság miatt $\mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}(X_k))(X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell))) = 0$, ha $k \neq \ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, és $\overline{X_n - \mathbb{E}(X_n)} = \bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, és $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}((X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell))^2) = \sup_{\ell \geq 1} \text{Var}(X_\ell) < \infty$. Így a 9.1. Tétel alapján $\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$. Ezért a Minkowski-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\|\bar{X}_n - m\|_2 \leq \|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)\|_2 + \|\mathbb{E}(\bar{X}_n) - m\|_2 = \|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)\|_2 + |\mathbb{E}(\bar{X}_n) - m| \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$. □

A 9.1. – 9.3. Tételekben szereplő nagy számok gyenge törvényeiben az alapul vett véletlen változók második momentuma véges. Felmerül a kérdés, hogy elegendő-e feltenni pusztán az első momentum végeességét? Kiderült, hogy páronként független, azonos eloszlású véletlen változók esetén igen, erről szól az alábbi eredmény.

9.4. Tétel. (Hincsin, 1929) Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen változók és $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, akkor $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

9.5. Tétel. Ha $X_1, X_2, \dots$ egyenletesen integrálható, független véletlen változók, akkor

$$\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0, \quad \text{és így} \quad \overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Speciálisan, ha $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók és $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, akkor $\overline{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \mathbb{E}(X_1)$, és így $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

Bizonyítás. Mivel $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható, a 7.10. Tétel alapján $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) < \infty$, így az $\mathbb{E}(X_k)$, $k \in \mathbb{N}$, várható értékek léteznek és végesek. Elegendő $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ esetén bizonyítani, hiszen ha $X_1, X_2, \dots$ egyenletesen integrálható, független véletlen változók, akkor $X_1 - \mathbb{E}(X_1)$, $X_2 - \mathbb{E}(X_2)$, $\dots$ is egyenletesen integrálható, 0 várható értékű, független véletlen változók. Valóban, $\mathbb{E}(X_k - \mathbb{E}(X_k)) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, és $\{-\mathbb{E}(X_k), k \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható, mert

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|-\mathbb{E}(X_k)|) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) < \infty,$$

és

$$0 \leq \lim_{\mathbb{P}(A) \rightarrow 0} \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|-\mathbb{E}(X_k)| \mathbb{1}_A) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) \lim_{\mathbb{P}(A) \rightarrow 0} \mathbb{P}(A) = 0,$$

ugyanis $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható és használhatjuk a 7.10. Tételt. Végezetül, $\{X_k - \mathbb{E}(X_k), k \in \mathbb{N}\}$ egyenletes integrálhatósága a 7.11. Tétel (ii) része alapján következik abból, hogy $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható és az előzőekben beláttuk, hogy $\{-\mathbb{E}(X_k), k \in \mathbb{N}\}$ is egyenletesen integrálható.

Legyen $R \in (0, \infty)$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $f_R(t) := t \cdot \mathbb{1}_{[-R, R]}(t)$ (ez egy úgynevezett nyírófüggvény). Jelölje

$$m_k^{(R)} := \mathbb{E}(f_R(X_k)), \quad X_k^{(R)} := f_R(X_k) - m_k^{(R)}, \quad Y_k^{(R)} := X_k - X_k^{(R)},$$

$$\overline{X}_n^{(R)} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{(R)}, \quad \overline{Y}_n^{(R)} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k^{(R)}.$$

Megjegyezzük, hogy a fentiekben a jelölés egyszerűsítése végett írtunk $\overline{X}_n^{(R)}$ -et $\overline{X}_n^{(R)}$ helyett (a fejezet elején bevezetett jelölésbeli konvenció alapján az utóbbit kellett volna használnunk). Nyilván

$$|m_k^{(R)}| \leq \mathbb{E}(|f_R(X_k)|) \leq \mathbb{E}(R) = R,$$

$$\mathbb{E}((X_k^{(R)})^2) \leq 2(\mathbb{E}((f_R(X_k))^2) + (m_k^{(R)})^2) \leq 2(\mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq R\}}) + R^2) \leq 4R^2 < \infty,$$

$$\mathbb{E}(|Y_k^{(R)}|) = \mathbb{E}(|X_k - (f_R(X_k) - m_k^{(R)})|)$$

$$\leq \mathbb{E}(|X_k - f_R(X_k)|) + |m_k^{(R)}| = \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}) + |m_k^{(R)}|,$$

ahol

$$\begin{aligned} |m_k^{(R)}| &= |\mathbb{E}(f_R(X_k))| = |\mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq R\}})| = |\mathbb{E}(X_k - X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}})| \\ &= |\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}})| = |0 - \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}})| \leq \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}), \end{aligned}$$

ahol a legutolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $\mathbb{E}(X_k) = 0$. Így tetszőleges $R \in (0, \infty)$ esetén

$$\mathbb{E}(|Y_k^{(R)}|) \leq 2 \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}),$$

és ezért

$$\mathbb{E}(|\bar{Y}_n^{(R)}|) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|Y_k^{(R)}|) \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}) \leq 2 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért $X_n = X_n^{(R)} + Y_n^{(R)}$ és a Lyapunov-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\bar{X}_n|) &= \mathbb{E}(|\bar{X}_n^{(R)} + \bar{Y}_n^{(R)}|) \leq \mathbb{E}(|\bar{X}_n^{(R)}|) + \mathbb{E}(|\bar{Y}_n^{(R)}|) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(\bar{X}_n^{(R)})^2]} + 2 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}), \end{aligned} \tag{9.1}$$

ahol az alábbiakból az is kiderül, hogy $\mathbb{E}[(\bar{X}_n^{(R)})^2] < \infty$. Továbbá, $X_k^{(R)}$, $k \in \mathbb{N}$, független, 0 várható értékű véletlen változók, hiszen X_k , $k \in \mathbb{N}$, függetlenek, a $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_R(t) - m_k^{(R)}$, $k \in \mathbb{N}$, függvények mérhetőek, és így a 2.3. Lemma alapján $X_k^{(R)} = f_R(X_k) - m_k^{(R)}$, $k \in \mathbb{N}$, is függetlenek. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\bar{X}_n^{(R)})^2] &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n X_k^{(R)} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left[\sum_{k=1}^n X_k^{(R)} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k^{(R)}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k^{(R)})^2] \leq \frac{4R^2}{n}, \end{aligned}$$

így (9.1) alapján következik, hogy

$$\mathbb{E}(|\bar{X}_n|) \leq \frac{2R}{\sqrt{n}} + 2 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}).$$

Ezért

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\bar{X}_n|) \leq 2 \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > R\}}),$$

így az egyenletes integrálhatóság alapján $R \rightarrow \infty$ esetén $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\bar{X}_n|) \leq 0$. Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\bar{X}_n|) = 0$, azaz $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0 = \mathbb{E}(X_1)$, ha $n \rightarrow \infty$.

A speciális esetben a 7.9. Definíció után írottak alapján $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható. $\square$

10. Nagy számok erős törvényei

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véletlen változók, és jelölje

$$S_n := X_1 + \dots + X_n, \quad \bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.1. Tétel. Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók és $\mathbb{E}(X_n) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\bar{X}_n^4)}{\varepsilon^4} \leq \frac{3}{n^2 \varepsilon^4} \sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^4).$$

Speciálisan, ha $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^4) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} 0$ és $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenség a Markov–egyenlőtlenség következménye. A második egyenlőtlenséghez elég belátni, hogy $\mathbb{E}(S_n^4) \leq 3n^2 M_4$, ahol $M_4 := \sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^4)$. Teljes indukcióval bizonyítunk. A bizonyítandó egyenlőtlenség $n=1$ esetén triviális. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(S_k^4) \leq 3k^2 M_4$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor

$$S_{n+1}^4 = (S_n + X_{n+1})^4 = S_n^4 + 4S_n^3 X_{n+1} + 6S_n^2 X_{n+1}^2 + 4S_n X_{n+1}^3 + X_{n+1}^4.$$

Mivel S_n és X_{n+1} függetlenek és $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n) = 0$, így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}^4) &= \mathbb{E}(S_n^4) + 6 \mathbb{E}(S_n^2 X_{n+1}^2) + \mathbb{E}(X_{n+1}^4) = \mathbb{E}(S_n^4) + 6 \mathbb{E}(S_n^2) \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + \mathbb{E}(X_{n+1}^4) \\ &= \mathbb{E}(S_n^4) + 6 \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + \mathbb{E}(X_{n+1}^4) \leq \mathbb{E}(S_n^4) + (6n+1)M_4, \end{aligned}$$

hiszen

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \mathbb{E}(X_i X_j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2),$$

és a Ljapunov-egyenlőtlenség (3.7. Tétel (xvii) része) alapján $\mathbb{E}(X_k^2) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X_k^4)} \leq \sqrt{M_4}$. Így

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4) \leq (3n^2 + 6n + 1)M_4 \leq 3(n+1)^2 M_4.$$

Így $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^4) < \infty$ esetén $\mathbb{E}(\bar{X}_n^4) \rightarrow 0$, azaz $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} 0$. Továbbá, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a már bizonyított egyenlőtlenségek felhasználásával

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|\bar{X}_n|^4) \leq \frac{3M_4}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{M_4 \pi^2}{2\varepsilon^4} < \infty,$$

így a 7.6. Tétel (iii) része alapján $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$. □

Az alábbiakban egy nagy számok erős törvényét bizonyítunk második momentum feltétel mellett.

10.2. Tétel. Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen változók és $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, akkor $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy az X_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók nemnegatívak, hiszen az $X_n = X_n^+ - X_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, felbontásból következik az állítás az általános esetben. Valóban, $X_n^+ \geq 0$, $X_n^- \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}((X_1^+)^2) \leq \mathbb{E}((X_1^+ + X_1^-)^2) = \mathbb{E}(|X_1|^2) = \mathbb{E}(X_1^2) < \infty,$$

hasonlóan $\mathbb{E}((X_1^-)^2) < \infty$, $\overline{X}_n = \overline{X}_n^+ - \overline{X}_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^+) - \mathbb{E}(X_1^-)$, $\{X_n^+, n \in \mathbb{N}\}$ páronként független, azonos eloszlásúak, és $\{X_n^-, n \in \mathbb{N}\}$ is páronként független, azonos eloszlásúak. Így, felhasználva azt is, hogy két 1 valószínűségű esemény metszete 1 valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$\overline{X}_n = \overline{X}_n^+ - \overline{X}_n^- \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1^+) - \mathbb{E}(X_1^-) = \mathbb{E}(X_1).$$

Feltehetjük azt is, hogy $\mathbb{E}(X_1) > 0$, hiszen az $\mathbb{E}(X_1) = 0$ esetben triviálisan teljesül az állítás, ugyanis ekkor (X_1 feltételezett nemnegativitása miatt) $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$, mely alapján $\mathbb{P}(\overline{X}_n = 0, n \in \mathbb{N}) = 1$.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, a Csebisev-egyenlőtlenség és a páronkénti függetlenség alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{k^2} - k^2 \mathbb{E}(X_1)}{k^2}\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{k^2} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k^2} X_i\right)\right| > \varepsilon k^2\right) \\ &\leq \frac{\text{Var}(\sum_{i=1}^{k^2} X_i)}{\varepsilon^2 k^4} = \frac{\sum_{i=1}^{k^2} \text{Var}(X_i)}{\varepsilon^2 k^4} = \frac{k^2 \text{Var}(X_1)}{\varepsilon^2 k^4} = \frac{\text{Var}(X_1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{k^2} - k^2 \mathbb{E}(X_1)}{k^2}\right| > \varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{k^2} - k^2 \mathbb{E}(X_1)}{k^2}\right| > \varepsilon\right) < \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Ezért a 7.6. Tétel (iii) része alapján (melynek háttérében a Borel-Cantelli lemma áll) adódik, hogy $\frac{S_{k^2}}{k^2} \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$, ha $k \rightarrow \infty$. Ennélfogva létezik olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $\mathbb{P}(A) = 1$ és tetszőleges $\omega \in A$ és tetszőleges $\varepsilon \in (0, \mathbb{E}(X_1))$ esetén létezik olyan $K_1 \in \mathbb{N}$ (mely függhet ω -tól és ε -tól is), hogy

$$\left|\frac{S_{k^2}(\omega)}{k^2} - \mathbb{E}(X_1)\right| < \varepsilon, \quad \text{ha } k \geq K_1, k \in \mathbb{N}.$$

Legyen $\omega \in A$ és legyenek $k \geq K_1$, $k \in \mathbb{N}$, és $n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $k^2 \leq n \leq (k+1)^2$. Felhasználva, hogy $X_m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\frac{S_{k^2}(\omega)}{(k+1)^2} \leq \frac{S_n(\omega)}{n} \leq \frac{S_{(k+1)^2}(\omega)}{k^2},$$

ahol

$$\frac{S_{(k+1)^2}(\omega)}{k^2} = \frac{S_{(k+1)^2}(\omega)}{(k+1)^2} \frac{(k+1)^2}{k^2} < (\mathbb{E}(X_1) + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$$

és

$$\frac{S_{k^2}(\omega)}{(k+1)^2} = \frac{S_{k^2}(\omega)}{k^2} \frac{k^2}{(k+1)^2} > (\mathbb{E}(X_1) - \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2.$$

Következésképpen, tetszőleges $\omega \in A$ és tetszőleges $\varepsilon \in (0, \mathbb{E}(X_1))$ esetén létezik olyan $K_1 \in \mathbb{N}$ (mely függhet ω -tól és ε -tól is), hogy

$$(\mathbb{E}(X_1) - \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 < \frac{S_n(\omega)}{n} < (\mathbb{E}(X_1) + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2, \quad \text{ha } k^2 \leq n \leq (k+1)^2, \quad k \geq K_1, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, tetszőleges $\delta \in (0, 1)$ esetén létezik olyan $K_2 \in \mathbb{N}$, hogy

$$1 - \delta < \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \quad \text{és} \quad \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 < 1 + \delta, \quad \text{ha } k \geq K_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így tetszőleges $\omega \in A$ és tetszőleges $\varepsilon \in (0, \mathbb{E}(X_1))$ és $\delta \in (0, 1)$ esetén létezik olyan $K := \max(K_1, K_2) \in \mathbb{N}$ (mely függhet ω -tól és ε -tól is), hogy

$$(1 - \delta)(\mathbb{E}(X_1) - \varepsilon) < \frac{S_n(\omega)}{n} < (1 - \delta)(\mathbb{E}(X_1) + \varepsilon), \quad \text{ha } n \geq K^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

melyből következik az állítás. $\square$

10.3. Tétel. (Kolmogorov-egyenlőtlenség) Ha $X_1, \dots, X_n$ független véletlen változók és $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$ minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Elegendő $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ esetén bizonyítani. Valóban, ha $X_1, \dots, X_n$ függetlenek, $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$, $k = 1, \dots, n$, akkor $X_1 - \mathbb{E}(X_1), \dots, X_n - \mathbb{E}(X_n)$ is függetlenek, nulla várható értékűek, $\sum_{i=1}^k (X_i - \mathbb{E}(X_i)) = S_k - \mathbb{E}(S_k)$, $k = 1, \dots, n$, és $\text{Var}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) = \text{Var}(S_n)$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Tetszőleges $1 \leq k \leq n$ esetén

$$S_n^2 - S_k^2 = (S_n - S_k)^2 + 2(S_n - S_k)S_k \geq 2(S_n - S_k)S_k.$$

Mivel $S_n - S_k$ független a $\sigma(X_1, \dots, X_k)$ σ -algebrától, kapjuk, hogy tetszőleges $A_k \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$ esemény esetén $S_n - S_k$ és $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ függetlenek. Így felhasználva azt is, hogy $\mathbb{E}(S_n - S_k) = 0$, adódik, hogy

$$\mathbb{E}[(S_n^2 - S_k^2) \mathbb{1}_{A_k}] \geq \mathbb{E}[2(S_n - S_k)S_k \mathbb{1}_{A_k}] = 2 \mathbb{E}(S_n - S_k) \mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{A_k}) = 0,$$

ezért

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}).$$

Ha speciálisan

$$A_1 = \{|S_1| \geq \varepsilon\}, \quad A_k = \left\{ |S_k| \geq \varepsilon, \max_{1 \leq j \leq k-1} |S_j| < \varepsilon \right\}, \quad k \in \{2, \dots, n\},$$

akkor $A_k \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$, $k = 1, \dots, n$, páronként diszjunktak és

$$B := \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq \varepsilon \right\} = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Ezért

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \varepsilon^2 \mathbb{P}(B),$$

tehát

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_B) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(S_n),$$

ami a bizonyítandó állítás. $\square$

Megjegyezzük, hogy a 10.3. Tétel feltételei mellett a Kolmogorov-egyenlőtlenségből $n = 1$ választással következik a Csebisev-egyenlőtlenség. Továbbá, felhasználva, hogy $|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)|$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

10.4. Tétel. (Kolmogorov egy sor tétele) Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók és $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$ (speciálisan $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$), akkor

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbb{E}(X_n)) \text{ konvergens} \right) = 1.$$

Bizonyítás. Elegendő $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, esetén bizonyítani. Mivel minden $N \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left\{ \sup_{k \geq 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right\} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \max_{1 \leq k \leq \ell} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right\}$$

és

$$\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right\} \uparrow \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \max_{1 \leq k \leq \ell} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right\}, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

a valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \max_{1 \leq k \leq \ell} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{k \geq 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (10.1)$$

tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén. A Kolmogorov-egyenlőtlenséget alkalmazva az $X_{N+1}, \dots, X_{N+n}$ független változókra:

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X_{N+1} + \dots + X_{N+n}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=N+1}^{N+n} \text{Var}(X_j),$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, felhasználva a $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)$ sor konvergenciáját és (10.1)-et, kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \text{Var}(X_j), \quad N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0,$$

amiből

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right) = 0.$$

Ezért a 7.6. Tétel (ii) része alapján az $S_1, S_2, \dots$ sorozat 1 valószínűséggel konvergens. $\square$

10.5. Tétel. (Kolmogorov két sor tétele) Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergens}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Mivel $X_n - \mathbb{E}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, függetlenek, 0 várható értékűek és $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n - \mathbb{E}(X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$, a Kolmogorov egy sor tétel alapján $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbb{E}(X_n))$ konvergens $\mathbb{P}$ -m.m. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ konvergens, kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergens $\mathbb{P}$ -m.m. $\square$

10.6. Tétel. (Kolmogorov három sor tétele) Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók, hogy létezik olyan $c > 0$, hogy

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^{(c)}) \text{ konvergens},$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n^{(c)}) < \infty,$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq c) < \infty,$$

ahol

$$X_n^{(c)} := X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| < c\}} = \begin{cases} X_n, & \text{ha } |X_n| < c, \\ 0, & \text{ha } |X_n| \geq c, \end{cases}$$

akkor

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergens}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Mivel $X_n^{(c)}$, $n \in \mathbb{N}$, függetlenek (hiszen $X_n^{(c)} = h(X_n)$, ahol $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x \mathbb{1}_{(-c, c)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, Borel-mérhető függvény, így használhatjuk a 2.3. Lemmát), Kolmogorov két sor tétele alapján (10.5. Tétel) kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(c)}$ konvergens $\mathbb{P}$ -m.m. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq c) < \infty$

$c) < \infty$, a Borel-Cantelli lemma alapján $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq c\}) = 0$, azaz $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_n| \geq c\}) = 0$. Így $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{|X_n| < c\}) = 1$. Mivel $\{|X_n| < c\} = \{X_n^{(c)} = X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, adódik, hogy $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{X_n^{(c)} = X_n\}) = 1$. Ezért $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $X_n(\omega) = X_n^{(c)}(\omega)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ -et kivéve. Így, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(c)}$ konvergens $\mathbb{P}$ -m.m., kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ is konvergens $\mathbb{P}$ -m.m.

Megjegyezzük, hogy a fenti bizonyítás azt is mutatja, hogy a tételben szereplő $X_n^{(c)}$ véletlen változó (csonkítás) helyett tekinthetnénk az

$$X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| < c\}} + c \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq c\}} = \begin{cases} X_n, & \text{ha } |X_n| < c, \\ c, & \text{ha } |X_n| \geq c, \end{cases}$$

véletlen változót (csonkítást) is, melyre szintén teljesül, hogy az $\{|X_n| < c\}$ halmazon egyezik meg X_n -nel. $\square$

10.7. Lemma. (Kronecker) Legyen $b_1, b_2, \dots$ pozitív számokból álló sorozat, $b_n \uparrow \infty$, és jelölje $n \in \mathbb{N}$ esetén $\beta_n := b_n - b_{n-1}$, ahol $b_0 := 0$.

- (i) Ha $s_1, s_2, \dots$ valós számsorozat és $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_{\ell} s_{\ell} \rightarrow s$. Speciálisan, ha $s_1, s_2, \dots$ valós számsorozat és $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n s_{\ell} \rightarrow s$, azaz a számtani közepekből álló sorozat is konvergens ugyanazzal a határértékkel.
- (ii) Ha $x_1, x_2, \dots$ valós számsorozat és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n}$ konvergens, akkor $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n x_{\ell} \rightarrow 0$.
- (iii) **(Diszkrét L'Hôpital szabály)** Tegyük fel, hogy $\beta_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, és legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy olyan valós sorozat, hogy $\frac{x_n}{\beta_n} \rightarrow c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n x_{\ell} = \frac{\sum_{\ell=1}^n x_{\ell}}{\sum_{\ell=1}^n \beta_{\ell}} \rightarrow c.$$

Azért hívják diszkrét L'Hôpital szabálynak, mert az $\frac{x_n}{\beta_n} \rightarrow c \in \mathbb{R}$ feltétel írható

$$\frac{\Delta(\sum_{\ell=1}^n x_{\ell})}{\Delta(\sum_{\ell=1}^n \beta_{\ell})} \rightarrow c \in \mathbb{R}$$

alakban is, ahol tetszőleges $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozat esetén $\Delta z_n := z_n - z_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, a $z_0 := 0$ jelöléssel.

Bizonyítás. (i). Nyilván $\beta_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, és $\sum_{\ell=1}^n \beta_{\ell} = b_n - b_0 = b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Elegendő $s = 0$ esetén bizonyítani. Valóban, ha $s \neq 0$, akkor $s_n - s \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, és így

$$\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_{\ell} (s_{\ell} - s) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell (s_\ell - s) = \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_\ell - s$, $n \in \mathbb{N}$, amiből következik, hogy $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_\ell \rightarrow s$, ha $n \rightarrow \infty$. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $s = 0$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $\ell \geq n_0$ esetén $|s_\ell| < \varepsilon$, ezért $n \geq n_0$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_\ell \right| &\leq \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^{n_0} \beta_\ell |s_\ell| + \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=n_0+1}^n \beta_\ell |s_\ell| \leq \frac{1}{b_n} \left(\sup_{\ell \geq 1} |s_\ell| \right) \sum_{\ell=1}^{n_0} \beta_\ell + \frac{\varepsilon}{b_n} \sum_{\ell=n_0+1}^n \beta_\ell \\ &= \frac{b_{n_0}}{b_n} \sup_{\ell \geq 1} |s_\ell| + \frac{\varepsilon}{b_n} (b_n - b_{n_0}) \leq \frac{b_{n_0}}{b_n} \sup_{\ell \geq 1} |s_\ell| + \varepsilon, \end{aligned}$$

ahol $\sup_{\ell \geq 1} |s_\ell| < \infty$, mert egy konvergens sorozat korlátos. Mivel $b_n \uparrow \infty$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_\ell \right| \leq \varepsilon,$$

tehát következik az állítás.

(ii). „Parciális szummázással”:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n x_\ell &= \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n b_\ell \frac{x_\ell}{b_\ell} = \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \frac{x_\ell}{b_\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{\ell=j}^n \frac{x_\ell}{b_\ell} \\ &= \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{x_\ell}{b_\ell} - \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{x_\ell}{b_\ell} \right) = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{\ell=1}^n \frac{x_\ell}{b_\ell} - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{x_\ell}{b_\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \frac{x_\ell}{b_\ell} - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{x_\ell}{b_\ell}. \end{aligned}$$

Jelölje $s := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x_\ell}{b_\ell}$. Alkalmazva az (i) állítást az $s_n := \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{x_\ell}{b_\ell} \rightarrow s$ sorozatra, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{x_\ell}{b_\ell} \rightarrow s, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Így $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n x_\ell \rightarrow s - s = 0$.

(iii). Az (i) részből adódik az $s_n := \frac{x_n}{\beta_n} \rightarrow c$ sorozat választásával. □

10.8. Tétel. (Kolmogorov, 1929) *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók. Legyen $b_1, b_2, \dots$ pozitív számokból álló sorozat, hogy $b_n \uparrow \infty$. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{b_n^2} < \infty$, akkor*

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n (X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell)) = 0 \right) = 1.$$

Speciálisan, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$, akkor $\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$. Speciálisan, ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.

Bizonyítás. Kolmogorov egy sor tételét (a 10.4. Tételt) alkalmazhatjuk az $\frac{X_1}{b_1}, \frac{X_2}{b_2}, \dots$ független véletlen változókól álló sorozatra, mert $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{X_n}{b_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{b_n^2} < \infty$. Így

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} (X_n - \mathbb{E}(X_n)) \text{ konvergens}\right) = 1.$$

Ebből a Kronecker-lemma (ii) részének felhasználásával következik az állítás első része. Az állítás második része egyszerűen adódik az első részből. Ha $X_n, n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} = \text{Var}(X_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \text{Var}(X_1) \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

és így az állítás második része alapján $\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, amiből következik, hogy $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$. $\square$

10.9. Tétel. (Kolmogorov, 1933) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók.

(i) Ha $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.

(ii) Ha $\mathbb{P}((\bar{X}_n)_{n \geq 1} \text{ konvergens}) > 0$, akkor $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$.

Bizonyítás. (i). Elegendő $\mathbb{E}(X_1) = 0$ esetén bizonyítani, ugyanis $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(X_n)) = 0, n \in \mathbb{N}$, és $\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1), n \in \mathbb{N}$. Jelölje

$$Y_n := X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}} = \begin{cases} X_n, & \text{ha } |X_n| \leq n, \\ 0, & \text{ha } |X_n| > n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

azaz Y_n az X_n -nek a $[-n, n]$ intervallumon kívüli csonkítása. Ekkor $Y_n, n \in \mathbb{N}$, függetlenek, de nem feltétlenül azonos eloszlásúak. Továbbá

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(k < |X_1| \leq k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}(k < |X_1| \leq k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(k < |X_1| \leq k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(k \mathbb{1}_{\{k < |X_1| \leq k+1\}}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_1| \mathbb{1}_{\{k < |X_1| \leq k+1\}}) = \mathbb{E}\left(|X_1| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k < |X_1| \leq k+1\}}\right) \\ &= \mathbb{E}(|X_1| \mathbb{1}_{\{|X_1| > 1\}}) \leq \mathbb{E}(|X_1|) < \infty, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a 3.7. Tétel (xi) részét is. Ezért a Borel–Cantelli-lemma alapján

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{Y_n \neq X_n\}) = 0,$$

és így

$$\mathbb{P}(Y_n \neq X_n \text{ véges sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén}) = 1. \quad (10.2)$$

Ezért az

$$\bar{Y}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

jelöléssel, $\mathbb{P}(\bar{X}_n \rightarrow 0) = 1$ ekvivalens azzal, hogy $\mathbb{P}(\bar{Y}_n \rightarrow 0) = 1$. Valóban, (10.2) alapján $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $n(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $n \geq n(\omega)$ esetén $Y_n(\omega) = X_n(\omega)$, továbbá $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n(\omega)-1} X_k(\omega) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, és $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n(\omega)-1} Y_k(\omega) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Tehát elegendő azt belátni, hogy $\mathbb{P}(\bar{Y}_n \rightarrow 0) = 1$. Mivel $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, a majoráns konvergencia-tétellel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq n\}}) = \mathbb{E}(X_1) = 0,$$

ahol a második egyenlőségnél felhasználtuk azt is, hogy $X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}}$ és $X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq n\}}$ azonos eloszlásúak, hiszen X_1 és X_n azonos eloszlásúak, $X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}} = h(X_n)$ és $X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq n\}} = h(X_1)$, ahol $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x \mathbb{1}_{\{|x| \leq n\}}$, $x \in \mathbb{R}$, egy Borel-mérhető függvény. Így a Kronecker-lemma (i) részét alkalmazva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\bar{Y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(Y_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) = 0.$$

Ezért a 10.8. Tétel alapján elegendő azt belátni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$, ugyanis ekkor $\bar{Y}_n - \mathbb{E}(\bar{Y}_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, és mivel $\mathbb{E}(\bar{Y}_n) \rightarrow 0$, kapjuk, hogy $\bar{Y}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2}$ sor konvergenciája pedig abból következik, hogy $\text{Var}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 \leq \mathbb{E}(Y_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, és

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{0 < |X_n| \leq n\}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_n| \leq \ell\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}}) \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ell} \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}}) \cdot \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \\ &\leq \left(\sup_{\ell \geq 1} \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}}) < \infty, \end{aligned}$$

ugyanis egyrészt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}}) &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_1| \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}}) = \mathbb{E} \left(|X_1| \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\ell-1 < |X_1| \leq \ell\}} \right) \\ &= \mathbb{E}(|X_1| \mathbb{1}_{\{|X_1| > 0\}}) = \mathbb{E}(|X_1|) < \infty, \end{aligned}$$

másrészt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$, és

$$\sup_{\ell \geq 2} \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sup_{\ell \geq 2} \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sup_{\ell \geq 2} \frac{\ell}{\ell-1} = 2,$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=\ell}^N \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=\ell}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ell-1} - \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{\ell-1}.$$

(ii). A 2.13. Példa alapján $\mathbb{P}((\bar{X}_n)_{n \geq 1} \text{ konvergens}) \in \{0, 1\}$, így a feltétel alapján csak

$$\mathbb{P}((\bar{X}_n)_{n \geq 1} \text{ konvergens}) = 1$$

lehetséges. Így, felhasználva újra a 2.13. Példában látottakat, létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} c$. Ebből

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{n\bar{X}_n - (n-1)\bar{X}_{n-1}}{n} = \bar{X}_n - \frac{n-1}{n}\bar{X}_{n-1}$$

alapján az is következik, hogy

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0.$$

Így az $A_n := \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega)| \geq n\}$, $n = 1, 2, \dots$ független események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be. Valóban, mivel $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, kapjuk, hogy $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $\left| \frac{X_n(\omega)}{n} \right| < 1$, ha $n \geq n_0(\omega)$, azaz $|X_n(\omega)| < n$, ha $n \geq n_0(\omega)$. Ezért a Borel–Cantelli-lemma szerint $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ esetén (felhasználva azt is, hogy A_n , $n \in \mathbb{N}$, függetlenek) $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ teljesülne, azaz $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $|X_n(\omega)| \geq n$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállna, mely az előzőek miatt nem lehetséges. Így a 3.7. Tétel (xxii) része alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_1|) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}(|X_1| \geq x) dx \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}(|X_1| \geq n) dx \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty. \end{aligned}$$

□

10.10. Megjegyzés. A 10.9. Tétel (i) része bizonyításának első része mutatja, hogy ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, független véletlen változók, hogy $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, és c_n , $n \in \mathbb{N}$, egy olyan pozitív számokból álló sorozat, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > c_n) < \infty$, akkor $\mathbb{P}(\bar{X}_n \rightarrow 0) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{P}(\bar{Y}_n \rightarrow 0) = 1$, ahol vagy

$$Y_n := \begin{cases} X_n, & \text{ha } |X_n| \leq c_n, \\ 0, & \text{ha } |X_n| > c_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

vagy

$$Y_n := \begin{cases} X_n, & \text{ha } |X_n| \leq c_n, \\ c_n, & \text{ha } |X_n| > c_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

További nagy számok erős törvényei is ismeretesek.

10.11. Tétel. (Etemadi, 1981) *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. Ekkor $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.*

10.12. Tétel. (Chandra és Goswami, 1992) *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ páronként független véletlen változók, hogy*

$$\int_0^\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > t) dt < \infty.$$

Ekkor $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Megjegyezzük, hogy ha $X_n, n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlásúak, akkor a 3.7. Tétel (xxii) része alapján

$$\int_0^\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| \geq t) dt = \mathbb{E}(|X_1|),$$

így ebben az esetben a 10.12. Tételben szereplő $\int_0^\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > t) dt < \infty$ feltétel azt jelenti, hogy $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. Ezért a Chandra és Goswami tételből következik az Etemadi tétel.

11. Centrális határeloszlás-tétel és Poisson konvergenciatétel

11.1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor elfajult (degenerált), ha létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hogy $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$, azaz $\mathbb{P}_X = \delta_{x_0}$.

Egy $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor akkor és csak akkor elfajult, ha $\text{Cov}(X) = 0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Valóban, ha X elfajult, akkor létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hogy $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$, és így $\text{Cov}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^\top) = \mathbb{E}((x_0 - x_0)(x_0 - x_0)^\top) = 0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Megfordítva, ha $\text{Cov}(X) = 0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, akkor $\mathbb{E}((X^{(i)} - \mathbb{E}(X^{(i)}))^2) = 0$, $i = 1, \dots, d$, melyből következik, hogy $\mathbb{P}(X^{(i)} = \mathbb{E}(X^{(i)})) = 1$, $i = 1, \dots, d$, és így $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független (valós értékű) véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$ és $\sigma_{n,j} := \sqrt{\text{Var}(X_{n,j})}$ tetszőleges $j = 1, \dots, k_n$ esetén. Jelölje

$$S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n},$$

$$D_n := \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2} > 0,$$

$$\widehat{S}_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{D_n},$$

ahol D_n pozitivitása abból következik, hogy $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ nem mind elfajultak. Nyilván $\mathbb{E}(\widehat{S}_n) = 0$ és $\text{Var}(\widehat{S}_n) = 1$. Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$r_n := \frac{1}{D_n} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j}$$

és

$$L_n(\varepsilon) := \frac{1}{D_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[(X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})| \geq \varepsilon D_n\}} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[\left| \frac{X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})}{D_n} \right|^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| \frac{X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})}{D_n} \right| \geq \varepsilon \right\}} \right].$$

Legyen $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

11.2. Tétel. (Lindeberg) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ háromszor folytonosan differenciálható függvény.

(i) *Tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)] \right| \leq \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2} \right) \|g'''\|_\infty + L_n(\varepsilon) \|g''\|_\infty,$$

ahol $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esetén $\|h\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$.

(ii) Ha $\|g''\|_\infty < \infty$, $\|g'''\|_\infty < \infty$, és teljesül az ún. **Lindeberg-feltétel**: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)]$.

Bizonyítás. Elegendő $\mathbb{E}(X_{n,j}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, k_n$, esetén bizonyítani, hiszen az állításokban szereplő $\hat{S}_n$ nem más, mint S_n -nek a standardizáltja.

(i). Legyenek $\{Y_{n,j}\}_{j=1}^{k_n}$ olyan független, standard normális eloszlású véletlen változók, melyek függetlenek az $\{X_{n,j}\}_{j=1}^{k_n}$ valószínűségi változóktól is. Jelölje

$$\hat{X}_{n,j} := \frac{X_{n,j}}{D_n}, \quad \hat{Y}_{n,j} := \frac{\sigma_{n,j} Y_{n,j}}{D_n}.$$

Ekkor $\hat{S}_n = \sum_{j=1}^{k_n} \hat{X}_{n,j}$, és

$$\hat{T}_n := \sum_{j=1}^{k_n} \hat{Y}_{n,j} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

ezért

$$\Delta_n := \left| \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)] \right| = \left| \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(\hat{T}_n)] \right|.$$

Az $\{Y_{n,j} : j = 1, \dots, k_n, n \in \mathbb{N}\}$ család egy olyan normális eloszlású valószínűségi változókból álló ún. kísérő háromszögrendszer, hogy alkalmas normalizálás után az egymásnak megfeleltethető valószínűségi változók, $\hat{X}_{n,j}$ és $\hat{Y}_{n,j}$, első és második momentumai megegyeznek, és a normalizált normálisok sorösszegeinek az eloszlása standard normális. Jelölje $\ell = 1, \dots, k_n$ esetén

$$U_{n,\ell} := \sum_{j=1}^{\ell-1} \hat{X}_{n,j} + \sum_{j=\ell+1}^{k_n} \hat{Y}_{n,j},$$

ahol $\sum_{j=1}^0 := 0$ és $\sum_{j=k_n+1}^{k_n} := 0$. Ekkor

$$U_{n,k_n} + \hat{X}_{n,k_n} = \hat{S}_n, \quad U_{n,1} + \hat{Y}_{n,1} = \hat{T}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Így a harmonika elv alapján

$$\Delta_n = \left| \sum_{\ell=1}^{k_n} (\mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \hat{X}_{n,\ell})] - \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \hat{Y}_{n,\ell})]) \right| \leq \sum_{\ell=1}^{k_n} \Delta_{n,\ell},$$

ahol

$$\Delta_{n,\ell} := \left| \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \hat{X}_{n,\ell})] - \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \hat{Y}_{n,\ell})] \right|.$$

Valóban,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^{k_n} (\mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{X}_{n,\ell})] - \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{Y}_{n,\ell})]) \\
&= \mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(\widehat{X}_{n,1} + \cdots + \widehat{X}_{n,k_n-1} + \widehat{Y}_{n,k_n})] \\
&\quad + \mathbb{E}[g(\widehat{X}_{n,1} + \cdots + \widehat{X}_{n,k_n-2} + \widehat{Y}_{n,k_n} + \widehat{X}_{n,k_n-1})] - \mathbb{E}[g(\widehat{X}_{n,1} + \cdots + \widehat{X}_{n,k_n-2} + \widehat{Y}_{n,k_n} + \widehat{Y}_{n,k_n-1})] \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + \mathbb{E}[g(\widehat{X}_{n,1} + \widehat{Y}_{n,3} + \cdots + \widehat{Y}_{n,k_n} + \widehat{X}_{n,2})] - \mathbb{E}[g(\widehat{X}_{n,1} + \widehat{Y}_{n,3} + \cdots + \widehat{Y}_{n,k_n} + \widehat{Y}_{n,2})] \\
&\quad + \mathbb{E}[g(\widehat{Y}_{n,2} + \cdots + \widehat{Y}_{n,k_n} + \widehat{X}_{n,1})] - \mathbb{E}[g(\widehat{T}_n)].
\end{aligned}$$

Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$R(x, y) := g(x+y) - g(y) - xg'(y) - \frac{1}{2}x^2g''(y).$$

Mivel $\mathbb{E}(\widehat{Y}_{n,j}) = \mathbb{E}(\widehat{X}_{n,j}) = 0$, $\mathbb{E}(\widehat{Y}_{n,j}^2) = \mathbb{E}(\widehat{X}_{n,j}^2)$, így $\ell = 1, \dots, k_n$ esetén

$$\mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{X}_{n,\ell})] - \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{Y}_{n,\ell})] = \mathbb{E}[R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})] - \mathbb{E}[R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})].$$

Valóban, felhasználva azt is, hogy $U_{n,\ell}$ és $\widehat{X}_{n,\ell}$ függetlenek, illetve, hogy $U_{n,\ell}$ és $\widehat{Y}_{n,\ell}$ függetlenek, kapjuk, hogy $\ell = 1, \dots, k_n$ esetén

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})] - \mathbb{E}[R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})] \\
&= \mathbb{E}(g(\widehat{X}_{n,\ell} + U_{n,\ell})) - \mathbb{E}(g(U_{n,\ell})) - \mathbb{E}(\widehat{X}_{n,\ell}g'(U_{n,\ell})) - \frac{1}{2}\mathbb{E}((\widehat{X}_{n,\ell})^2g''(U_{n,\ell})) \\
&\quad - \mathbb{E}(g(\widehat{Y}_{n,\ell} + U_{n,\ell})) + \mathbb{E}(g(U_{n,\ell})) + \mathbb{E}(\widehat{Y}_{n,\ell}g'(U_{n,\ell})) + \frac{1}{2}\mathbb{E}((\widehat{Y}_{n,\ell})^2g''(U_{n,\ell})) \\
&= \mathbb{E}(g(\widehat{X}_{n,\ell} + U_{n,\ell})) - \mathbb{E}(\widehat{X}_{n,\ell})\mathbb{E}(g'(U_{n,\ell})) - \frac{1}{2}\mathbb{E}((\widehat{X}_{n,\ell})^2)\mathbb{E}(g''(U_{n,\ell})) \\
&\quad - \mathbb{E}(g(\widehat{Y}_{n,\ell} + U_{n,\ell})) + \mathbb{E}(\widehat{Y}_{n,\ell})\mathbb{E}(g'(U_{n,\ell})) + \frac{1}{2}\mathbb{E}((\widehat{Y}_{n,\ell})^2)\mathbb{E}(g''(U_{n,\ell})) \\
&= \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{X}_{n,\ell})] - \mathbb{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{Y}_{n,\ell})].
\end{aligned}$$

Ezért $\ell = 1, \dots, k_n$ esetén

$$\Delta_{n,\ell} = |\mathbb{E}[R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})] - \mathbb{E}[R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})]| \leq \mathbb{E}(|R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|) + \mathbb{E}(|R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|).$$

A Taylor-tétel alapján tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|R(x, y)| \leq \|g''\|_{\infty} x^2, \quad |R(x, y)| \leq \frac{\|g'''\|_{\infty}}{6} |x|^3.$$

Valóban, tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$R(x, y) = \frac{1}{6}x^3g'''(y+z_1), \quad \text{és} \quad g(x+y) - g(y) - xg'(y) = \frac{1}{2}x^2g''(y+z_2).$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[|R(\hat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|] &= \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[|R(\hat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})| \mathbb{1}_{\{|\hat{X}_{n,\ell}| < \varepsilon\}}] + \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[|R(\hat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})| \mathbb{1}_{\{|\hat{X}_{n,\ell}| \geq \varepsilon\}}] \\
 &\leq \frac{\|g'''\|_\infty}{6} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[|\hat{X}_{n,\ell}|^3 \mathbb{1}_{\{|\hat{X}_{n,\ell}| < \varepsilon\}}] + \|g''\|_\infty \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[\hat{X}_{n,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{X}_{n,\ell}| \geq \varepsilon\}}] \\
 &\leq \frac{\|g'''\|_\infty}{6} \sum_{\ell=1}^{k_n} \varepsilon \mathbb{E}[\hat{X}_{n,\ell}^2] + \frac{\|g''\|_\infty}{D_n^2} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{n,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,\ell}| \geq \varepsilon D_n\}}] \\
 &= \frac{\varepsilon \|g'''\|_\infty}{6} \sum_{\ell=1}^{k_n} \frac{\sigma_{n,\ell}^2}{D_n^2} + L_n(\varepsilon) \|g''\|_\infty = \frac{\varepsilon}{6} \|g'''\|_\infty + L_n(\varepsilon) \|g''\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Továbbá $\sigma_{n,\ell} \leq r_n D_n$ alkalmazásával

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[|R(\hat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|] &\leq \frac{\|g'''\|_\infty}{6} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mathbb{E}[|\hat{Y}_{n,\ell}|^3] = \frac{\|g'''\|_\infty}{6} \mathbb{E}[|Y_{1,1}|^3] \sum_{\ell=1}^{k_n} \frac{\sigma_{n,\ell}^3}{D_n^3} \\
 &\leq \frac{r_n \|g'''\|_\infty}{2} \sum_{\ell=1}^{k_n} \frac{\sigma_{n,\ell}^2}{D_n^2} = \frac{r_n}{2} \|g'''\|_\infty,
 \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépés abból következik, hogy a Ljapunov-egyenlőtlenség (3.7. Tétel (xvii) része) alapján $\mathbb{E}(|Y_{1,1}|^3) \leq (\mathbb{E}(|Y_{1,1}|^4))^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} < 3$.

(ii). Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, felhasználva, hogy $\mathbb{E}[X_{n,\ell}] = 0$, kapjuk, hogy

$$\sigma_{n,\ell}^2 = \mathbb{E}[X_{n,\ell}^2] = \mathbb{E}[X_{n,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,\ell}| < \varepsilon D_n\}}] + \mathbb{E}[X_{n,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,\ell}| \geq \varepsilon D_n\}}] \leq \varepsilon^2 D_n^2 + L_n(\varepsilon) D_n^2,$$

ezért

$$r_n^2 = \frac{1}{D_n^2} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j}^2 \leq \varepsilon^2 + L_n(\varepsilon).$$

Így az (i) rész alapján minden $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)] \right| \leq \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + L_n(\varepsilon)}}{2} \right) \|g'''\|_\infty + L_n(\varepsilon) \|g''\|_\infty,$$

ezért a feltételek alapján kapjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)] \right| \leq \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \|g'''\|_\infty.$$

Végezetül, az $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenetet véve kapjuk az állítást. $\square$

Megjegyezzük, hogy a 11.2. Tétel (ii) részéből direkt módon még nem következik, hogy $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$, ha $n \rightarrow \infty$, ugyanis a 7.16. Tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(\hat{S}_n)) = \mathbb{E}(g(Y))$. A 11.2. Tétel (ii) része alapján azt állíthatjuk csak, hogy a Lindeberg-feltétel fennállása esetén tetszőleges olyan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ háromszor folytonosan differenciálható függvény esetén, melynek második és harmadik deriváltja korlátos, teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(\hat{S}_n)) = \mathbb{E}(g(Y))$. A következő tétel speciális eseteként adódik majd, hogy $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$, ha $n \rightarrow \infty$.

11.3. Tétel. (Lindeberg centrális határeloszlás-tétele) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1+x^2} < \infty,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)].$$

Speciálisan, $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

Bizonyítás. Válasszunk egy olyan $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ végtelen sokszor differenciálható függvényt, hogy $\varrho(x) = 0$ ha $|x| \geq 1$, és $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = 1$. Olyan folytonosan differenciálható $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvényt könnyű választani, melyre $\varrho(x) = 0$ ha $|x| \geq 1$, és $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = 1$, például $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{\int_{-1}^1 (x-1)^2(x+1)^2 dx} (x-1)^2(x+1)^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ megfelel. A szóban forgó végtelen sokszor differenciálható ϱ függvény létezése az alábbi topológiából tanult állításból következik: Legyen $K \subset \mathbb{R}$ egy kompakt halmaz, U pedig a K -t tartalmazó nyílt halmaza $\mathbb{R}$ -nek. Ekkor létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ végtelen sokszor differenciálható függvény, melyre teljesül, hogy $f(x) > 0$, $x \in K$, és $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus U$. A $K = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ és $U = (-1,1)$ választásokkal kapjuk, hogy létezik olyan $\tilde{\varrho} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ végtelen sokszor differenciálható függvény, melyre $\tilde{\varrho}(x) > 0$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, és $\tilde{\varrho}(x) = 0$, ha $|x| \geq 1$. Mivel $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varrho}(x) dx = \int_{-1}^1 \tilde{\varrho}(x) dx \in (0,2]$, így a $\varrho := (\int_{-1}^1 \tilde{\varrho}(x) dx)^{-1} \tilde{\varrho}$ választás megfelelő.

Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$g_k(x) := k \int_{-k}^k \varrho(k(x-y))g(y) dy = \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z)g\left(x - \frac{z}{k}\right) dz.$$

Megmutatjuk, hogy a g_k , $k \in \mathbb{N}$, függvények a $[-R, R]$ alakú intervallumokon, ahol $R > 0$, egyenletesen közelítik a g függvényt, azaz bármilyen $R > 0$ esetén

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq R} |g_k(x) - g(x)| = 0. \quad (11.1)$$

A paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele alapján $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ végtelen sokszor differenciálható függvény. A teljesség kedvéért megadjuk a g_k függvény (egyszeri) differenciálhatóságának a bizonyítását. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített. Mivel ϱ' egyenletesen folytonos a $[k(x_0-k), k(x_0+k)]$ intervallumon, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\varrho'(y_1) - \varrho'(y_2)| < \varepsilon, \quad \text{ha } |y_1 - y_2| < \delta, \quad y_1, y_2 \in [k(x_0-k), k(x_0+k)].$$

Minden $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ esetén

$$\frac{g_k(x) - g_k(x_0)}{x - x_0} = k \int_{-k}^k \frac{\varrho(k(x-y)) - \varrho(k(x_0-y))}{x - x_0} g(y) dy = k \int_{-k}^k k \varrho'(k(\xi(y) - y)) g(y) dy,$$

ahol $\xi(y)$ az x és x_0 közé esik. Így, ha $0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{k}$, akkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{g_k(x) - g_k(x_0)}{x - x_0} - k \int_{-k}^k \varrho'(k(x_0 - y))g(y) dy \right| &= \left| k \int_{-k}^k \varrho'(k(\xi(y) - y)) - \varrho'(k(x_0 - y)) g(y) dy \right| \\ &\leq k \int_{-k}^k k\varepsilon |g(y)| dy \leq k^2 \varepsilon \sup_{|y| \leq k} |g(y)| (2k), \end{aligned}$$

ugyanis

$$|k(\xi(y) - y) - k(x_0 - y)| = k|\xi(y) - x_0| \leq k \frac{\delta}{k} = \delta,$$

és g folytonossága miatt $\sup_{|y| \leq k} |g(y)| < \infty$. Mindezek miatt

$$g'_k(x_0) = k \int_{-k}^k \varrho'(k(x_0 - y))g(y) dy, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

A g_k függvény kompakt tartójú is, hiszen $g_k(x) = 0$, ha $|x| \geq k + 1/k$, ugyanis ekkor $[k(x - k), k(x + k)] \cap (-1, 1) = \emptyset$. Továbbá,

$$g_k(x) - g(x) = \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) \left(g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x) \right) dz - g(x) \left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz \right),$$

ezért, felhasználva, hogy $\varrho(z) = 0$, ha $|z| \geq 1$, és, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = 1$, kapjuk, hogy tetszőleges $R \in (0, \infty)$ esetén

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq R} |g_k(x) - g(x)| &\leq \sup_{\substack{|x| \leq R \\ |z| \leq 1}} \left| g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x) \right| \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz + \sup_{|x| \leq R} |g(x)| \left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz \right) \\ &\leq \sup_{\substack{|x| \leq R \\ |z| \leq 1}} \left| g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x) \right| + \sup_{|x| \leq R} |g(x)| \left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz \right). \end{aligned}$$

Mivel g folytonos és $[-R-1, R+1]$ kompakt, a Heine-Cantor tétel alapján g egyenletesen folytonos a $[-R-1, R+1]$ intervallumon, így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|x| \leq R \\ |z| \leq 1}} \left| g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x) \right| = 0.$$

Továbbá a

$$K := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1+x^2} < \infty$$

jelöléssel

$$\sup_{|x| \leq R} |g(x)| \leq \sup_{|x| \leq R} (1+x^2)K \leq (1+R^2)K,$$

ezért

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq R} |g(x)| \left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz \right) &\leq K(1+R^2) \sup_{|x| \leq R} \left(1 - \int_{-k^2+kx}^{k^2+kx} \varrho(z) dz \right) \\ &= K(1+R^2) \left(1 - \inf_{|x| \leq R} \int_{-k^2+kx}^{k^2+kx} \varrho(z) dz \right). \end{aligned}$$

Mivel elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén $(-1,1) \subset (-k^2+kx, k^2+kx)$ tetszőleges $x \in [-R, R]$ esetén, kapjuk, hogy ekkor

$$\int_{-k^2+kx}^{k^2+kx} \varrho(z) dz = \int_{-1}^1 \varrho(z) dz = 1, \quad |x| \leq R,$$

amiből következik, hogy elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{|x| \leq R} |g(x)| \left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz \right) = 0.$$

Így kapjuk (11.1)-et.

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $K' \in (0, \infty)$, hogy

$$\sup_{k \geq 1} |g_k(x) - g(x)| \leq K'(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11.2)$$

Minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g(x)| &\leq \left| \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) g\left(x - \frac{z}{k}\right) dz - g(x) \right| \\ &\leq \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) \left| g\left(x - \frac{z}{k}\right) \right| dz + |g(x)| \\ &\leq K \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) \left(1 + \left(x - \frac{z}{k}\right)^2 \right) dz + K(1+x^2) \\ &= K \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) \left(1 + \left(x - \frac{z}{k}\right)^2 \right) \mathbb{1}_{[-1,1]}(z) dz + K(1+x^2) \\ &\leq K \sup_{|z| \leq 1} \left(1 + \left(x - \frac{z}{k}\right)^2 \right) \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z) dz + K(1+x^2) \\ &\leq K \left(2 + x^2 + \sup_{|z| \leq 1} \left(x - \frac{z}{k}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Mivel

$$\sup_{|z| \leq 1} \left(x - \frac{z}{k}\right)^2 \leq 2 \sup_{|z| \leq 1} \left(x^2 + \frac{z^2}{k^2}\right) \leq 2 \left(x^2 + \frac{1}{k^2}\right) \leq 2(x^2 + 1),$$

kapjuk, hogy $|g_k(x) - g(x)| \leq K(2 + x^2 + 2x^2 + 2) = K(3x^2 + 4) \leq 4K(x^2 + 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, és így élhetünk a $K' := 4K$ választással.

Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)]| \leq |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| + |\mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(Y)]| + |\mathbb{E}[g_k(Y)] - \mathbb{E}[g(Y)]|.$$

Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén a g_k függvény valós és képzetes részeire alkalmazhatjuk a Lindeberg-tételt (11.2. Tételt), hiszen g_k végtelen sokszor differenciálható és kompakt tartójú, ugyanis $g_k(x) = 0$, ha $|x| \geq k + \frac{1}{k}$, és következésképpen $\|g_k''\|_\infty < \infty$ és $\|g_k'''\|_\infty < \infty$. Így $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(Y)]| = 0$, $k \in \mathbb{N}$, ezért

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)]| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| + |\mathbb{E}[g_k(Y)] - \mathbb{E}[g(Y)]|,$$

amiből

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)]| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| + \limsup_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g_k(Y)] - \mathbb{E}[g(Y)]|.$$

Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $R \in (0, \infty)$ esetén, felhasználva a 3.43. Állítást és (11.2)-t, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[g_k(Y)] - \mathbb{E}[g(Y)]| &= |\mathbb{E}[(g_k(Y) - g(Y))]| \leq \mathbb{E}[|g_k(Y) - g(Y)|] \\ &= \mathbb{E}[|g_k(Y) - g(Y)| \mathbb{1}_{\{|Y| \leq R\}}] + \mathbb{E}[|g_k(Y) - g(Y)| \mathbb{1}_{\{|Y| > R\}}] \\ &\leq \sup_{|x| \leq R} |g_k(x) - g(x)| + K' \mathbb{E}[(1 + Y^2) \mathbb{1}_{\{|Y| > R\}}], \end{aligned}$$

így (11.1) alapján tetszőleges $R \in (0, \infty)$ esetén

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g_k(Y)] - \mathbb{E}[g(Y)]| \leq K' \mathbb{E}[(1 + Y^2) \mathbb{1}_{\{|Y| > R\}}].$$

A majoráns konvergencia-tétel segítségével

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(1 + Y^2) \mathbb{1}_{\{|Y| > R\}}] = 0, \quad (11.3)$$

ezért

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g_k(Y)] - \mathbb{E}[g(Y)]| = 0.$$

Hasonlóan, (11.2) alapján tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ és $R \in (0, \infty)$ esetén

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| &= |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n) - g_k(\widehat{S}_n)]| \leq \mathbb{E}[|g(\widehat{S}_n) - g_k(\widehat{S}_n)|] \\ &= \mathbb{E}[|g(\widehat{S}_n) - g_k(\widehat{S}_n)| \mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n| \leq R\}}] + \mathbb{E}[|g(\widehat{S}_n) - g_k(\widehat{S}_n)| \mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n| > R\}}] \\ &\leq \sup_{|x| \leq R} |g_k(x) - g(x)| + K' \mathbb{E}[(1 + \widehat{S}_n^2) \mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n| > R\}}], \end{aligned}$$

ezért (11.1) alapján tetszőleges $R \in (0, \infty)$ esetén

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| \leq K' \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(1 + \widehat{S}_n^2) \mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n| > R\}}].$$

Mivel az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (1+x^2)\mathbb{1}_{\{|x|>R\}}$ függvény nem folytonos (mindenütt), a Lindeberg-tételt (11.2. Tételt) nem tudjuk direktben alkalmazni $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}} \right]$ vizsgálatára. Válasszunk egy olyan $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ végtelen sokszor differenciálható függvényt, hogy $h(x)=0$ ha $|x| \leq 1/2$, és $h(x)=1$ ha $|x| \geq 1$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $R \in (0, \infty)$ esetén $h_R(x) := (1+x^2)h(x/R)$, melyre

$$h'_R(x) = 2xh(x/R) + (1+x^2)h'(x/R)\frac{1}{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

és

$$h''_R(x) = 2h(x/R) + 4xh'(x/R)\frac{1}{R} + (1+x^2)h''(x/R)\frac{1}{R^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a h_R függvényre alkalmazhatjuk a Lindeberg-tételt (11.2. Tételt), hiszen $|x| > R$ esetén $h''_R(x) = 2$, $h'''_R(x) = 0$, és h''_R , h'''_R korlátosak a $[-R, R]$ intervallumon, mert folytonosak, így $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[h_R(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[h_R(Y)]| = 0$. Ezért felhasználva, hogy

$$(1+x^2)\mathbb{1}_{\{|x|>R\}} \leq h_R(x) = h_R(x)\mathbb{1}_{\{|x|>R/2\}} \leq (1+x^2)\mathbb{1}_{\{|x|>R/2\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ahol a második egyenlőtlenség $h(x) \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}$, következménye, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}} \right] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[h_R(\widehat{S}_n) \right] = \mathbb{E}[h_R(Y)] \leq \mathbb{E} \left[(1+Y^2)\mathbb{1}_{\{|Y|>\frac{R}{2}\}} \right].$$

Ezért (11.3) alapján

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}} \right] = 0,$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| = 0,$$

így végülis

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)]| = 0.$$

Ha $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény, akkor $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1+x^2} < \infty$, és így a már bizonyítottak alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(\widehat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, melyből a 7.16. Tétel segítségével kapjuk az $\widehat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásbeli konvergenciát. $\square$

A következőkben a 11.3. Tétel egy általánosabb verzióját közöljük bizonyítás nélkül.

11.4. Tétel. (Lindeberg centrális határeloszlás-tétele) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, és $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, olyan folytonos függvények, hogy

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g_n(x)|}{1+x^2} < \infty,$$

és g_n kompakt halmazokon egyenletesen konvergál valamely $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvényhez, amint $n \rightarrow \infty$ (azaz bármilyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz esetén $g_n|_K$ egyenletesen konvergál

$g|_K$ -hoz, amint $n \rightarrow \infty$, azaz bármilyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |g_n(x) - g(x)| = 0$), akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g_n(\hat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)].$$

Speciálisan, $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

11.5. Tétel. (Ljapunov centrális határeloszlás-tétele) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak. Ha valamely $\delta > 0$ esetén $\mathbb{E}(|X_{n,j}|^{2+\delta}) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, k_n$, és

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})|^{2+\delta}] \rightarrow 0, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

akkor $\hat{S}_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{D_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$. (Itt $D_n = \sqrt{\text{Var}(S_n)}$, $n \in \mathbb{N}$.)

Bizonyítás. A 11.3. Tételből következik az állítás. Valóban, mivel $\mathbb{E}(|X_{n,j}|^{2+\delta}) < \infty$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, és megmutatjuk, hogy teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, Lindeberg-feltétel, így valóban alkalmazható a 11.3. Tétel. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $j = 1, \dots, k_n$ esetén

$$\mathbb{E}[(X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})| \geq \varepsilon D_n\}}] \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta D_n^\delta} \mathbb{E}[|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})|^{2+\delta}],$$

ezért

$$L_n(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta D_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})|^{2+\delta}] \rightarrow 0$$

amint $n \rightarrow \infty$. □

11.6. Tétel. (Lévy centrális határeloszlás-tétele: FAE eset) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, és jelölje $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, a részletösszegeket. Ha $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ és $\text{Var}(X_1) > 0$, akkor $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$. Továbbá,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} < x \right) - \Phi(x) \right| \rightarrow 0, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty. \quad (11.4)$$

1. Bizonyítás. Elegendő $\mathbb{E}(X_1) = 0$ esetén bizonyítani az állítást. Alkalmazzuk a 11.3. Tételt $X_{n,j} := X_j$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, választásokkal (és ekkor $k_n = n$, $n \in \mathbb{N}$). Jelölje $\sigma := \sqrt{\text{Var}(X_1)}$. Nyilván $D_n^2 = \text{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Felhasználva, hogy X_j , $j \in \mathbb{N}$, azonos eloszlásúak és $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, a majoráns konvergencia-tétel alapján, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \frac{1}{D_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[(X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})| \geq \varepsilon D_n\}}] \\ &= \frac{k_n}{D_n^2} \mathbb{E}[(X_{n,1} - \mathbb{E}(X_{n,1}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,1} - \mathbb{E}(X_{n,1})| \geq \varepsilon D_n\}}] = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}[X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| \geq \varepsilon \sigma \sqrt{n}\}}] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$. Így teljesül a Lindeberg-feltétel, és ezért valóban alkalmazható a 11.3. Tétel, melyből következik, hogy $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

Rátérünk (11.4) bizonyítására. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$, léteznek olyan $(\varepsilon$ -tól függő) $a, b \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $\Phi(a) < \varepsilon$ és $1 - \Phi(b) < \varepsilon$. Mivel Φ folytonos, kapjuk, hogy Φ egyenletesen folytonos az $[a, b]$ (kompakt) intervallumon, így létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ és olyan $a =: x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k := b$ pontok, hogy

$$\Phi(x_j) - \Phi(x_{j-1}) < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, k.$$

Valóban, $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \varepsilon$, ha $|x - y| < \delta$, $x, y \in \mathbb{R}$. Így, ha $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\frac{b-a}{k} < \delta$ és $x_j := a + \frac{b-a}{k}j$, $j = 0, 1, \dots, k$, akkor

$$\Phi(x_j) - \Phi(x_{j-1}) = |\Phi(x_j) - \Phi(x_{j-1})| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, k.$$

Mivel $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$, kapjuk, hogy létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, hogy

$$|F_n(x_j) - \Phi(x_j)| < \varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon, \quad j \in \{0, 1, \dots, k\},$$

ahol $F_n(x) := \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var } S_n}} < x\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Belátjuk, hogy

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq n_\varepsilon,$$

melyből következik (11.4).

Ha $x < x_0 = a$, akkor

$$0 \leq \Phi(x) \leq \Phi(x_0) = \Phi(a) < \varepsilon \quad \text{és} \quad 0 \leq F_n(x) \leq F_n(x_0) < \Phi(x_0) + \varepsilon < 2\varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon,$$

melyből következik, hogy $|F_n(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon$ tetszőleges $n \geq n_\varepsilon$ esetén.

Hasonlóan látható be, hogy $x \geq x_k = b$ esetén $|F_n(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon$ tetszőleges $n \geq n_\varepsilon$ esetén.

Ha $x \in [x_0, x_k]$, akkor létezik olyan $j \in \{1, \dots, k\}$, hogy $x \in [x_{j-1}, x_j]$, és így

$$\Phi(x_{j-1}) \leq \Phi(x) \leq \Phi(x_j) < \Phi(x_{j-1}) + \varepsilon,$$

és

$$\Phi(x_{j-1}) - \varepsilon < F_n(x_{j-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(x_j) < \Phi(x_j) + \varepsilon < \Phi(x_{j-1}) + 2\varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Ebből következik, hogy $|F_n(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon$, ha $n \geq n_\varepsilon$, ugyanis, ha $\Phi(x_{j-1}) - \varepsilon < F_n(x) < \Phi(x_{j-1}) + \varepsilon$, akkor $\Phi(x)$ és $F_n(x)$ is $\Phi(x_{j-1})$ -nek az ε sugarú nyílt környezetébe esik; ha pedig $\Phi(x_{j-1}) + \varepsilon \leq F_n(x) < \Phi(x_{j-1}) + 2\varepsilon$, akkor $\Phi(x)$ és $F_n(x)$ is $(\Phi(x_{j-1}) + \varepsilon)$ -nak az ε sugarú balról zárt, jobbról nyílt környezetébe esik.

2. Bizonyítás (a tétel első részére). A folytonossági tétel (4.15. Tétel) miatt elegendő belátni, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}}(t) \rightarrow \varphi_X(t), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol X egy standard normális eloszlású véletlen változó.

A 4.19. Állítás alapján $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$. Továbbá, az $m := \mathbb{E}(X_1)$ és $\sigma := \sqrt{\text{Var}(X_1)}$ jelöléseket használva, a 4.2. Tétel (viii) része alapján, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ it \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \right\} \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left\{ it \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \right\} \right) \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left(\exp \left\{ i \frac{t}{\sqrt{n}\sigma} (X_j - m) \right\} \right) = \left(\varphi_{X_1 - m} \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) \right)^n.\end{aligned}$$

A 4.2. Tétel (ix) része alapján, felhasználva, hogy $\mathbb{E}((X_1 - m)^2) < \infty$ és $\mathbb{E}(X_1 - m) = 0$, kapjuk, hogy

$$\varphi_{X_1 - m}(t) = 1 + it \mathbb{E}(X_1 - m) + \frac{(it)^2}{2} \mathbb{E}((X_1 - m)^2) + R_2(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + R_2(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol $R_2(t) = o(t^2)$, ha $t \rightarrow 0$ (felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy $R_2(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, általában véve). Így tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}}(t) = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)^2 + R_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) \right)^n = \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + nR_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)}{n} \right)^n,$$

ahol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{t^2}{2} + nR_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) \right) = -\frac{t^2}{2}.$$

Valóban, ha $t = 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nR_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} nR_2(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 0 = 0,$$

ha pedig $t \neq 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nR_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{\sigma^2} \frac{R_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)^2} = \frac{t^2}{\sigma^2} \cdot 0 = 0.$$

Végezetül, felhasználva az 5.13. Lemmát, kapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

11.7. Megjegyzés. A 11.6. Tétel feltételei mellett, a 7.16. Tétel alapján, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} < x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

és

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

hiszen Φ folytonos, így $\mathbb{P}_{\mathcal{N}(0,1)}(\partial(-\infty, x)) = \mathbb{P}_{\mathcal{N}(0,1)}(\partial(-\infty, x]) = \mathbb{P}_{\mathcal{N}(0,1)}(\{x\}) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

11.8. Állítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha teljesül a Lindeberg-feltétel, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $L_n(\varepsilon) \rightarrow 0$, akkor teljesül az ún. **egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel**, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0.$$

Bizonyítás. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \max_{1 \leq j \leq k_n} \frac{\text{Var}(X_{n,j})}{\varepsilon^2 \text{Var}(S_n)} = \frac{r_n^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ugyanis a 11.2. Tétel (ii) részének bizonyításában beláttuk, hogy $r_n^2 \leq \eta^2 + L_n(\eta)$, $n \in \mathbb{N}$, $\eta > 0$, így a Lindeberg-feltétel teljesülése esetén $r_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. $\square$

Az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltételt infinitezimális feltételnek is szokás hívni.

11.9. Tétel. (Feller tétele, 1935) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$, és jelölje $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. Ha $\hat{S}_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$ és teljesül az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0,$$

akkor teljesül a Lindeberg-feltétel, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $L_n(\varepsilon) \rightarrow 0$.

11.10. Megjegyzés. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$, és jelölje $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. Ha $r_n = \frac{1}{D_n} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j} \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor a 11.8. Állítás bizonyítása alapján teljesül az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel. Továbbá, ha fennáll az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel, akkor Lindeberg centrális határeloszlás-tétele (11.3. Tétel) és Feller tétele (11.9. Tétel) alapján kapjuk, hogy $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$, amint $n \rightarrow \infty$ akkor és csak akkor áll fenn, ha teljesül a Lindeberg-feltétel. $\square$

11.11. Tétel. (Lindeberg többdimenziós centrális határeloszlás-tétele) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független d -dimenziós véletlen vektorok, és $\mathbb{E}(\|X_{n,j}\|^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha

$$(i) \sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(X_{n,j}) \rightarrow \Sigma, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad \text{ahol } \Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ invertálható},$$

(ii) **Lindeberg-feltétel:** minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} [\|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})\| \geq \varepsilon\}}] \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

akkor $S_n - \mathbb{E}(S_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$, ahol $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ a $0 \in \mathbb{R}^d$ várható érték vektorú és $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ kovariancia mátrixú d -dimenziós normális eloszlást jelöli.

Megjegyezzük, hogy a 11.11. Tétel (i) feltételében szereplő Σ mátrix pozitív szemidefinit is, így minden főminorja nemnegatív, és mivel feltettük, hogy invertálható, kapjuk, hogy $\det(\Sigma) > 0$. Továbbá, a 11.11. Tétel (i) feltételéből következik, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $n \geq n_0$ esetén $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ nem mind elfajultak, ugyanis a szóban forgó feltételből következik, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\det(\sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(X_{n,j})) > \frac{1}{2} \det(\Sigma) > 0$, ha $n \geq n_0$, és ha valamely $n \geq n_0$ esetén $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ mind elfajultak lennének, akkor $\sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(X_{n,j}) = 0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$ lenne, mely ellentmondás. A 11.11. Tételben szereplő $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ határeloszlás abszolút folytonos, hiszen Σ invertálható (lásd, a 6.3. Tételt). A 6.3. Tétel bizonyításában azt is beláttuk, hogy mivel Σ invertálható, létezik olyan $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható mátrix, melyre $\Sigma = AA^T$ és így $\mathcal{N}(0, \Sigma) \stackrel{\mathcal{D}}{=} A \cdot \mathcal{N}(0, I_d)$. Ezért a folytonos leképezések tétele (7.17. Tétel) alapján $A^{-1}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, I_d)$, ha $n \rightarrow \infty$, hiszen az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto A^{-1}x$ leképezés folytonos, ahol I_d a $d \times d$ -s egységmátrixot jelöli.

11.12. Tétel. (Többdimenziós centrális határeloszlás-tétel: FAE eset) Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású d -dimenziós véletlen változók, és jelölje $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, a részletösszegeket. Ha $\mathbb{E}(\|X_1\|^2) < \infty$ és $\text{Var}(X_1) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1)), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol $\mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$ a $0 \in \mathbb{R}^d$ várható érték vektorú és $\text{Var}(X_1)$ kovariancia mátrixú d -dimenziós normális eloszlást jelöli.

Bizonyítás. A 11.11. Tételt alkalmazzuk az $X_{n,j} := \frac{1}{\sqrt{n}}X_j$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, választásokkal (azaz ekkor $k_n = n$, $n \in \mathbb{N}$). A 11.11. Tétel (i) feltétele triviális módon teljesül, ugyanis $\sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(X_{n,j}) = n \text{Var}(\frac{1}{\sqrt{n}}X_1) = \text{Var}(X_1)$, $n \in \mathbb{N}$. A 11.11. Tétel (ii) feltételének teljesülése hasonlóan látható be, mint a 11.6. Tételben az egydimenziós esetben: a majoráns konvergencia tétel alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} [\|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})\| \geq \varepsilon\}}] = \mathbb{E} [\|X_1 - \mathbb{E}(X_1)\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_1 - \mathbb{E}(X_1)\| \geq \varepsilon\sqrt{n}\}}] \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$. □

11.13. Tétel. (Poisson konvergenciatétel) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyekre $\mathbb{P}(X_{n,j}=1) = p_{n,j} = 1 - \mathbb{P}(X_{n,j}=0)$, $j=1, \dots, k_n$, és jelölje $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. Ha $\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$ és $\max_{1 \leq j \leq k_n} p_{n,j} \rightarrow 0$, akkor $S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Poisson}(\lambda)$.

Megjegyezzük, hogy a 11.13. Tételben $p_{n,j} = \mathbb{E}(X_{n,j})$, $n \in \mathbb{N}$, $j=1, \dots, k_n$, és $\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} = \mathbb{E}(S_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

11.14. Lemma. Ha $m \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in [-1, 1]$, akkor

$$\left| \prod_{j=1}^m a_j - \prod_{j=1}^m b_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_j - b_j|.$$

Bizonyítás. A harmonika elv alapján

$$\prod_{j=1}^m a_j - \prod_{j=1}^m b_j = \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_i \right) (a_j - b_j) \left(\prod_{i=j+1}^m b_i \right),$$

ahol az üres szorzat értéke definíció szerint 1. Valóban,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_i \right) (a_j - b_j) \left(\prod_{i=j+1}^m b_i \right) &= (a_1 - b_1)b_2 \cdots b_m + a_1(a_2 - b_2)b_3 \cdots b_m + \cdots + \\ &\quad + a_1 \cdots a_{m-2}(a_{m-1} - b_{m-1})b_m + a_1 \cdots a_{m-1}(a_m - b_m) \\ &= -b_1 b_2 \cdots b_m + a_1 \cdots a_{m-1} a_m. \end{aligned}$$

Így

$$\left| \prod_{j=1}^m a_j - \prod_{j=1}^m b_j \right| \leq \sum_{j=1}^m \left| \prod_{i=1}^{j-1} a_i \right| |a_j - b_j| \left| \prod_{i=j+1}^m b_i \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_j - b_j|.$$

□

A 11.13. Tétel (Poisson konvergenciatétel) bizonyítása. A λ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{x\lambda} = e^{\lambda(x-1)},$$

lásd az 5.11. Állítást is. Az $X_{n,j}$ véletlen változó generátorfüggvénye

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbb{E}(x^{X_{n,j}}) = 1 - p_{n,j} + p_{n,j}x = 1 + p_{n,j}(x-1),$$

ezért a 4.21. Tétel (v) része alapján az S_n véletlen változó generátorfüggvénye

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x-1)].$$

A generátorfüggvényekre vonatkozó folytonossági tétel alapján (lásd, 4.22. Tétel) az állítás bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x-1)] = e^{\lambda(x-1)}.$$

Tekintsük a

$$\left| \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x-1)] - e^{\lambda(x-1)} \right| \leq A_n(x) + B_n(x), \quad x \in [-1, 1],$$

becslést, ahol

$$A_n(x) := \left| \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x-1)] - \prod_{j=1}^{k_n} e^{p_{n,j}(x-1)} \right|, \quad B_n(x) := \left| \prod_{j=1}^{k_n} e^{p_{n,j}(x-1)} - e^{\lambda(x-1)} \right|.$$

Itt minden $x \in [-1, 1]$ esetén

$$B_n(x) = \left| e^{(x-1) \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}} - e^{\lambda(x-1)} \right| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

mert $\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \rightarrow \lambda$. Mivel $|x| \leq 1$ esetén $|e^{p_{n,j}(x-1)}| = e^{p_{n,j}(x-1)} \leq e^0 = 1$ és

$$-1 \leq 1 - 2p_{n,j} = 1 + p_{n,j}(-1-1) \leq 1 + p_{n,j}(x-1) \leq 1 + p_{n,j}(1-1) = 1,$$

azaz $|1 + p_{n,j}(x-1)| \leq 1$, a 11.14. Lemma alapján kapjuk, hogy

$$A_n(x) \leq \sum_{j=1}^{k_n} |e^{p_{n,j}(x-1)} - 1 - p_{n,j}(x-1)|.$$

Az exponenciális függvény definíciója alapján tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|e^y - 1 - y| = \left| \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!} \right| = \frac{y^2}{2} \left| \sum_{\ell=2}^{\infty} 2 \frac{y^{\ell-2}}{\ell!} \right| \leq \frac{y^2}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2 \frac{|y|^\ell}{(\ell+2)!} \leq \frac{y^2}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|y|^\ell}{\ell!} = \frac{y^2}{2} e^{|y|},$$

ezért tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén

$$A_n(x) \leq \frac{1}{2} (x-1)^2 \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}^2 e^{p_{n,j}|x-1|} \leq \frac{e^2}{2} (x-1)^2 \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}^2,$$

ahol felhasználtuk, hogy $p_{n,j}|x-1| \leq 2$. Itt

$$\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}^2 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq k_n} p_{n,j} \right) \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \rightarrow 0 \cdot \lambda = 0,$$

ezért $A_n(x) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in [-1, 1]$ esetén. □

12. Sztochasztikus folyamatok, véges dimenziós eloszlások

12.1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, T tetszőleges nemüres halmaz, és minden $t \in T$ esetén $\xi_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ezek $\{\xi_t: t \in T\}$ seregét **sztochasztikus folyamatnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy T a folyamat **paraméterhalmaza** (vagy **indexhalmaza**), $\mathbb{R}$ pedig a **fázistere** (vagy **állapottere**).

Természetes módon lehet definiálni olyan sztochasztikus folyamatokat, melyek fázistere egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t: t \in T\}$ sztochasztikus folyamat a $t \in T$ paraméterben (ha T idő jellegű, akkor a $t \in T$ időpontban) az $x \in \mathbb{R}$ állapotban van, ha a realizált $\omega \in \Omega$ kimenetel mellett $\xi_t(\omega) = x$. A folyamat értékének jelölésére használni fogjuk a $\xi(t)(\omega)$, illetve $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ jelöléseket is (ugyanis a folyamatot lehet tekinteni természetes módon egyetlen $\xi: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezésnek is: $\xi(t, \omega) := \xi_t(\omega)$).

12.2. Definíció. Rögzített $\omega \in \Omega$ esetén a $T \ni t \mapsto \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}$ függvényt a folyamat egy **trajektóriájának** (realizációjának, mintafüggvényének) nevezzük.

Csak olyan folyamatokról lesz szó, amikor $T \subset \mathbb{R}$, azaz a paraméter idő jellegű, például $T = [0, \infty)$, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$. Mivel a valós számok halmazán adott egy természetes rendezés, beszélhetünk egy folyamat jövőjéről, illetve múltjáról. Amennyiben egy rögzített $t \in T \subset [0, \infty)$ paramétert tekintünk jelen időpillanatnak, akkor a $\{\xi_s: s > t\}$ valószínűségi változók családját a **sztochasztikus folyamat jövőjének**, a $\{\xi_s: s < t\}$ valószínűségi változók családját pedig a **sztochasztikus folyamat múltjának** nevezzük.

12.3. Példa. Legyenek ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, teljesen független, azonos eloszlású, valós értékű valószínűségi változók egy sorozata. Ekkor $\{\xi_n: n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat $T = \mathbb{N}$ paraméterhalmazzal és $\mathbb{R}$ fázistérrel. A trajektóriák ebben az esetben valós számsorozatok. Ha $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ és $\mathbb{E}(\xi_1^2) < \infty$ is teljesül, akkor a $\{\xi_n: n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamatot független, azonos eloszlású fehér zajnak is szokás nevezni az idősoranalízisben. Valójában, idősoranalízisben kicsit általánosabban egy (páronként) korrelálatlan, nulla várható értékű, véges második momentummal rendelkező sorozatot értenek **fehér zaj** alatt. $\square$

12.4. Példa. Rögzítsünk egy tetszőleges $p \in (0, 1)$ számot, és tekintsünk $Z_1, Z_2, \dots$ független és azonos eloszlású véletlen változókat

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1 - p, \quad n \in \mathbb{N},$$

eloszlással. Legyen S_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, a kapcsolatos részletösszeg-sorozat, azaz $S_0 := 0$ és $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(S_0, S_1, \dots, S_n) = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$, és a

Z_{n+1} valószínűségi változó független ettől a σ -algebrától. Valóban,

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}.$$

Így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1 \mid S_n, S_{n-1}, \dots, S_0) &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = p, \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n - 1 \mid S_n, S_{n-1}, \dots, S_0) &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = -1) = 1 - p. \end{aligned}$$

Így az $\{S_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ sztochasztikus folyamat a valós egyenes egész rácspontjain lépked, determinisztikusan a 0 pontból indul, és minden egyes időpontban a korábbi lépésektől függetlenül p valószínűséggel eggyel jobbra ugrik, és $1-p$ valószínűséggel pedig eggyel balra. Az $\{S_n : n \in \mathbb{Z}_+ + \}$ sztochasztikus folyamatot (egydimenziós) **véletlen bolyongásnak** nevezzük. Ha $p = 1/2$, akkor szimmetrikus, egyébként nem szimmetrikus bolyongásról beszélünk. $\square$

12.5. Definíció. Legyen $T \subset \mathbb{R}_+$ és $\{\xi_t : t \in T\}$ egy valós értékű sztochasztikus folyamat. Azt mondjuk, hogy a folyamat diszkrét idejű, ha T megszámlálható halmaz. Ekkor általában $T = \mathbb{Z}_+$, tehát a folyamat véletlen változóknak egy sorozata. A folyamat folytonos idejű, ha T a nemnegatív félegyenes egy véges vagy végtelen részintervalluma. Ekkor például $T = \mathbb{R}_+$ vagy $T = [0, 1]$.

12.6. Példa. Megmérjük a külső (véletlen) hőmérsékletet egy $T \subset [0, 24]$ indexhalmaz által meghatározott időpontokban, és legyen $\xi_t, t \in T$, a mérések eredménye. Ekkor a $\{\xi_t : t \in T\}$ család egy sztochasztikus folyamat. Ha a hőmérsékletet például 0 órakor, 1 órakor és 13 órakor mérjük, akkor $T = \{0, 1, 13\} \subset \mathbb{Z}_+$ diszkrét halmaz, tehát diszkrét idejű folyamatról van szó. Ha a hőmérsékletet folyamatosan mérjük, tehát $T = [0, 24]$, akkor a folyamat folytonos idejű. Ha a mérést egy digitális hőmérővel végezzük, akkor a lehetséges értékek halmaza elméletileg megszámlálható, gyakorlatilag véges. Ha analóg hőmérőt használunk, és képesek vagyunk az értékeket tetszőleges pontossággal leolvasni, akkor a folyamat állapottere nem megszámlálható. $\square$

Egy $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat viselkedéséről sok információt tartalmaznak a folyamat ún. véges dimenziós eloszlásai.

12.7. Definíció. Legyen $T \subset \mathbb{R}$. Egy $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat **véges dimenziós eloszlásai** alatt a

$$\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}) : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T\}$$

valószínűségi vektorváltozók eloszlásait értjük (ahol az 1.22. Állítás alapján $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ valóban valószínűségi vektorváltozó).

Egy $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait az

$$\{F_{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}} : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T\}$$

eloszlásfüggvény-sereggel is meg lehet ekvivalens módon adni (lásd 1.28. Állítás). Természetes módon felmerülhet az a kérdés, hogy ha megadjuk eloszlásfüggvényeknek egy

$$\{F_{t_1, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T\}$$

seregét, akkor létezik-e olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és rajta olyan $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat, melynek véges dimenziós eloszlásai éppen az adott eloszlások:

$$F_{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}} = F_{t_1, \dots, t_k}, \quad k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T.$$

A következő fejezetben (Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétel) részletesen megvizsgáljuk ezt a kérdést (lásd a 13.15. Tételt). Felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy a véges dimenziós eloszlássereg ismeretében általában még nem lehet eldönteni, hogy milyen tulajdonságokkal bírnak a folyamat trajektóriái.

12.8. Definíció. Legyen T egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok

- (i) **tágabb értelemben ekvivalensek**, ha megegyeznek a véges dimenziós eloszlásaik.
- (ii) **ekvivalensek**, ha ugyanazon valószínűségi mezőn értelmezettek és $\mathbb{P}(\xi_t = \eta_t) = 1$ teljesül tetszőleges $t \in T$ esetén. Az ekvivalens folyamatokat egymás **modifikációinak** is nevezzük.
- (iii) **megkülönböztethetetlenek**, ha ugyanazon valószínűségi mezőn értelmezettek és $\mathbb{P}(\xi_t = \eta_t, \forall t \in T) = 1$.

Ellenőrizhető, hogy a 12.8. Definícióban megadott relációk ekvivalencia-relációk a sztochasztikus folyamatok között.

12.9. Állítás. Legyen T egy nemüres halmaz.

- (i) Ha a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok ekvivalensek (azaz egymás modifikációi), akkor tágabb értelemben is ekvivalensek (azaz megegyeznek a véges dimenziós eloszlásaik).
- (ii) Ha a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok megkülönböztethetetlenek, akkor ekvivalensek is (azaz egymás modifikációi).

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, és $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} < x_1, \dots, \xi_{t_n} < x_n) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} < x_1, \dots, \xi_{t_n} < x_n, \xi_{t_1} = \eta_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} = \eta_{t_n}) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{t_1} < x_1, \dots, \eta_{t_n} < x_n, \xi_{t_1} = \eta_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} = \eta_{t_n}) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{t_1} < x_1, \dots, \eta_{t_n} < x_n) = F_{\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén, mely abból következik, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$ és $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \leq \mathbb{P}(\bar{B}) = 0$.

(ii). Mivel tetszőleges $t_0 \in T$ esetén

$$\{\xi_t = \eta_t, \forall t \in T\} \subset \{\xi_{t_0} = \eta_{t_0}\},$$

a valószínűség monotonitása alapján $1 = \mathbb{P}(\xi_t = \eta_t, \forall t \in T) \leq \mathbb{P}(\xi_{t_0} = \eta_{t_0})$, melyből következik az állítás. $\square$

A 12.9. Állításban sem az (i), sem a (ii) részt nem lehet megfordítani általában, mind a két esetben ellenpéldát adunk a következő megjegyzésben.

12.10. Megjegyzés. (i). Ellenpélda arra, hogy a 12.9. Állításban az (i) rész nem megfordítható. Legyenek ξ_0 és η_0 azonos eloszlású véletlen változók ugyanazon valószínűségi mezőn, $\xi_t := \xi_0$, $t \in T$, és $\eta_t := \eta_0$, $t \in T$. Ekkor $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ véges dimenziós eloszlásai megegyeznek, de semmi sem garantálja, hogy egymás modifikációi lennének. Például, ha ξ_0 standard normális eloszlású véletlen változó és $\eta_0 := -\xi_0$, akkor $\mathbb{P}(\xi_0 = \eta_0) = \mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 0$.

(ii). Ellenpélda arra, hogy a 12.9. Állításban a (ii) rész nem megfordítható. Legyen $T := [0, 1]$ és U egyenletes eloszlású T -n. Legyen továbbá $\xi_t := 0$, $t \in T$, és

$$\eta_t := \begin{cases} 1 & \text{ha } t = U, \\ 0 & \text{ha } t \neq U, \end{cases} \quad t \in T.$$

Ekkor tetszőleges $t \in [0, 1] = T$ esetén $\mathbb{P}(\xi_t = \eta_t) = \mathbb{P}(U \neq t) = 1$, így $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ egymás modifikációi. Azonban $\mathbb{P}(\xi_t = \eta_t, \forall t \in T) = 0$, mert tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\{\xi_t(\omega) : t \in T\}$ és $\{\eta_t(\omega) : t \in T\}$ a $t = U(\omega)$ pontban különböző értékeket vesznek fel. $\square$

12.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat **független növekményű**, ha $\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 1$, és tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ időpontok esetén a $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ növekmények (teljesen) függetlenek.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat **független, stacionárius növekményű**, ha független növekményű, és a növekmények eloszlása időeltolással szemben invariáns, azaz tetszőleges $t, h \geq 0$ időpontok esetén $\xi_{t+h} - \xi_t$ eloszlása nem függ t -től (következésképpen megegyezik ξ_h eloszlásával).

12.12. Állítás. Legyenek X és Y független (valós értékű) valószínűségi változók F és G eloszlásfüggvényekkel. Jelölje $X+Y$ eloszlásfüggvényét H , melyet az F és a G **eloszlásfüggvények konvolúciójának** nevezünk, és $F * G$ módon jelölünk. Ekkor

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y) dG(y), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (12.1)$$

Bizonyítás. Bevezetve a

$$B_z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < z\}, \quad z \in \mathbb{R},$$

jelölést, a Transzformáció-tétel (3.8. Tétel) és a Fubini-tétel alapján kapjuk, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbb{P}(X+Y < z) = \mathbb{P}((X, Y) \in B_z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_z}(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_z}(x, y) dF_{X,Y}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_z}(x, y) d(F_X(x)F_Y(y)) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_z}(x, y) dF_X(x) \right) dF_Y(y). \end{aligned}$$

Mivel

$$\mathbb{1}_{B_z}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x < z - y, \\ 0 & \text{ha } x \geq z - y, \end{cases}$$

és F_X balról folytonos, kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_z}(x, y) dF_X(x) = \int_{(-\infty, z-y)} 1 dF_X(x) = F_X(z-y) - \lim_{u \downarrow -\infty} F_X(u) = F_X(z-y),$$

és így

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z-y) dG(y), \quad z \in \mathbb{R}.$$

□

Megjegyezzük, hogy ha X és Y független, abszolút folytonos (valós értékű) véletlen változók f és g sűrűségfüggvénnyel, akkor a 12.12. Állításból következik a 3.23. Állítás (i) része, ugyanis a paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele alapján

$$H'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F'(z-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y) dy, \quad z \in \mathbb{R}.$$

A C Appendixben részletesen foglalkozunk a konvolúcióval és tulajdonságaival.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy egy független növekményű, illetve egy független, stationárius növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait milyen véletlen változók eloszlása határozza meg egyértelműen.

12.13. Állítás. Egy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározzák a $\xi_t - \xi_s$, $0 \leq s < t$, növekmények eloszlásai.

Bizonyítás. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ esetén a $\xi_t - \xi_s$, $0 \leq s < t$, növekmények eloszlása egyértelműen meghatározza $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ eloszlását, mely egyértelműen meghatározza $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ eloszlását is. Valóban, a független növekményűség definíciója alapján $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ függetlenek (ha $t_i = t_{i+1}$, akkor $\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i} = 0$, mely független minden véletlen változótól), így bármilyen $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} < x_2, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} < x_k) \\ = \mathbb{P}(\xi_{t_1} < x_1) \mathbb{P}(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} < x_2) \cdots \mathbb{P}(\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} < x_k). \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} - \xi_{t_1} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} \end{pmatrix}, \quad (12.2)$$

kapjuk, hogy tetszőleges $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \dots, \xi_{t_k} < x_k) &= \mathbb{P}\left(\begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} - \xi_{t_1} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

és így $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$ eloszlását egyértelműen meghatározza $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ eloszlása, melyet pedig, mint láttuk a $\xi_t - \xi_s$, $0 \leq s \leq t$, növekmények eloszlása. Végezetül, ha $k \in \mathbb{N}$ és $t_1, \dots, t_k \geq 0$ tetszőlegesek (azaz nem feltétlenül rendezettek), akkor nagyság szerint növekvő sorrendbe való rendezés után alkalmazhatóak az előzőekben leírtak. $\square$

12.14. Állítás. Egy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározzák a ξ_t , $t \geq 0$, véletlen változók eloszlásai (azaz az egydimenziós eloszlások). Továbbá, az $\{F_{\xi_t} : t \geq 0\}$ eloszlásfüggvényekből álló családra teljesül, hogy $F_{\xi_{s+t}} = F_{\xi_s} * F_{\xi_t}$ tetszőleges $s, t \geq 0$ esetén (ahol $*$ eloszlásfüggvények konvolúcióját jelöli).

Bizonyítás. A 12.13. Állítás alapján $\{\xi_t : t \geq 0\}$ véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározzák a $\xi_t - \xi_s$, $0 \leq s < t$, növekmények eloszlásai. Mivel a stacionárius növekményűség miatt tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén $\xi_t - \xi_s$ eloszlása megegyezik ξ_{t-s} eloszlásával, kapjuk az állítás első részét. Továbbá, $\xi_{s+t} = (\xi_{s+t} - \xi_t) + \xi_t$, ahol $\xi_{s+t} - \xi_t$ és $\xi_t = \xi_t - \xi_0$ függetlenek,

és $\xi_{s+t} - \xi_t$ eloszlása megegyezik $\xi_s - \xi_0 = \xi_s$ eloszlásával, így kapjuk az állítás második részét is. $\square$

12.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy (egydimenziós) eloszlásfüggvényeknek egy $\{F_t : t \geq 0\}$ családja **egyparaméteres konvolúciós félcsoportot** alkot, ha $F_{s+t} = F_s * F_t$ tetszőleges $s, t \geq 0$ esetén, és $F_0 = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$.

12.16. Megjegyzés. A 12.15. Definícióban az $F_0 = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ megkötés már következik az $F_{s+t} = F_s * F_t$, $s, t \geq 0$ feltételből. Ugyanis az $s = t = 0$ választással kapjuk, hogy $F_0 = F_0 * F_0$. Jelölje φ_0 egy F_0 eloszlásfüggvényű ζ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor $F_0 = F_0 * F_0$ miatt $\zeta \stackrel{\mathcal{D}}{=} \zeta + \tilde{\zeta}$, ahol $\tilde{\zeta} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \zeta$ és $\tilde{\zeta}$ és ζ függetlenek, így $\varphi_0(t) = \varphi_0^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Felhasználva, hogy $\varphi_0(0) = 1$ és φ_0 folytonos, kapjuk, hogy $\varphi_0(t) = 1$ bármilyen $t \in \mathbb{R}$ esetén, azaz F_0 az azonosan 0 véletlen változó eloszlásfüggvénye. $\square$

12.17. Definíció. Legyen $T \neq \emptyset$ és $\{\xi_t : t \in T\}$ valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy $\mathbb{E}(|\xi_t|) < \infty$, $t \in T$. Ekkor az $m : T \rightarrow \mathbb{R}$, $m(t) := \mathbb{E}(\xi_t)$, $t \in T$, függvényt a folyamat várható érték függvényének hívjuk. Továbbá, ha $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$, $t \in T$, akkor a $K : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K(s, t) := \text{Cov}(\xi_s, \xi_t), \quad (s, t) \in T \times T,$$

függvényt a folyamat kovariancia függvényének hívjuk.

12.18. Megjegyzés. Ha $\{\xi_t : t \in T\}$ egy olyan valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$, $t \in T$, akkor $\mathbb{E}(|\xi_t|) < \infty$, $t \in T$, is teljesül, ugyanis a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján $\mathbb{E}(|\xi_t|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi_t^2) \mathbb{E}(1^2)} < \infty$. $\square$

12.19. Állítás. Legyen $T \neq \emptyset$ és $\{\xi_t : t \in T\}$ egy olyan valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$, $t \in T$. Ekkor K kovariancia függvényére teljesül, hogy

$$(i) \ K(s, t) = K(t, s), \ s, t \in T \quad (\text{azaz } K \text{ szimmetrikus}),$$

$$(ii) \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t_1, \dots, t_k \in T, \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C} \text{ esetén}$$

$$\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \overline{\lambda_j} K(t_i, t_j) \geq 0.$$

Speciálisan, tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $t_1, \dots, t_k \in T$ esetén a $(K(t_j, t_l))_{j,l=1,\dots,k}$ mátrix pozitív szemidefinit.

Bizonyítás. (i). $K(s, t) = \text{Cov}(\xi_s, \xi_t) = \text{Cov}(\xi_t, \xi_s) = K(t, s)$, $s, t \in T$,

(ii). A várható érték linearitása alapján

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \bar{\lambda}_j K(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \bar{\lambda}_j \text{Cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}) = \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \bar{\lambda}_j \mathbb{E}((\xi_{t_i} - \mathbb{E}(\xi_{t_i}))(\xi_{t_j} - \mathbb{E}(\xi_{t_j}))) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \bar{\lambda}_j (\xi_{t_i} - \mathbb{E}(\xi_{t_i}))(\xi_{t_j} - \mathbb{E}(\xi_{t_j})) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i (\xi_{t_i} - \mathbb{E}(\xi_{t_i})) \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j (\xi_{t_j} - \mathbb{E}(\xi_{t_j})) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i (\xi_{t_i} - \mathbb{E}(\xi_{t_i})) \overline{\sum_{j=1}^k \lambda_j (\xi_{t_j} - \mathbb{E}(\xi_{t_j}))} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^k \lambda_i (\xi_{t_i} - \mathbb{E}(\xi_{t_i})) \right|^2 \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

□

13. Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétel

Legyen $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ egy tetszőleges valós értékű sztochasztikus folyamat, ahol T egy nemüres indexhalmaz. Jelölje $\mathbb{R}^T$ a T indexhalmazon értelmezett valós értékű $x : T \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazát, azaz legyen $\mathbb{R}^T := \{x \mid x : T \rightarrow \mathbb{R}\}$. Vegyük észre, hogy a ξ sztochasztikus folyamat úgy is felfogható, mint egy olyan függvény, mely az Ω eseménytérén van értelmezve, és az $\mathbb{R}^T$ térben veszi fel értékeit, nevezetesen

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T, \quad \Omega \ni \omega \mapsto \xi(\omega),$$

ahol $\xi(\omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$, $T \ni t \mapsto \xi(\omega)(t) := \xi_t(\omega)$. Természetesen a további munka szempontjából az lenne kényelmes, ha ξ az $\mathbb{R}^T$ tér véletlen eleme lenne, tehát ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ függvény mérhető lenne valamilyen alkalmasan definiált mérhetőségi struktúrára vonatkozóan. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez nem is egyszerűen egy kényelmi követelmény, hanem a ξ leképezés mérhetősége elengedhetetlen egyes eredmények bizonyítása során.

Abban a speciális esetben amikor T egy véges indexhalmaz, azaz $T = \{t_1, \dots, t_d\}$, ahol $d \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy a $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_d}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés valószínűségi vektorváltozó (lásd 1.22. Állítás), azaz mérhető az $(\Omega, \mathcal{A})$ és $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi struktúrákra nézve, ahol $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ az $\mathbb{R}^d$ szorzattér Borel σ -algebráját jelöli.

Természetes módon adódik a kérdés, hogy mit állíthatunk akkor, ha T nem véges halmaz. Ekkor megadunk az $\mathbb{R}^T$ téren egy $\sigma(\mathcal{C})$ módon jelölt σ -algebrát, az ún. cylinderhalmazok (hengerhalmazok) által generált σ -algebrát. Ehhez először bevezetjük az ún. (végesdimenziós) projekciókat.

13.1. Definíció. Legyen T egy nemüres indexhalmaz, $n \in \mathbb{N}$ és $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset T$. A $p_S : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}^S$,

$$(p_S(x))(s_i) := x(s_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^T,$$

leképezést az $\mathbb{R}^S$ -re való **projekciónak vagy vetítésnek** nevezzük. (A fentiekben definiált $p_S(x)$ függvényt röviden $(x_{s_1}, \dots, x_{s_n})$ módon is írhatjuk, ahol x_{s_i} az x függvénynek az s_i pontban felvett $x(s_i)$ helyettesítési értékét jelöli rövidített módon, ahol $i = 1, \dots, n$.)

Megjegyezzük, hogy a 13.1. Definícióban bevezetett $p_S(x)$ valóban függvény tetszőleges $x \in \mathbb{R}^T$ esetén, ugyanis az S halmaz elemei páronként különbözőek (egy halmaz megadásának konvencióit figyelembe véve).

Az alábbiakban felidézzük mértékelméletből a mérhető terek szorzatát és a cylinderhalmaz (hengerhalmaz) fogalmát.

13.2. Definíció. Legyenek $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek. A

$$\mathcal{T} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

halmaz elemeit mérhető tégláknak hívjuk, az $(X_1 \times X_2, \sigma(\mathcal{T}))$ mérhető teret pedig az $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek szorzatának nevezzük. A $\sigma(\mathcal{T})$ σ -algebrát $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ (vagy $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$) módon szokás jelölni. A definíció értelemszerűen kiterjeszthető véges sok $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \dots, n$, mérhető tér szorzatára is.

Ha $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in T}$ végtelen sok mérhető tér, ahol T egy tetszőleges (nem feltétlenül véges) indexhalmaz, akkor szorzatukon azt az $(X, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhető teret értjük, melyre $X := \prod_{\alpha \in T} X_\alpha$ és $\sigma(\mathcal{C})$ az ún. cylinderhalmazok (hengerhalmazok) által generált σ -algebra. A **cylinderhalmazok** olyan $C \subset X$ halmazok, melyekhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, és $B \in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k} := \mathcal{A}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{\alpha_n}$, hogy

$$C = \{x \in X : (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B\}.$$

Az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ indexeket a C tartópontjainak (koordinátáinak), a B halmazt pedig a C egy tartóhalmazának (alapjának) mondjuk. A cylinderhalmazok összességét $\mathcal{C}$ -vel jelöljük.

13.3. Megjegyzés. (i): Amennyiben $X_\alpha := \mathbb{R}$, $\alpha \in T$, úgy a 13.2. Definícióbeli X szorzattér nem más, mint a T halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ -beli értékű függvények halmaza, azaz $\mathbb{R}^T$. Ekkor tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, esetén

$$C := \left\{x : T \rightarrow \mathbb{R} : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \in [0, 1]^2\right\}$$

egy cylinderhalmaz. Mértékelméletből ismert, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^n$, így, ha T egy n -elemű halmaz, akkor $\mathbb{R}^T$ -t beazonosítva $\mathbb{R}^n$ -nel, kapjuk, hogy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ beazonosítható $\mathcal{B}(\mathbb{R})^n$ -nel.

(ii): Legyen $T := \{1, 2, 3\}$ és $X_i := \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor tetszőleges $r > 0$ esetén $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\right\}$ cylinderhalmaz, ugyanis

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in B\right\},$$

ahol B az (x_1, x_2) sík origó középpontú r -sugarú körlapja (a határt is beleértve). A szóban forgó cylinderhalmaz nem más, mint az x_3 -tengelyre forgásszimmetrikus, r -sugarú henger.

(iii): Egy cylinderhalmaz többféleképpen is megadható. Például:

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \in B \times \mathbb{R}\right\},$$

ahol B a (ii)-ben definiált.

(iv): Véges sok cylinderhalmaz mindig tekinthető azonos koordináták felettinek, azonos "dimenziójú" tartóhalmazokkal. Például, ha $T := \mathbb{N}$, $X_i := \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, és

$$C_1 := \{x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_1\},$$

$$C_2 := \{x \in X : (x_{\beta_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_2\},$$

ahol X a 13.2. Definícióbeli szorzattér, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_i \in T$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\beta_1 \neq \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$, és $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, akkor legyen $w_1 := \alpha_1, \dots, w_n := \alpha_n, w_{n+1} := \beta_1$. Ekkor

$$\begin{aligned} \{x \in X : (x_{w_1}, x_{w_2}, \dots, x_{w_{n+1}}) \in B_1 \times \mathbb{R}\} &= \{x \in X : (x_{w_1}, x_{w_2}, \dots, x_{w_n}) \in B_1\} \\ &= \{x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_1\} = C_1, \end{aligned}$$

és

$$\{x \in X : (x_{w_{n+1}}, x_{w_2}, \dots, x_{w_n}, x_{w_1}) \in B_2 \times \mathbb{R}\} = \{x \in X : (x_{\beta_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_2\} = C_2.$$

Így C_1 , illetve C_2 tekinthető $\{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\}$ tartópontokhoz tartozóaknak, azonos dimenziójú $B_1 \times \mathbb{R}$, illetve $B_2 \times \mathbb{R}$ tartóhalmazokkal. Más a tartópontok sorrendje, de ugyanazon tartópontokról van szó. Azon is lehet segíteni, hogy nem ugyanaz a sorrend. Legyen $\rho : X_{\alpha_2} \times \dots \times X_{\alpha_n} \times X_{\beta_1} \rightarrow X_{\beta_1} \times X_{\alpha_2} \times \dots \times X_{\alpha_n}$,

$$\rho(x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}, x_{\beta_1}) := (x_{\beta_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}), \quad (x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}, x_{\beta_1}) \in X_{\alpha_2} \times \dots \times X_{\alpha_n} \times X_{\beta_1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \{x \in X : (x_{w_1}, x_{w_2}, \dots, x_{w_n}, x_{w_{n+1}}) \in \mathbb{R} \times \rho^{-1}(B_2)\} &= \{x \in X : (x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}, x_{\beta_1}) \in \rho^{-1}(B_2)\} \\ &= \{x \in X : \rho(x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}, x_{\beta_1}) \in B_2\} \\ &= \{x \in X : (x_{\beta_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_2\} = C_2. \end{aligned}$$

Ha a tartópontok száma különböző, akkor a kevesebb számú tartóponttal rendelkező cylinderhalmaz tartóhalmazát ki lehet bővíteni $B \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ módon (a direkt szorzatban hozzávett $\mathbb{R}$ -ekhez tartozó tartópontokat tetszőlegesen választhatjuk), és alkalmazható a fenti levezetés.

(v): Legyen T egy nemüres indexhalmaz, és tekintsük az $\mathbb{R}^T$ téren a 13.2. Definícióban bevezetett hengerhalmazok által generált $\sigma(\mathcal{C})$ σ -algebrát. Egy $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset T$ indexhalmaz elemeihez, mint tartópontokhoz és egy $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^n$ Borel-halmazhoz, mint tartóhalmazhoz tartozó cylinderhalmaz felírható

$$p_S^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \dots, x_{s_n}) \in B\}$$

alakban is, ahol p_S a 13.1. Definícióban bevezetett (végesdimenziós) projekció. A cylinderhalmazok (hengerhalmazok) által generált $\sigma(\mathcal{C})$ σ -algebra nem más, mint az a legszűkebb σ -algebra $\mathbb{R}^T$ -n, melyre nézve minden (végesdimenziós) projekció mérhető. Ha T véges, akkor $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. $\square$

13.4. Lemma. *A 13.2. Definíció jelöléseit használva, a cylinderhalmazok $\mathcal{C}$ -vel jelölt összessége halmazalgebra.*

Bizonyítás. (i). $X \in \mathcal{C}$, mert $X = \{x \in X : x_\alpha \in X_\alpha\}$ fennáll minden $\alpha \in T$ esetén.

(ii). Ha $C \in \mathcal{C}$, ahol $C := \{x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, és $B \in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k}$, akkor

$$\begin{aligned} X \setminus C &= \{x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \notin B\} \\ &= \left\{ x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in \left(\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i} \right) \setminus B \right\} \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Így C -nek és $X \setminus C$ -nek ugyanazok a tartópontjai, $X \setminus C$ tartóhalmaza pedig C tartóhalmazának $\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}$ -ben vett komplementere.

(iii). Ha $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, ahol

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_1\}, & B_1 &\in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k}, \\ C_2 &:= \{x \in X : (x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_m}) \in B_2\}, & B_2 &\in \prod_{\ell=1}^m \mathcal{A}_{\beta_\ell}, \end{aligned}$$

akkor a 13.3. Megjegyzés (iv) része alapján elérhetjük, hogy a C_1 és C_2 cylinderhalmazok azonos tartópontokkal és azonos "dimenziójú" tartóhalmazokkal rendelkezzenek. Azaz feltehető, hogy $n = m$, és $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$. Így

$$C_1 \cup C_2 = \{x \in X : (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B_1 \cup B_2\} \in \mathcal{C},$$

ugyanis $B_1 \cup B_2 \in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k}$. □

13.5. Állítás. A 13.2. Definíció jelöléseit használva egy $B \subset X$ halmaz pontosan akkor mérhető, azaz $B \in \sigma(\mathcal{C})$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ indexsorozat és $\tilde{B} \in \prod_{k=1}^\infty \mathcal{A}_{\alpha_k}$, hogy $p_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty}^{-1}(\tilde{B}) = B$, ahol $p_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty} : \prod_{\alpha \in T} X_\alpha \rightarrow \prod_{k=1}^\infty X_{\alpha_k}$, $p_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty}(x) := (x_{\alpha_k})_{k=1}^\infty$, $x \in \prod_{\alpha \in T} X_\alpha$ (vagyis a B halmaz „csak megszámlálható sok koordinátától függ”).

A 13.5. Állítás az $X_\alpha := \mathbb{R}$, $\alpha \in T$, esetben szemléletesen azt jelenti, hogy egy $B \subset \mathbb{R}^T$ halmaz pontosan akkor $\sigma(\mathcal{C})$ -mérhető, ha a B -hez tartozó függvények oly módon vannak definiálva, hogy megszámlálható sok pontban közös módon előírjuk az értéküket, a többi helyen pedig az értékek tetszőlegesek lehetnek.

Ezek után már van értelme azt kérdezni, hogy egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ függvény mérhető-e, melyet a következő állításban válaszolunk meg.

13.6. Állítás. Legyen $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ egy valós értékű sztochasztikus folyamat, ahol T egy nemüres indexhalmaz. Ekkor $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ mérhető az $(\Omega, \mathcal{A})$ és $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhetőségi terekre (struktúrákra) vonatkozóan.

Bizonyítás. Mivel a cylinderhalmazok $\mathcal{C}$ összessége halmazalgebra (lásd 13.4. Lemma), mely generálja a $\sigma(\mathcal{C})$ σ -algebrát, a "jó halmazok" módszere alapján (lásd 1.19. Állítás) elég azt megmutatni, hogy tetszőleges cylinderhalmaz ξ általi ősképe $\mathcal{A}$ -mérhető. Jelöljön C egy cylinderhalmazt, melynek tartópontjai egy $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset T$ véges halmaz elemei (ahol $n \in \mathbb{N}$) és tartóhalmaza egy $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel-halmaz. Ekkor

$$\begin{aligned}\xi^{-1}(C) &= \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in C\} = \{\omega \in \Omega : (\xi_{s_1}(\omega), \dots, \xi_{s_n}(\omega)) \in B\} \\ &= (\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n})^{-1}(B) \in \mathcal{A},\end{aligned}$$

mert $(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mérhető, ugyanis $\mathbb{R}^n$ -beli értékű véletlen változó (lásd 1.22. Állítás). $\square$

Tekintettel arra, hogy már definiáltunk egy mérhetőségi struktúrát $\mathbb{R}^T$ -n, a cylinderhalmazok által generált $\sigma(\mathcal{C})$ σ -algebrát, definiálhatjuk egy ξ sztochasztikus folyamat, mint $\mathbb{R}^T$ -beli értékű véletlen változó, eloszlását is az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ téren. Az alábbi definíció valójában az 1.10. Definíció speciális esete.

13.7. Definíció. Egy $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ (valós értékű) sztochasztikus folyamat (ahol T egy nemüres indexhalmaz) eloszlásán az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ téren definiált alábbi valószínűségi mértéket értjük:

$$\mathbb{P}_\xi(M) := \mathbb{P}(\xi \in M) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(M)), \quad M \in \sigma(\mathcal{C}).$$

A következő állítás egy sztochasztikus folyamat eloszlása és a végesdimenziós eloszlásai közötti kapcsolatot tárgyalja.

13.8. Állítás. Legyen $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ egy (valós értékű) sztochasztikus folyamat, ahol T egy nemüres indexhalmaz.

- (i) Ekkor ξ eloszlása egyértelműen meghatározza ξ végesdimenziós eloszlásait.
- (ii) Ha $\eta := \{\eta_t : t \in T\}$ egy olyan (valós értékű) sztochasztikus folyamat, melynek végesdimenziós eloszlásai megegyeznek ξ végesdimenziós eloszlásaival, akkor ξ és η eloszlása megegyezik, azaz $\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_\eta$. (Tehát egy sztochasztikus folyamat végesdimenziós eloszlásai egyértelműen meghatározzák a folyamat eloszlását az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ téren.)

Bizonyítás. (i). Legyen $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset T$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ekkor

$$\mathbb{P}_{\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n}}(B) = \mathbb{P}((\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n}) \in B) = \mathbb{P}(\xi \in C) = \mathbb{P}_\xi(C),$$

ahol C az S indexhalmazhoz, mint tartóponthalmazhoz és B -hez, mint tartóhalmazhoz tartozó cylinderhalmaz.

(ii). Mivel a cylinderhalmazok $\mathcal{C}$ összessége halmazalgebra (lásd 13.4. Lemma), mely generálja a $\sigma(\mathcal{C})$ σ -algebrát, és $\mathbb{P}_\xi$ és $\mathbb{P}_\eta$ σ -véges mértékek $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ -n, a Carathéodory-tétel szerint

(lásd 1.8. Tétel) elég azt megmutatni, hogy $\mathbb{P}_\xi$ és $\mathbb{P}_\eta$ megegyezik a $\mathcal{C}$ halmazalgebrán. Ez viszont teljesül, ugyanis, ha $C = \{s_1, \dots, s_n\}$ indexhalmazhoz, mint tartóponthalmazhoz és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -hez, mint tartóhalmazhoz tartozó cylinderhalmaz (ahol $n \in \mathbb{N}$), akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\xi(C) &= \mathbb{P}(\xi \in C) = \mathbb{P}((\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n}) \in B) = \mathbb{P}_{\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n}}(B) = \mathbb{P}_{\eta_{s_1}, \dots, \eta_{s_n}}(B) \\ &= \mathbb{P}((\eta_{s_1}, \dots, \eta_{s_n}) \in B) = \mathbb{P}(\eta \in C) = \mathbb{P}_\eta(C).\end{aligned}$$

□

A következőkben azt az előző fejezetben felvetett kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi egy olyan minimális feltétel, melyet egy valószínűségeloszlás családnak teljesítenie kell ahhoz, hogy a család elemei egy sztochasztikus folyamat végesdimenziós eloszlásai (másként szólva a szóban forgó sztochasztikus folyamat eloszlásának, mint valószínűségi mértéknek a marginálisai) legyenek. Ez a Kolmogorov konzisztenciátétel, illetve egzisztenciátétel témaköre.

13.9. Definíció. Legyen $T \neq \emptyset$ indexhalmaz. Legyen

$$T^* := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in T^n : n \in \mathbb{N}, t_i \neq t_j, \text{ ha } i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\} \right\},$$

és minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$ esetén legyen adott egy $P_{t_1, \dots, t_n}$ valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mérhető téren. A $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ családot **konzisztensnek** hívjuk, ha kielégíti az alábbi két feltételt:

- (a) **permutáció invariancia:** ha π az $(1, 2, \dots, n)$ egy permutációja, akkor tetszőleges $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, Borel-mérhető halmazok esetén a $P_{t_1, \dots, t_n}$ és $P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}$ valószínűségi mértékekre fennáll, hogy

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(A_{\pi(1)} \times A_{\pi(2)} \times \dots \times A_{\pi(n)}),$$

- (b) **kompatibilitási feltétel:** minden $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in T^*$ és tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A \times \mathbb{R}).$$

13.10. Megjegyzés. (i). A 13.9. Definíció (a) feltétele szemléletesen azt jelenti, hogy egy téglatest mértéke nem függ a koordináták sorrendjétől, a (b) feltétele pedig a „hasábok térfogata egyenlő az alapterület szorozva a magassággal” elv általánosítása. A 13.9. Definíció (b) feltételét azért szokás kompatibilitási feltételnek hívni, mert különböző dimenziós Euklideszi tereken adott valószínűségi mértékek közötti kapcsolatról szól.

(ii). A következőkben példát mutatunk valószínűségi mértékek konzisztens (azaz a 13.9. Definíció (a) és (b) feltételeit teljesítő) családjára. Legyen $T \neq \emptyset$, $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy sűrűségfüggvény, legyen továbbá tetszőleges $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, és $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) := \int_A f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy a közös eloszlás abszolút folytonos f sűrűségfüggvénnyel, akkor felhasználva, hogy ekkor $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ is abszolút folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye $f_{\xi_1} \cdots f_{\xi_n}$, kapjuk, hogy

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) = \int_A f_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \mathbb{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in A)$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén. Ekkor $(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén, a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A \times \mathbb{R}) &= \int_{A \times \mathbb{R}} f(x_1) \cdots f(x_n) f(x_{n+1}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n dx_{n+1} \\ &= \int_A f(x_1) \cdots f(x_n) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_A f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = P_{t_1, \dots, t_n}(A). \end{aligned}$$

Így teljesül a 13.9. Definíció (b) feltétele. A 13.9. Definíció (a) feltételét hasonlóan ellenőrizhetjük le. $\square$

13.11. Állítás. Legyen $T \neq \emptyset$ egy indexhalmaz. Legyen továbbá $\mathbb{P}$ egy valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ szorzattéren, ahol $\sigma(\mathcal{C})$ a cylinderhalmazok által generált σ -algebrát jelöli (lásd a 13.2. Definíciót). Minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, esetén legyen

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) := \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ekkor a $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi mértékekből álló család konzisztens.

Bizonyítás. Permutáció invariancia: Legyen $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, és π az $(1, \dots, n)$ egy permutációja. Ekkor

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A_1 \times \cdots \times A_n\}) \\ &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_i} \in A_i, i = 1, \dots, n\}), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(A_{\pi(1)} \times \cdots \times A_{\pi(n)}) &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_{\pi(1)}}, \dots, x_{t_{\pi(n)}}) \in A_{\pi(1)} \times \cdots \times A_{\pi(n)}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_{\pi(i)}} \in A_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}) \\ &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_j} \in A_j, j = 1, \dots, n\}), \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az $i := \pi^{-1}(j)$ helyettesítéssel éltünk.

Kompatibilitás: Legyen $(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ekkor

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A \times \mathbb{R}) &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}, x_{t_{n+1}}) \in A \times \mathbb{R}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}) = P_{t_1, \dots, t_n}(A). \end{aligned}$$

□

Sokkal érdekesebb a fordított állítás, mely Kolmogorov konzisztenciátétel néven ismert.

13.12. Tétel. (Kolmogorov konzisztenciátétele) Legyen $T \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $P_{t_1, \dots, t_n}$ egy valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mérhető téren. Tegyük fel, hogy a $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ család konzisztens. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhető téren (ahol $\sigma(\mathcal{C})$ a cylinderhalmazok által generált σ -algebra, lásd a 13.2. Definíciót), amelyre minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) = \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Bizonyítás. Először definiálunk egy $\mathbb{P}$ halmazfüggvényt a cylinderhalmazok $\mathcal{C}$ halmazalgebráján. Ha

$$C = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \in A\},$$

ahol $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, egy cylinderhalmaz, akkor legyen $\mathbb{P}(C) := P_{t_1, \dots, t_n}(A)$. Egy C cylinderhalmaz mértéke úgy van definiálva, hogy megkeressük milyen tartópontok és tartóhalmaz tartozik hozzá, vesszük a tartópontokhoz tartozó $P_{t_1, \dots, t_n}$ valószínűségi mértéket, majd e szerint a tartóhalmaz mértékét. Felhívjuk a figyelmet, hogy mivel egy C cylinderhalmazt többféle módon is meg lehet adni, ezért nem evidens, hogy $\mathbb{P}(C)$ definíciója értelmes. Azonban, mivel a $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ család konzisztens, végiggondolható, hogy $\mathbb{P}(C)$ jóldefiniált, vagyis értéke nem függ a cylinderhalmaz megadási módjától. Például, a fenti C a

$$C = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, x_{t_{n+1}}) \in A \times \mathbb{R}\}$$

alakban is megadható, így a definíció szerint $\mathbb{P}(C) = P_{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}}(A \times \mathbb{R})$, mely a kompatibilitási feltétel miatt megegyezik $P_{t_1, \dots, t_n}(A)$ -val.

Belátjuk, hogy $\mathbb{P}(\mathbb{R}^T) = 1$. Nyilván minden $t \in T$ esetén $\mathbb{R}^T = \{x \in \mathbb{R}^T : x_t \in \mathbb{R}\}$, és így $\mathbb{P}(\mathbb{R}^T) = P_t(\mathbb{R}) = 1$, hiszen P_t valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en.

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}$ végesen additív halmazfüggvény $\mathcal{C}$ -n. A 13.3. Megjegyzés (iv) része alapján véges sok cylinderhalmazról feltehető, hogy ugyanazokkal a tartópontokkal rendelkeznek, azt, hogy véges sok ilyen tulajdonságú, páronként diszjunkt cylinderhalmazt tekinthetünk olyan tartóhalmazokkal, melyek páronként diszjunktak, és felhasználva azt is, hogy ezen rögzített tartópontokhoz a feltétel alapján tartozó valószínűségi mérték speciálisan végesen additív is, adódik, hogy $\mathbb{P}$ végesen additív halmazfüggvény $\mathcal{C}$ -n.

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}$ σ -additív is $\mathcal{C}$ -n. A B.4. Tétel alapján ehhez elég belátni, hogy létezik egy olyan $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ σ -kompakt család, hogy a $\mathbb{P} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ végesen additív (véges értékeket felvevő) halmazfüggvény belülről reguláris $\mathcal{K}$ -ra nézve.

Jelölje $\mathcal{K}$ a kompakt tartóhalmazokkal rendelkező cylinderhalmazok családját.

Megmutatjuk először, hogy $\mathcal{K}$ σ -kompakt család. Legyen $K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, olyan sorozat, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, azonban $\forall N \in \mathbb{N}$ -re $\bigcap_{n=1}^N K_n \neq \emptyset$. Ellentmondásra szeretnénk jutni. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$, $n \in \mathbb{N}$, és $K_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. (Ezt megtehetjük, mert a $\tilde{K}_1 := K_1$, $\tilde{K}_2 := K_1 \cap K_2$, $\dots$, $\tilde{K}_n := K_1 \cap \dots \cap K_n$, $n \in \mathbb{N}$, választásokkal $\tilde{K}_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, és $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, $\bigcap_{n=1}^N \tilde{K}_n = \tilde{K}_N \neq \emptyset$, $N \in \mathbb{N}$.) A K_n , $n \in \mathbb{N}$, halmazok tartóindexeit oly módon vegyük sorra, hogy először a K_1 tartóindexeit, majd a K_2 tartóindexeit, stb. vesszük sorra. Természetesen mindig csak a "szükséges" tartóindexeket vesszük hozzá, és mivel $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$, $n \in \mathbb{N}$, minden egyes lépésben a már meglévő tartóindexek sorozata csak bővíthet, és felhasználva, hogy megszámlálható sok véges halmaz uniója is megszámlálható, kapjuk, hogy K_n , $n \in \mathbb{N}$, tartóindexeit ilyen módon sorra véve valóban egy $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ módon jelölt sorozatot kapunk. Ez a sorozat megszámlálhatóan végtelen sok (azaz nem véges sok) tagból áll, ugyanis ha csak véges sok tagból állna, akkor a Cantor-féle közösrész- (metszet) tétel alapján a K_n , $n \in \mathbb{N}$, család metszete egy olyan cylinderhalmaz lenne, melynek tartóponthalmaza a szóban forgó véges sok pontból álló halmaz, tartóhalmaza pedig egy nemüres halmaz lenne, mely ellentmondott annak, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Vegyük az első t_1 indexet, és tekintsük a $p_{\{t_1\}}(K_n)$, $n \in \mathbb{N}$, halmazokat (vetületeket), ahol $p_{\{t_1\}}(K_n)$ (a 13.1. Definíció szerint) azon $y \in \mathbb{R}$ pontokból áll, melyekhez létezik olyan $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{T \setminus \{t_1\}}$, hogy y -t és $\tilde{y}$ -t "alkalmas" módon összerakva a kapott pont benne van K_n -ben. Mivel $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cylinderhalmazok olyan nemüres monoton csökkenő rendszere, melyek tartóhalmazai kompakt halmazok, kapjuk, hogy a szóban forgó vetületek nemüres, monoton csökkenő kompakt részhalmazai $\mathbb{R}$ -nek. Így Cantor-féle közösrész (metszet) tétel alapján a metszetük nem üres halmaz, legyen $x_{t_1}^*$ a metszet egy eleme, és jelölje C_{t_1} az $\{x_{t_1}^*\}$ egy pontból álló halmazhoz, mint tartóhalmazhoz tartozó cylinderhalmazt, azaz

$$C_{t_1} := \{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} = x_{t_1}^*\}.$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy az $x_{t_1}^*$ létezésének indoklásakor (a metszet nemüres) használtuk fel, hogy $\bigcap_{n=1}^N K_n \neq \emptyset$, $\forall N \in \mathbb{N}$, (vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $K_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, hiszen feltettük, hogy K_n , $n \in \mathbb{N}$, monoton csökkenő halmazrendszer). Ha a K_n , $n \in \mathbb{N}$, halmazokat elmetsszük a C_{t_1} halmazzal, úgy továbbra is fennáll, hogy $K_1 \cap C_{t_1} \supset K_2 \cap C_{t_1} \supset \dots \supset K_n \cap C_{t_1} \supset \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap C_{t_1}) = \emptyset$ és az is, hogy $\forall N \in \mathbb{N}$ -re $\bigcap_{n=1}^N (K_n \cap C_{t_1}) \neq \emptyset$, ugyanis a monoton csökkenőség miatt $\bigcap_{n=1}^N (K_n \cap C_{t_1}) = K_N \cap C_{t_1}$, és $x_{t_1}^* \in p_{\{t_1\}}(K_N)$, azaz $x_{t_1}^*$ -ot ki lehet úgy "egészíteni", hogy a kiegészítés után kapott pont K_N eleme legyen, és ez a pont nyilván eleme C_{t_1} -nek is. Vegyük ezt követően a t_2 indexet és ismételjük meg az eljárást a K_n , $n \in \mathbb{N}$, család helyett a $K_n \cap C_{t_1}$, $n \in \mathbb{N}$, családra: $x_{t_2}^*$ eleme a $p_{\{t_2\}}(K_n \cap C_{t_1})$, $n \in \mathbb{N}$ halmazok (vetületek) metszetének, továbbá a

$$C_{t_1, t_2} := \{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} = x_{t_1}^*, x_{t_2} = x_{t_2}^*\}$$

jelöléssel

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap C_{t_1, t_2}) = \emptyset, \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^N (K_n \cap C_{t_1, t_2}) = K_N \cap C_{t_1, t_2} \neq \emptyset, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Mivel csak megszámlálható sok indexen kell végigmennünk, teljes indukciót használva kapjuk, hogy létezik egy olyan $(x_{t_m}^*)_{m \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy a

$$C_{t_1, \dots, t_m} := \{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_i} = x_{t_i}^*, \quad i = 1, \dots, m\}$$

jelöléssel, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $x_{t_{m+1}}^*$ benne van a $(p_{\{t_{m+1}\}}(K_n \cap C_{t_1, \dots, t_m}))_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer metszetében, és

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap C_{t_1, \dots, t_m}) = \emptyset, \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^N (K_n \cap C_{t_1, \dots, t_m}) = K_N \cap C_{t_1, \dots, t_m} \neq \emptyset, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Legyen C az $(x_{t_n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ponthoz tartozó alábbi cylinderhalmaz:

$$C := \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} = (x_{t_n}^*)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Végiggondoljuk, hogy tetszőleges $x \in C$ esetén $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, ami ellentmondás, hiszen $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Adott $n_0 \in \mathbb{N}$ esetén K_{n_0} felírható

$$K_{n_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \dots, x_{s_{m_{n_0}}}) \in C^{(n_0)}\right\} \quad \text{alakban,}$$

ahol $s_1, \dots, s_{m_{n_0}} \in T$ a K_{n_0} páronként különböző tartópontjai (ahol $m_{n_0} \in \mathbb{N}$), $C^{(n_0)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_{n_0}})$ pedig egy tartóhalmaza. Az $(x_{t_n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat definíciója miatt és felhasználva azt is, hogy az $s_1, \dots, s_{m_{n_0}}$ tartópontok szerepelnek a konstrukció miatt a $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatban, kapjuk, hogy $(x_{s_1}^*, \dots, x_{s_{m_{n_0}}}^*) \in C^{(n_0)}$, vagy ezzel ekvivalens módon $x \in K_{n_0}$ tetszőleges $x \in C$ esetén. Így $C \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, mely ellentmondás, ugyanis C nemüres. Beláttuk tehát, hogy $\mathcal{K}$ egy σ -kompakt család.

Megmutatjuk most, hogy $\mathbb{P}$ belülről reguláris $\mathcal{K}$ -ra nézve a $\mathcal{C}$ halmazalgebrán. Mivel $\mathbb{R}^n$ teljes szeparábilis metrikus tér, a B.6. Tétel alapján az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mérhető téren bármely valószínűségi mérték kompakt reguláris. Felhasználva $\mathbb{P}$ definícióját, ez azt jelenti, hogy $\mathbb{P}$ belülről reguláris $\mathcal{K}$ -ra nézve $\mathcal{C}$ -n. Valóban, a B.3. Definíció jelöléseivel legyen $X := \mathbb{R}^T$, $\mathcal{A} := \mathcal{C}$, $\mu := \mathbb{P}$, és $\mathcal{K}$ a kompakt tartóhalmazokkal rendelkező $(\mathcal{C}$ -beli) cylinderhalmazok családja. Ha $A \in \mathcal{C}$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$ és $B_A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, hogy $A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B_A\}$, és így $\mathbb{P}(A) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_A)$. Ezért a B.6. Tétel alkalmazható az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{t_1, \dots, t_n})$ valószínűségi mező esetén:

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B_A) = \sup\{P_{t_1, \dots, t_n}(B) : B \subset B_A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ kompakt}\},$$

és így

$$\mathbb{P}(A) = \sup\{\mathbb{P}(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}.$$

A B.4. Tétel minden feltétele teljesül tehát, így $\mathbb{P}$ σ -additív $\mathcal{C}$ -n.

Felhasználva, hogy $\mathcal{C}$ halmazalgebra, $\mathbb{P}$ σ -additív $\mathcal{C}$ -n és azt, hogy $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték $\mathcal{C}$ -n, az 1.8. Tétel (Carathéodory-tétel) alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}$ egyértelműen kiterjeszthető $\sigma(\mathcal{C})$ -re. $\square$

13.13. Példa. A Kolmogorov konzisztenciátételben legyen $T := \mathbb{N}$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$ esetén legyen $P_{t_1, \dots, t_n}$ egy n -dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor eloszlása $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -en. Mivel

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B) = \int_B f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

ahol $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, a 13.10. Megjegyzés (ii) része alapján a $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ család konzisztens. Ezért a Kolmogorov konzisztenciátétel szerint $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathcal{C}))$ -n létezik olyan $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték, hogy minden $p_{\{j\}} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, koordinátaleképezésnek (projekciónak) a $\mathbb{P}$ -szerinti eloszlása 1-dimenziós standard normális eloszlás. Valóban, tetszőleges $j \in \mathbb{N}$ és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathbb{P}_{p_{\{j\}}}(B) = \mathbb{P}(p_{\{j\}} \in B) = \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_j \in B\}) = P_j(B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

A Kolmogorov konzisztenciátétel jelen esetben valójában egy független, azonos standard normális eloszlású véletlen változókból álló sorozat létezését állítja. $\square$

13.14. Példa. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, ahol $\Omega := [0, 1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0, 1])$ és $\mathbb{P} := \lambda|_{\mathcal{A}}$, ahol λ az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Megmutatjuk, hogy nem lehetséges olyan független, azonos eloszlású véletlen változókból álló $\{\xi_t : t \in [0, 1]\}$ sztochasztikus folyamatot megadni $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -n, hogy ξ_t -k közös eloszlása nemdegenerált legyen. Indirekt módon tegyük fel, hogy lehetséges. Ekkor, mivel $\mathbb{P}_{\xi_1}$ nemdegenerált, létezik olyan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, hogy $\mathbb{P}_{\xi_1}(A) = \mathbb{P}(\xi_1 \in A) = \mathbb{P}(\xi_t \in A) \in (0, 1)$, $t \in [0, 1]$. Továbbá, tetszőleges $s \neq t$, $s, t \in [0, 1]$, esetén, felhasználva, hogy ξ_s és ξ_t függetlenek és azonos eloszlásúak, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\mathbb{1}_A(\xi_s) - \mathbb{1}_A(\xi_t))^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\xi_s) - 2\mathbb{1}_A(\xi_s)\mathbb{1}_A(\xi_t) + \mathbb{1}_A(\xi_t)) \\ &= \mathbb{P}(\xi_s \in A) - 2\mathbb{P}(\xi_s \in A)\mathbb{P}(\xi_t \in A) + \mathbb{P}(\xi_t \in A) \\ &= 2\mathbb{P}(\xi_1 \in A) - \mathbb{P}(\xi_1 \in A)^2 = 2\mathbb{P}(\xi_1 \in A)(1 - \mathbb{P}(\xi_1 \in A)) := c_A \in (0, 1). \end{aligned}$$

Mivel $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert-tér, létezik benne egy φ_n , $n \in \mathbb{N}$, módon jelölt teljes ortonormált sorozat, és így tetszőleges $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ esetén teljesül az $\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle_{L_2}|^2$ Parseval-egyenlőség. Speciálisan, tetszőleges $s \neq t$, $s, t \in [0, 1]$, esetén

$$c_A = \mathbb{E}((\mathbb{1}_A(\xi_s) - \mathbb{1}_A(\xi_t))^2) = \|\mathbb{1}_A(\xi_s) - \mathbb{1}_A(\xi_t)\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbb{1}_A(\xi_s) - \mathbb{1}_A(\xi_t), \varphi_n \rangle_{L_2}|^2.$$

Itt tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, mivel ξ_s és ξ_t azonos eloszlásúak,

$$\langle \mathbb{1}_A(\xi_s) - \mathbb{1}_A(\xi_t), \varphi_n \rangle_{L_2} = \langle \mathbb{1}_A(\xi_s), \varphi_n \rangle_{L_2} - \langle \mathbb{1}_A(\xi_t), \varphi_n \rangle_{L_2} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\xi_s) \overline{\varphi_n}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\xi_t) \overline{\varphi_n}) = 0,$$

mely ellentmondás, ugyanis $c_A \in (0, \infty)$. $\square$

13.15. Tétel. (Kolmogorov egzisztenciátétele) Legyen $T \subset [0, \infty)$ egy nemüres halmaz. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_1 < \dots < t_k$ esetén legyen $F_{t_1, t_2, \dots, t_k} : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ egy k -dimenziós eloszlásfüggvény. Tegyük fel, hogy az

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_k \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_k\}$$

család kompatibilis, azaz tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $\ell \in \{1, \dots, k\}$, és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq k$ egészek esetén

$$\lim_{x_j \rightarrow \infty, j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}} F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_\ell}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}), \quad \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és rajta olyan $\{\xi_t : t \in T\}$ valós értékű sztochasztikus folyamat, melyre tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_1 < \dots < t_k$ esetén $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}$ eloszlásfüggvénye $F_{t_1, \dots, t_k}$ (melyből következik, hogy $\{\xi_t : t \in T\}$ végesdimenziós eloszlásai éppen az adott eloszlásfüggvényekkel vannak megadva).

Bizonyítás. Kolmogorov konzisztenciátételét (a 13.12. Tételt) fogjuk alkalmazni. Minden $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_1 < \dots < t_k$ esetén legyen $P_{t_1, \dots, t_k}$ az $F_{t_1, \dots, t_k}$ eloszlásfüggvényhez tartozó Lebesgue-Stieltjes mérték $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ -n, azaz $P_{t_1, \dots, t_k}$ az az egyértelműen meghatározott valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ mérhető téren, melyre

$$\begin{aligned} & P_{t_1, \dots, t_k} \left(\left\{ (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k : y_1 < x_1, \dots, y_k < x_k \right\} \right) \\ &= P_{t_1, \dots, t_k} \left((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \dots \times (-\infty, x_k) \right) = F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) \end{aligned} \quad (13.1)$$

teljesül minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$ és $t_i \neq t_j$, ha $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, akkor $P_{t_1, \dots, t_k}$ legyen az $F_{t_1^*, \dots, t_k^*}$ eloszlásfüggvényhez tartozó Lebesgue-Stieltjes mérték $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ -n, ahol $t_1^* < \dots < t_k^*$ a $t_1, \dots, t_k$ számok nagyság szerint növekvő sorrendje. Felhasználva, hogy az

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T, t_1 < \dots < t_k\}$$

család kompatibilis, kapjuk, hogy a

$$\{P_{t_1, t_2, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T, t_i \neq t_j, i, j = 1, \dots, k\}$$

valószínűségi mértékekből álló család konzisztens a 13.9. Definíció értelmében. Például a 13.9. Definícióbeli (a) feltétel, a permutáció invariancia $n = 2$ esetén az alábbi módon igazolható: minden $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in T$ esetén a definíció értelmében

$$P_{t_2, t_1}((-\infty, x_2) \times (-\infty, x_1)) = F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P_{t_1, t_2}((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2)), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

A 13.9. Definícióbeli (b) feltétel, az ottani kompatibilitási feltétel $n=2$ esetén az alábbi módon igazolható: minden $t_1 < t_2 < t_3$, $t_1, t_2, t_3 \in T$, és $A := (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, esetén

$$\begin{aligned} P_{t_1, t_2, t_3}(A \times \mathbb{R}) &= \lim_{x_3 \rightarrow \infty} P_{t_1, t_2, t_3}((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times (-\infty, x_3)) = \lim_{x_3 \rightarrow \infty} F_{t_1, t_2, t_3}(x_1, x_2, x_3) \\ &= F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P_{t_1, t_2}((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2)) = P_{t_1, t_2}(A). \end{aligned}$$

Így a 13.12. Tétel alapján egyértelműen létezik olyan $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhető téren, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_i \neq t_j$, $i, j = 1, \dots, k$, esetén

$$P_{t_1, \dots, t_k}(A) = \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \in A\}), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k). \quad (13.2)$$

Így az $\Omega := \mathbb{R}^T$ és $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{C})$ választásokkal $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Minden $t \in T$ esetén legyen $\xi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\xi_t(\omega) := \omega_t, \quad \omega \in \Omega.$$

(Itt $\omega \in \Omega$ nem más, mint egy T -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvény, és a korábbiakhoz hasonlóan tetszőleges $t \in T$ esetén ω_t az ω értékét jelöli t -ben.) Ekkor ξ_t valószínűségi változó, hiszen tetszőleges $v \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) < v\} = \{\omega \in \Omega : \omega_t < v\} = \{x \in \mathbb{R}^T : x_t < v\} = \{x \in \mathbb{R}^T : x_t \in (-\infty, v)\},$$

ami pedig egy cylinderhalmaz, így benne van $\sigma(\mathcal{C})$ -ben (a cylinderhalmazok által generált σ -algebrában). Ezért $(\xi_t)_{t \in T}$ egy sztochasztikus folyamat. Végezetül, tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_1 < \dots < t_k$, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}$ esetén, a (13.1) és (13.2) összefüggések alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{t_1} < v_1, \dots, \xi_{t_k} < v_k) &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} < v_1, \dots, x_{t_k} < v_k\}) \\ &= \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \in (-\infty, v_1) \times \dots \times (-\infty, v_k)\}) \\ &= P_{t_1, \dots, t_k}((-\infty, v_1) \times \dots \times (-\infty, v_k)) \\ &= F_{t_1, \dots, t_k}(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

13.16. Állítás. Legyen $\{F_t : t \geq 0\}$ eloszlásfüggvényeknek egy egyparaméteres konvolúciós félcsoportja. Ekkor létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és rajta olyan $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat, hogy $F_{\xi_t} = F_t$ tetszőleges $t \geq 0$ esetén. (Ekkor a 12.14. Állítás alapján $\{\xi_t : t \geq 0\}$ végesdimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározza az $\{F_t : t \geq 0\}$ család.)

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített. Legyen $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ esetén $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ egy olyan valószínűségi vektorváltozó, melynek koordinátái függetlenek és rendre $F_{t_1}, F_{t_2-t_1}, \dots, F_{t_k-t_{k-1}}$ eloszlásúak. Megjegyezzük, hogy létezik olyan valószínűségi mező, melyen $\eta_1, \dots, \eta_k$ a feltételeknek megfelelően definiálhatóak. Jelölje $F_{t_1, t_2, \dots, t_k}$ az

$$(\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k)$$

véletlen vektor eloszlásfüggvényét. Belátjuk, hogy az

$$\left\{ F_{t_1, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \dots < t_k \right\}$$

családra teljesül a 13.15. Tételbeli kompatibilitási feltétel. Azt kell megmutatni, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \{1, \dots, k\}$, és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq k$ egészek, akkor az $(\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k)$ véletlen vektor $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ sorszámú koordinátáinak együttes eloszlása megegyezik egy olyan

$$(\tilde{\eta}_{i_1}, \tilde{\eta}_{i_1} + \tilde{\eta}_{i_2}, \dots, \tilde{\eta}_{i_1} + \tilde{\eta}_{i_2} + \dots + \tilde{\eta}_{i_\ell})$$

véletlen vektor eloszlásával, ahol $(\tilde{\eta}_{i_1}, \tilde{\eta}_{i_2}, \dots, \tilde{\eta}_{i_\ell})$ egy olyan véletlen vektor, melynek koordinátái függetlenek és rendre $F_{t_{i_1}}, F_{t_{i_2}-t_{i_1}}, \dots, F_{t_{i_\ell}-t_{i_{\ell-1}}}$ eloszlásúak. (Hasonlóan az előzőekhez olyan valószínűségi mező is létezik, melyen $\tilde{\eta}_{i_1}, \tilde{\eta}_{i_2}, \dots, \tilde{\eta}_{i_\ell}$ a feltételeknek megfelelően definiálhatóak. Ez nem feltétlenül ugyanaz, mint az előző valószínűségi mező, de ez nem baj, mert minket úgy is csak az eloszlása érdekel a szóban forgó valószínűségi változóknak.) Ekkor a feltételek alapján

$$\eta_{i_j+1} + \eta_{i_j+2} + \dots + \eta_{i_{j+1}}, \quad j = 0, \dots, \ell-1,$$

eloszlásfüggvénye

$$F_{t_{i_j+1}-t_{i_j}} * F_{t_{i_j+2}-t_{i_j+1}} * \dots * F_{t_{i_{j+1}}-t_{i_{j+1}-1}} = F_{t_{i_{j+1}}-t_{i_j}}, \quad j = 0, \dots, \ell-1,$$

mely éppen $\tilde{\eta}_{i_{j+1}}$ eloszlásfüggvénye (ahol az $i_0 := 0$ és $t_0 := 0$ jelölésekkel élünk). Ezt felhasználva a kompatibilitás könnyen következik, ugyanis $j = 0$ -ra kapjuk, hogy $\eta_{i_0+1} + \dots + \eta_{i_0+1} = \eta_1 + \dots + \eta_{i_1}$ eloszlásfüggvénye $F_{t_{i_1}}$, és így az eloszlása megegyezik $\tilde{\eta}_{i_1}$ eloszlásával. A $j = 1$ választással kapjuk, hogy $\eta_{i_1+1} + \dots + \eta_{i_2}$ eloszlásfüggvénye $F_{t_{i_2}} - F_{t_{i_1}}$, és így eloszlása megegyezik $\tilde{\eta}_{i_2}$ eloszlásával. Felhasználva azt, hogy $\eta_1, \dots, \eta_{i_2}$ függetlenek és azt, hogy $\tilde{\eta}_{i_1}$ és $\tilde{\eta}_{i_2}$ is függetlenek kapjuk, hogy

$$(\eta_1 + \dots + \eta_{i_1}, \eta_1 + \dots + \eta_{i_1} + \eta_{i_1+1} + \dots + \eta_{i_2}) = (\eta_1 + \dots + \eta_{i_1}, \eta_1 + \dots + \eta_{i_2})$$

eloszlása megegyezik $(\tilde{\eta}_{i_1}, \tilde{\eta}_{i_1} + \tilde{\eta}_{i_2})$ eloszlásával. A $j = 2, \dots, \ell-1$ választással hasonló gondolatmenetet használva adódik a kompatibilitási feltétel.

A Kolmogorov egzisztenciátétel (13.15. Tétel) alapján létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és ezen olyan $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat, hogy $F_{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}} = F_{t_1, \dots, t_k}$ minden $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $0 \leq t_1 < \dots < t_k$ esetén. Speciálisan, $F_{\xi_t} = F_t$, $t \geq 0$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített, ekkor a konstrukció alapján $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ esetén $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$ eloszlása megegyezik az $(\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ezért $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ eloszlása megegyezik $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ eloszlásával. Valóban, (12.2)

alapján

$$\begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} - \xi_{t_1} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix}, \quad (13.3)$$

és mivel $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$ eloszlása megegyezik az $(\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k)$ véletlen vektor eloszlásával, (13.3) jobboldalának eloszlása megegyezik az alábbi véletlen vektor eloszlásával:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 + \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \end{pmatrix}.$$

Ezért $\{\xi_t: t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű, hiszen $\eta_1, \dots, \eta_k$ függetlenek és tetszőleges $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén η_i eloszlásfüggvénye $F_{t_i - t_{i-1}}$, mely a konstrukció miatt megegyezik $\xi_{t_i - t_{i-1}}$ eloszlásfüggvényével, ill. a fentiek miatt $\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}$ eloszlásfüggvényével is. $\square$

14. Poisson-folyamat (homogén, inhomogén, összetett)

14.1. Definíció. Legyen $\lambda > 0$ és legyenek η_n , $n \in \mathbb{N}$, független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $T_k := \eta_1 + \dots + \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$, és $T_0 := 0$. Legyen

$$\xi_t := \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : T_k \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

A $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot **λ paraméterű Poisson-folyamatnak** nevezzük.

14.2. Megjegyzés. Nyilván, $\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 1$, hiszen $T_0 = 0$ és $k \geq 1$ esetén $\mathbb{P}(T_k = 0) = 0$, ugyanis $k \geq 1$ esetén T_k abszolút folytonos eloszlású. $\square$

A következőkben olyan eredményeket tárgyalunk, melyek a Poisson-folyamat alternatív definícióira adnak lehetőséget (szám szerint további három alternatív definícióra, lásd 14.3. Tétel, 14.6. Tétel és 14.8. Tétel).

14.3. Tétel. Legyen $\lambda > 0$. Egy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor λ paraméterű Poisson-folyamat, ha

- (i) független, stacionárius növekményű,
- (ii) tetszőleges $0 \leq s < t$ időpontok esetén $\xi_t - \xi_s \sim \text{Poiss}(\lambda(t-s))$ (azaz $\xi_t - \xi_s$ Poisson eloszlású $\lambda(t-s)$ paraméterrel),
- (iii) a $[0, \infty) \ni t \mapsto \xi_t$ trajektóriák jobbról folytonosak.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy λ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, függetlensége miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_t = k) &= \mathbb{P}(\eta_1 + \dots + \eta_k \leq t < \eta_1 + \dots + \eta_k + \eta_{k+1}) \\ &= \int \dots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_k \leq t < x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} \\ x_1, \dots, x_{k+1} \geq 0}} \lambda^{k+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_k + x_{k+1})} dx_1 \dots dx_k dx_{k+1}. \end{aligned}$$

Kiintegrálva az x_{k+1} változó szerint (az integrálási tartományon $t - x_1 - \dots - x_k \geq 0$):

$$\int_{t-x_1-\dots-x_k}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_{k+1}} dx_{k+1} = e^{-\lambda(t-x_1-\dots-x_k)},$$

így

$$\mathbb{P}(\xi_t = k) = \int \dots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_k \leq t \\ x_1, \dots, x_k \geq 0}} \lambda^k e^{-\lambda t} dx_1 \dots dx_k. \quad (14.1)$$

Ha bevezetjük az $y_j := x_1 + \dots + x_j$, $j = 1, \dots, k$, új változókat, akkor a transzformáció Jacobi-determinánsa 1. Valóban,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

és így

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

mely alapján a transzformáció Jacobi-determinánsa:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Így

$$\int_{\substack{x_1 + \dots + x_k \leq t \\ x_1, \dots, x_k \geq 0}} 1 \, dx_1 \dots dx_k = \int_{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq t} 1 \, dy_1 \dots dy_k.$$

Végig gondoljuk, hogy az $1, 2, \dots, k$ számok tetszőleges $i_1, i_2, \dots, i_k$ permutációja esetén

$$\int_{0 \leq y_{i_1} \leq y_{i_2} \leq \dots \leq y_{i_k} \leq t} 1 \, dy_1 \dots dy_k = \int_{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq t} 1 \, dy_1 \dots dy_k. \quad (14.2)$$

Vezessük be az

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

helyettesítést, ahol A az a $k \times k$ -típusú mátrix, melynek ℓ -edik sorában az i_ℓ -edik elem 1, a többi pedig 0 ($\ell = 1, \dots, k$). Mivel $i_1, \dots, i_k$ egy permutációja az $1, \dots, k$ számoknak, kapjuk, hogy A determinánsa $(-1)^{I(i_1, \dots, i_k)}$, ahol $I(i_1, \dots, i_k)$ az $i_1, \dots, i_k$ permutáció

összes inverzióinak a számát jelöli. Így a transzformáció Jacobi-determinánsának abszolútértéke 1 és az integrálási tartomány is megfelelően alakul. Tekintve az $1, \dots, k$ számok összes $i_1, \dots, i_k$ permutációját, az ezekre vonatkozó, (14.2)-típusú integráloknak az összege éppen a t élhosszúságú k -dimenziós kocka térfogata, s mivel minden ilyen integrál egymással egyenlő adódik, hogy

$$\int \cdots \int_{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq t} 1 \, dy_1 \dots dy_k = \frac{t^k}{k!}.$$

Tehát végülis (14.1) alapján

$$\mathbb{P}(\xi_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

azaz $\xi_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$.

Tetszőleges $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, és $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ esetén, $\eta_1, \eta_2, \dots$ függetlensége alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{t_1} = k_1, \xi_{t_2} = k_2, \dots, \xi_{t_n} = k_n) &= \mathbb{P}(T_{k_i} \leq t_i < T_{k_i+1}, i = 1, \dots, n) \\ &= \mathbb{P}(\eta_1 + \dots + \eta_{k_i} \leq t_i < \eta_1 + \dots + \eta_{k_i+1}, i = 1, \dots, n) \\ &= \int \cdots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_{k_i} \leq t_i < x_1 + \dots + x_{k_i+1}, i=1, \dots, n \\ x_1, \dots, x_{k_n+1} \geq 0}} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{k_n+1})} dx_1 \dots dx_{k_n+1}. \end{aligned}$$

Kiintegrálva az x_{k_n+1} változó szerint (az integrálási tartományon $t_n - x_1 - \dots - x_{k_n} \geq 0$):

$$\int_{t_n - x_1 - \dots - x_{k_n}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1} = e^{-\lambda(t_n - x_1 - \dots - x_{k_n})},$$

és így

$$\mathbb{P}(\xi_{t_1} = k_1, \xi_{t_2} = k_2, \dots, \xi_{t_n} = k_n) = \int \cdots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_{k_i} \leq t_i < x_1 + \dots + x_{k_i+1}, i=1, \dots, n-1 \\ x_1 + \dots + x_{k_n} \leq t_n, x_1, \dots, x_{k_n} \geq 0}} \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} dx_1 \dots dx_{k_n}.$$

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{t_1} = k_1, \xi_{t_2} = k_2, \dots, \xi_{t_n} = k_n) \\ = \frac{t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1} \cdots (t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}}}{k_1! (k_2 - k_1)! \cdots (k_n - k_{n-1})!} \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

A levezetést csak az $n=2$ esetben írjuk le. Vezessük be ekkor az $y_i = x_1 + \dots + x_i$, $i = 1, \dots, k_2$ helyettesítést. Hasonlóan az előzőekhez a transzformáció Jacobi-determinánsa 1, így

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_{k_1} \leq t_1 < x_1 + \dots + x_{k_1+1} \\ x_1 + \dots + x_{k_2} \leq t_2, x_1, \dots, x_{k_2} \geq 0}} 1 \, dx_1 \dots dx_{k_2} &= \int \cdots \int_{\substack{0 \leq y_{k_1} \leq t_1 < y_{k_1+1} \\ y_{k_2} \leq t_2, 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{k_2}}} 1 \, dy_1 \dots dy_{k_2} \\ &= \int \cdots \int_{\substack{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{k_1} \leq t_1 \\ t_1 < y_{k_1+1} \leq y_{k_1+2} \leq \dots \leq y_{k_2} \leq t_2}} 1 \, dy_1 \dots dy_{k_2}. \end{aligned}$$

A (14.2) levezetésének gondolatmenetéhez hasonlóan, külön végrehajtva permutációkat az első k_1 darab változóra, majd a maradék $k_2 - k_1$ darab változóra adódik, hogy

$$\int \cdots \int_{\substack{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{k_1} \leq t_1 \\ t_1 < y_{k_1+1} \leq y_{k_1+2} \leq \cdots \leq y_{k_2} \leq t_2}} 1 \, dy_1 \cdots dy_{k_2} = \frac{t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1}}{k_1! (k_2 - k_1)!}.$$

Ezért (14.3) alapján tetszőleges $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ és $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi_{t_1} = \ell_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = \ell_n) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} = \ell_1, \xi_{t_2} = \ell_1 + \ell_2, \dots, \xi_{t_n} = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n) \\ &= \frac{t_1^{\ell_1} (t_2 - t_1)^{\ell_2} \cdots (t_n - t_{n-1})^{\ell_n}}{\ell_1! \ell_2! \cdots \ell_n!} \lambda^{\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n} e^{-\lambda t_n}. \end{aligned}$$

Speciálisan tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén $\xi_t - \xi_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$, hiszen a

$$\mathbb{P}(\xi_{t_1} = \ell_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2) = \frac{t_1^{\ell_1} (t_2 - t_1)^{\ell_2}}{\ell_1! \ell_2!} \lambda^{\ell_1 + \ell_2} e^{-\lambda t_2}$$

egyenlőség mindkét oldalát szummázva ℓ_1 szerint 1-től ∞ -ig kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2) = \frac{(t_2 - t_1)^{\ell_2}}{\ell_2!} \lambda^{\ell_2} e^{-\lambda t_2} \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_1)^{\ell_1}}{\ell_1!} = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{\ell_2}}{\ell_2!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi_{t_1} = \ell_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = \ell_n) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} = \ell_1) \mathbb{P}(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2) \cdots \mathbb{P}(\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = \ell_n). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a folyamat valóban független, stacionárius növekményű.

A trajektóriák jobbról folytonossága rajz alapján könnyen látható.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ olyan sztochasztikus folyamat, mely rendelkezik a tételben szereplő (i), (ii) és (iii) tulajdonságokkal. Ekkor a trajektóriák nemnegatív egész értékű függvények, hiszen $s = 0$ -val (ii)-ből látjuk, hogy $\xi_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Másrészt a trajektóriák monoton növekvő függvények, mert (ii) alapján a növekmények is Poisson eloszlásúak. Legyen

$$T_k := \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq k\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

és $\eta_k := T_k - T_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Ekkor (i) alapján $\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 1$, így $\mathbb{P}(T_0 = 0) = 1$, és a trajektóriák monoton növekvősége miatt $\eta_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $t \geq 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : T_k(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \geq k\}. \quad (14.4)$$

Egyrészt, T_k definíciója alapján adódik, hogy

$$\{\omega \in \Omega : T_k(\omega) \leq t\} \supseteq \{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \geq k\}.$$

Másrészt, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $T_k(\omega) < t$, akkor mivel $T_k(\omega) = \inf\{s \geq 0 : \xi_s(\omega) \geq k\}$ adódik, hogy létezik olyan $t_1 \geq 0$, hogy $T_k(\omega) \leq t_1 < t$ és $\xi_{t_1}(\omega) \geq k$. Mivel a trajektóriák monoton növekvő függvények $\xi_t(\omega) \geq \xi_{t_1}(\omega)$, így $\xi_t(\omega) \geq k$. Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $T_k(\omega) = t$, akkor létezik olyan $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy $t_n \downarrow t$, úgy, hogy $\xi_{t_n}(\omega) \geq k$, $n \in \mathbb{N}$. Mivel a trajektóriák jobbról folytonosak $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{t_n}(\omega) = \xi_t(\omega)$, és így $\xi_t(\omega) \geq k$. Ellenőriztük tehát (14.4)-t.

Mivel ξ_t egész értékű, így az is teljesül, hogy

$$\xi_t(\omega) = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : T_k(\omega) \leq t\},$$

ugyanis (14.4) alapján

$$\max\{k \in \mathbb{Z}_+ : T_k(\omega) \leq t\} = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : \xi_t(\omega) \geq k\} = \xi_t(\omega).$$

Azt kell még belátni, hogy $\eta_1, \eta_2, \dots$ független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ sűrűségfüggvénye

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_k}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \begin{cases} \lambda^k e^{-\lambda u_k} & \text{ha } 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (14.5)$$

Tetszőleges $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ esetén, (14.4) alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_k \leq t_k) &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} \geq 1, \xi_{t_2} \geq 2, \dots, \xi_{t_k} \geq k) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \\ i_\ell \geq \ell, \ell=1, \dots, k}} \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} = i_2, \dots, \xi_{t_k} = i_k), \end{aligned} \quad (14.6)$$

és az (i),(ii) tulajdonságok alapján

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} = i_2, \dots, \xi_{t_k} = i_k) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = i_2 - i_1, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} = i_k - i_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1) \mathbb{P}(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = i_2 - i_1) \dots \mathbb{P}(\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} = i_k - i_{k-1}) \\ &= \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \dots (t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \dots (i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} e^{-\lambda t_k}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

A következőkben belátjuk, hogy

$$\sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \\ i_\ell \geq \ell, \ell=1, \dots, k}} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \dots (t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \dots (i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} e^{-\lambda t_k} = \int \dots \int_{\substack{0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k \\ u_1 \leq t_1, \dots, u_k \leq t_k}} \lambda^k e^{-\lambda u_k} du_1 \dots du_k. \quad (14.8)$$

Ha $k = 1$, úgy (14.8) baloldala:

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\lambda t_1} = e^{-\lambda t_1} (e^{\lambda t_1} - 1) = 1 - e^{-\lambda t_1},$$

illetve (14.8) jobboldala:

$$\int_0^{t_1} \lambda e^{-\lambda u_1} du_1 = [-e^{-\lambda u_1}]_0^{t_1} = 1 - e^{-\lambda t_1}.$$

Ha $k = 2$, úgy (14.8) baloldala:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \\ i_1 \geq 1, i_2 \geq 2}} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1}}{i_1! (i_2 - i_1)!} \lambda^{i_2} e^{-\lambda t_2} \\ &= \sum_{i_2=2}^{\infty} \frac{t_1 (t_2 - t_1)^{i_2 - 1}}{(i_2 - 1)!} \lambda^{i_2} e^{-\lambda t_2} + \sum_{i_1=2}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1}}{i_1! (i_2 - i_1)!} \lambda^{i_2} e^{-\lambda t_2} \\ &= \sum_{i_2=1}^{\infty} \frac{t_1 (t_2 - t_1)^{i_2}}{i_2!} \lambda^{i_2+1} e^{-\lambda t_2} + \sum_{i_1=2}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2}}{i_1! i_2!} \lambda^{i_2+i_1} e^{-\lambda t_2} \\ &= t_1 \lambda e^{-\lambda t_2} (e^{\lambda(t_2-t_1)} - 1) + \sum_{i_1=2}^{\infty} \frac{(t_1 \lambda)^{i_1}}{i_1!} e^{-\lambda t_2} e^{\lambda(t_2-t_1)} \\ &= t_1 \lambda (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}) + \sum_{i_1=2}^{\infty} \frac{(t_1 \lambda)^{i_1}}{i_1!} e^{-\lambda t_1} \\ &= t_1 \lambda (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}) + e^{-\lambda t_1} (e^{\lambda t_1} - 1 - \lambda t_1) = 1 - e^{-\lambda t_1} - \lambda t_1 e^{-\lambda t_2}. \end{aligned}$$

Illetve $k = 2$ esetén (14.8) jobboldala:

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{0 < u_1 < u_2 \\ u_1 \leq t_1, u_2 \leq t_2}} \lambda^2 e^{-\lambda u_2} du_1 du_2 = \int_0^{t_1} \int_{u_1}^{t_2} \lambda^2 e^{-\lambda u_2} du_1 du_2 = \int_0^{t_1} [-\lambda e^{-\lambda u_2}]_{u_2=u_1}^{u_2=t_2} du_1 \\ &= \int_0^{t_1} \lambda (e^{-\lambda u_1} - e^{-\lambda t_2}) du_1 = [-e^{-\lambda u_1} - \lambda u_1 e^{-\lambda t_2}]_{u_1=0}^{u_1=t_1} \\ &= 1 - e^{-\lambda t_1} - \lambda t_1 e^{-\lambda t_2}. \end{aligned}$$

A $k \geq 3$ esetben az alábbi módon ellenőrizhető le (14.8). A következő gondolatmenet Iglói Endrétől származik. Jelöljük az (14.8)-beli baloldali összeget S_k -val, a jobboldali integrált pedig I_k -val. Ekkor S_k és I_k is $t_1, \dots, t_k$ -től függ. Továbbá

$$\begin{aligned} I_k &= \lambda^k \int_0^{t_1} \int_{u_1}^{t_2} \dots \int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} \int_{u_{k-1}}^{t_k} e^{-\lambda u_k} du_k du_{k-1} \dots du_2 du_1 \\ &= \lambda^{k-1} \int_0^{t_1} \int_{u_1}^{t_2} \dots \int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} e^{-\lambda u_{k-1}} du_{k-1} \dots du_2 du_1 \\ &\quad - e^{-\lambda t_k} \lambda^{k-1} \int_0^{t_1} \int_{u_1}^{t_2} \dots \int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} 1 du_{k-1} \dots du_2 du_1. \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$J_{k-1} := \int_0^{t_1} \int_{u_1}^{t_2} \cdots \int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} 1 \, du_{k-1} \dots du_2 du_1, \quad k = 2, 3, \dots,$$

jelölést kapjuk, hogy

$$I_k = I_{k-1} - e^{-\lambda t_k} \lambda^{k-1} J_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (14.9)$$

Írjuk fel S_k -t is olyan alakban, mint az I_k -t, azaz úgy, hogy az i_k (azaz a t_k -t tartalmazó tényező) szerinti összegzés legyen a legbelső. Bevezetve a $\max(a, b) := m(a, b)$ jelölést,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{\infty} \sum_{i_k=m(i_{k-1},k)}^{\infty} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_{k-1} - t_{k-2})^{i_{k-1} - i_{k-2}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (i_{k-1} - i_{k-2})!} \\ &\quad \times \frac{(t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{(i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} e^{-\lambda t_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{\infty} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_{k-1} - t_{k-2})^{i_{k-1} - i_{k-2}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (i_{k-1} - i_{k-2})!} \\ &\quad \sum_{i_k=m(i_{k-1},k)}^{\infty} \frac{(t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{(i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} e^{-\lambda t_k}. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$A := \sum_{i_k=m(i_{k-1},k)}^{\infty} \frac{(t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{(i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} \quad \text{jelölést,}$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i_k - i_{k-1} = m(0, k - i_{k-1})}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{i_k - i_{k-1}}}{(i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_{k-1}} = \sum_{j=m(0, k - i_{k-1})}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^j}{j!} \lambda^{i_{k-1}} \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^j}{j!} \lambda^{i_{k-1}} & \text{ha } i_{k-1} = k - 1, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^j}{j!} \lambda^{i_{k-1}} & \text{ha } i_{k-1} \geq k, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} - 1) \lambda^{i_{k-1}} & \text{ha } i_{k-1} = k - 1, \\ e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} \lambda^{i_{k-1}} & \text{ha } i_{k-1} \geq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{\infty} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_{k-1} - t_{k-2})^{i_{k-1} - i_{k-2}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (i_{k-1} - i_{k-2})!} \\ &\quad \times \left(e^{-\lambda t_{k-1}} \lambda^{i_{k-1}} \mathbb{1}_{\{i_{k-1} \geq k\}} + (e^{-\lambda t_{k-1}} - e^{-\lambda t_k}) \lambda^{i_{k-1}} \mathbb{1}_{\{i_{k-1} = k-1\}} \right). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t_{k-1}} \lambda^{i_{k-1}} \mathbb{1}_{\{i_{k-1} \geq k\}} + (e^{-\lambda t_{k-1}} - e^{-\lambda t_k}) \lambda^{i_{k-1}} \mathbb{1}_{\{i_{k-1} = k-1\}} \\ = e^{-\lambda t_{k-1}} \lambda^{i_{k-1}} \mathbb{1}_{\{i_{k-1} \geq k-1\}} - e^{-\lambda t_k} \lambda^{i_{k-1}} \mathbb{1}_{\{i_{k-1} = k-1\}}, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$S_k = S_{k-1} - e^{-\lambda t_k} \lambda^{k-1} \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{k-1} \cdots \sum_{i_{k-2}=m(i_{k-3},k-2)}^{k-1} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_{k-1} - t_{k-2})^{k-1-i_{k-2}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (k-1-i_{k-2})!}.$$

Bevezetve minden $k = 2, 3, \dots$, esetén a

$$Q_{k-1} = \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{k-1} \cdots \sum_{i_{k-2}=m(i_{k-3},k-2)}^{k-1} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_{k-1} - t_{k-2})^{i_{k-1} - i_{k-2}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (i_{k-1} - i_{k-2})!},$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$S_k = S_{k-1} - e^{-\lambda t_k} \lambda^{k-1} Q_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (14.10)$$

Ha megmutatjuk, hogy $J_k = Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, úgy (14.9) és (14.10) alapján teljes indukcióval befejezhető a bizonyítás. Az alábbiakban $J_k = Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, igazolásával foglalkozunk. Ismert, hogy ha $X_1, \dots, X_n$ független, a $[0, t]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, úgy az $X_1^*, \dots, X_n^*$ rendezett mintára vonatkozóan, tetszőleges $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$ esetén

$$\mathbb{P}(X_1^* < t_1, X_2^* < t_2, \dots, X_n^* < t_n) = \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{t_2} \cdots \int_{x_{n-1}}^{t_n} 1 \, dx_1 \dots dx_n.$$

(Ez utóbbi tényt az 14.17. Tétel bizonyításában mi is megmutatjuk, lásd (14.18).) Így, ha $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$, úgy $0 \leq \frac{t_1}{t_k} < \frac{t_2}{t_k} < \dots < \frac{t_{k-1}}{t_k} < 1$, és

$$J_k = \frac{t_k^k}{k!} \mathbb{P}(X_1^* < t_1, \dots, X_k^* < t_k),$$

ahol $X_1, \dots, X_k$ független, a $[0, t_k]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mivel $\frac{X_1}{t_k}, \dots, \frac{X_k}{t_k}$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$J_k = \frac{t_k^k}{k!} \mathbb{P}\left(U_1^* < \frac{t_1}{t_k}, \dots, U_{k-1}^* < \frac{t_{k-1}}{t_k}, U_k^* < 1\right) = \frac{t_k^k}{k!} \mathbb{P}\left(U_1^* < \frac{t_1}{t_k}, \dots, U_{k-1}^* < \frac{t_{k-1}}{t_k}\right),$$

ahol $U_1, \dots, U_{k-1}, U_k$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Továbbá megmutatjuk, hogy az $U_1, \dots, U_k$ mintát alapul véve

$$Q_k = \frac{t_k^k}{k!} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \left\{ \left[0, \frac{t_i}{t_k}\right)\text{-ba legalább } i \text{ mintaelem esik} \right\}\right).$$

Felhasználva, hogy

$$\left[0, \frac{t_1}{t_k}\right) \subseteq \left[0, \frac{t_2}{t_k}\right) \subseteq \dots \subseteq \left[0, \frac{t_{k-1}}{t_k}\right),$$

kapjuk, hogy (gondoljunk a polinomiális eloszlásra)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \left\{ \left[0, \frac{t_i}{t_k}\right) \text{-ba legalább } i \text{ mintaelem esik} \right\} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=m(i_1,2)}^k \dots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^k \frac{k!}{i_1! (i_2 - i_1)! \dots (i_{k-1} - i_{k-2})! (k - i_{k-1})!} \\ & \quad \times \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^{i_1} \left(\frac{t_2}{t_k} - \frac{t_1}{t_k}\right)^{i_2 - i_1} \dots \left(\frac{t_{k-1}}{t_k} - \frac{t_{k-2}}{t_k}\right)^{i_{k-1} - i_{k-2}} \left(1 - \frac{t_{k-1}}{t_k}\right)^{k - i_{k-1}} \\ &= \frac{k!}{t_k^k} \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=m(i_1,2)}^k \dots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^k \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \dots (t_{k-1} - t_{k-2})^{i_{k-1} - i_{k-2}} (t_k - t_{k-1})^{k - i_{k-1}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \dots (i_{k-1} - i_{k-2})!} \\ &= \frac{k!}{t_k^k} Q_k. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az

$$\mathbb{P} \left(U_1^* < \frac{t_1}{t_k}, \dots, U_{k-1}^* < \frac{t_{k-1}}{t_k} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \left\{ \left[0, \frac{t_i}{t_k}\right) \text{-ba legalább } i \text{ mintaelem esik} \right\} \right)$$

egyenlőség triviális módon igaz, kapjuk, hogy $J_k = Q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Tehát $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ sűrűségfüggvénye valóban a megadott alakú.

Megjegyezzük (bár nem fogjuk felhasználni), fennáll az is, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = i_2 - i_1, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} = i_k - i_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(T_{i_j} \leq t_j < T_{i_j+1}, j = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Ugyanis, például $k = 2$ -re, (14.4) alapján és felhasználva azt, hogy ξ_t egész értékű

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{i_1} \leq t_1 < T_{i_1+1}, T_{i_2} \leq t_2 < T_{i_2+1}) &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} \geq i_1, \xi_{t_1} < i_1 + 1, \xi_{t_2} \geq i_2, \xi_{t_2} < i_2 + 1) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} = i_2) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = i_2 - i_1). \end{aligned}$$

Visszatérve annak indoklásához, hogy $\eta_1, \eta_2, \dots$ független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, (14.5) alapján tetszőleges $x_1, \dots, x_k \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2, \dots, \eta_k < x_k) &= \mathbb{P}(T_1 < x_1, T_2 - T_1 < x_2, \dots, T_k - T_{k-1} < x_k) \\ &= \int \dots \int_{\substack{0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k \\ y_1 < x_1, y_2 - y_1 < x_2, \dots, y_k - y_{k-1} < x_k}} \lambda^k e^{-\lambda y_k} dy_1 dy_2 \dots dy_k. \end{aligned}$$

Végrehajtva az $y_i = u_1 + \dots + u_i$, $i = 1, \dots, k$ helyettesítést kapjuk, hogy tetszőleges $x_1, \dots, x_k \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2, \dots, \eta_k < x_k) &= \int \dots \int_{0 < u_j < x_j, j=1, \dots, k} \lambda^k e^{-\lambda(u_1 + u_2 + \dots + u_k)} du_1 du_2 \dots du_k \\ &= \prod_{j=1}^k \int_0^{x_j} \lambda e^{-\lambda u_j} du_j = \prod_{j=1}^k (1 - e^{-\lambda x_j}), \end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\eta_1, \eta_2, \dots$ valóban független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. $\square$

Az alábbiakban a Poisson-folyamat egy újabb (sorrendben a harmadik) definiálására lehetőséget adó állítást tárgyalunk. Szükségünk lesz arra a fogalomra, hogy egy $f(x)$ függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \rightarrow 0$.

14.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \rightarrow 0$, ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

14.5. Megjegyzés. (i) Az a tény, hogy egy f függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \rightarrow 0$ heurisztikusan azt jelenti, hogy $f(x)$ gyorsabban tart a 0-hoz, mint az x függvény, ha $x \rightarrow 0$.

(ii) Az $f(x) = x^2$ függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \rightarrow 0$, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

(iii) Az $f(x) = x$ függvény nem $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \rightarrow 0$, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0.$$

(iv) Ha f és g $o(x)$ tulajdonságúak, amint $x \rightarrow 0$, akkor $f+g$ és cf ($c \in \mathbb{R}$) is $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \rightarrow 0$. $\square$

14.6. Tétel. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy valós értékű sztochasztikus folyamat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $\{\xi_t : t \geq 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat,

(ii) (a) független, stacionárius növekményű,

(b) nemnegatív egész értékű, $\mathbb{P}(\xi_t \geq 2) = o(t)$ amint $t \downarrow 0$ és $\mathbb{P}(\xi_t = 1) = \lambda t + o(t)$ amint $t \downarrow 0$,

(c) a $[0, \infty) \ni t \mapsto \xi_t$ trajektóriák jobbról folytonosak.

14.7. Megjegyzés. (i). A 14.6. Tétel (ii)/(b) részében a $\mathbb{P}(\xi_t \geq 2) = o(t)$ és $\mathbb{P}(\xi_t = 1) = \lambda t + o(t)$ amint $t \downarrow 0$ feltételek részletesebben kiírva azt jelentik, hogy

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\xi_t \geq 2)}{t} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\xi_t = 1)}{t} = \lambda.$$

(ii). A következőkben a 14.6. Tétel (ii)/(b) részének $\mathbb{P}(\xi_t \geq 2) = o(t)$ amint $t \downarrow 0$ feltételét világítjuk meg. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy független, stacionárius növekményű nemnegatív egész értékű sztochasztikus folyamat, hogy a trajektóriák monoton növekvők és jobbról folytonosak, továbbá $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(\xi_t \geq 2) = 0$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\mathbb{P}((\xi_t)_{t \in [0,1]}\text{-nek van } 1\text{-nél nagyobb ugrása}) = 0.$$

A valószínűség folytonossága miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\xi_t)_{t \in [0,1]}\text{-nek van } 1\text{-nél nagyobb ugrása}) &= \mathbb{P}(\exists t \in (0,1], \text{ hogy } \xi_t - \xi_{t-} \geq 2) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{\xi_{\frac{k+1}{2^n}} - \xi_{\frac{k}{2^n}} \geq 2\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{\xi_{\frac{k+1}{2^n}} - \xi_{\frac{k}{2^n}} \geq 2\right\}\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{2^n-1} \left\{\xi_{\frac{k+1}{2^n}} - \xi_{\frac{k}{2^n}} < 1\right\}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{P}(\xi_{\frac{k+1}{2^n}} - \xi_{\frac{k}{2^n}} < 1) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P}(\xi_{2^{-n}} < 1)\right)^{2^n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \mathbb{P}(\xi_{2^{-n}} \geq 2)\right)^{2^n} \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2^n \mathbb{P}(\xi_{2^{-n}} \geq 2)}{2^n}\right)^{2^n} = 1 - e^{-0} = 0, \end{aligned}$$

mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \mathbb{P}(\xi_{2^{-n}} \geq 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-n}} \mathbb{P}(\xi_{2^{-n}} \geq 2) = 0,$$

hiszen $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(\xi_t \geq 2) = 0$, és alkalmazhatjuk a 5.13. Lemmát.

(iii). A következőkben a 14.6. Tétel (ii) részének feltételeit együttesen világítjuk meg, részben heurisztikusan. A (b) feltételből nyilván következik, hogy $\mathbb{P}(\xi_t = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$, amint $t \downarrow 0$. Legyen $T > 0$ és osszuk fel a $[0, T]$ intervallumot n darab egyenlő, $\frac{T}{n}$ hosszúságú részre. A feltételek alapján elég nagy n -re a szóbanforgó $\frac{T}{n}$ hosszúságú intervallumok mindegyikében 0 vagy 1 ugráshelye van $\{\xi_t : t \geq 0\}$ -nek nagy valószínűséggel. A szóbanforgó intervallumok $(\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}]$, $k = 1, \dots, n$, alakúak, és $\{\xi_t : t \geq 0\}$ stacionárius növekményűsége miatt

$$\mathbb{P}(\xi_{\frac{kT}{n}} - \xi_{\frac{(k-1)T}{n}} = 1) = \mathbb{P}(\xi_{\frac{T}{n}} = 1) = \lambda \frac{T}{n} + o\left(\frac{T}{n}\right), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, n.$$

Továbbá, mivel $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független növekményű is, az az esemény, hogy egy adott intervallumban van ugráshelye $\{\xi_t : t \geq 0\}$ -nak független attól, hogy más intervallumokban van-e

ugráshelye. Így elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\zeta_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & \text{ha } (\xi_t)_{t \geq 0} \text{-nak van ugráshelye } (\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}] \text{-ben,} \\ 0 & \text{ha } (\xi_t)_{t \geq 0} \text{-nak nincs ugráshelye } (\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}] \text{-ben,} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

”jó közelítéssel” független, Bernoulli eloszlású valószínűségi változók, közös paraméterük $p_n := \frac{\lambda T}{n} + o(\frac{T}{n})$. Így ξ_t eloszlása ”közelíthető” $\zeta_1^{(n)} + \dots + \zeta_n^{(n)}$ eloszlásával elég nagy $n \in \mathbb{N}$ -re, mely nem más, mint az n -edrendű és p_n -paraméterű binomiális eloszlás. Mivel

$$np_n = \lambda T + n \cdot o\left(\frac{T}{n}\right) \rightarrow \lambda T, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

az 5.12. Állítás alapján $\zeta_1^{(n)} + \dots + \zeta_n^{(n)}$ konvergál eloszlásban a λT -paraméterű Poisson-eloszláshoz, ha $n \rightarrow \infty$. Így a 14.6. Tétel (i) részében természetes azt várni, hogy a (ii) részbeli feltételek teljesülése esetén ξ_T Poisson-eloszlású λT paraméterrel tetszőleges $T > 0$ esetén. $\square$

Az alábbi eredmény a Poisson-folyamat egy újabb (sorrendben a negyedik) definiálására ad lehetőséget.

14.8. Tétel. Legyen $\lambda > 0$ és $L_n, X_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}$, független valószínűségi változók, hogy L_n Poisson eloszlású λ paraméterrel és $X_k^{(n)}$ egyenletes eloszlású az $(n-1, n]$ intervallumon. Ekkor

$$\xi_t := \#\{(k, n) \in \mathbb{N}^2 : k \leq L_n \text{ és } X_k^{(n)} \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

egy λ paraméterű Poisson-folyamat.

14.9. Állítás. (Poisson-folyamat Markov tulajdonsága) Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq t$ és $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k \leq n$, ahol $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{Z}_+$, teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_t = n \mid \xi_{s_k} = m_k, \dots, \xi_{s_1} = m_1) &= \mathbb{P}(\xi_t = n \mid \xi_{s_k} = m_k) = \mathbb{P}(\xi_{t-s_k} = n - m_k) \\ &= \frac{(\lambda(t-s_k))^{n-m_k}}{(n-m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)}, \end{aligned}$$

azaz $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy folytonos idejű Markov-lánc a fenti formulában szereplő átmenetvalószínűségekkel.

Bizonyítás. A 14.3. Tétel alapján $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű folyamat,

így

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_t = n \mid \xi_{s_k} = m_k, \dots, \xi_{s_1} = m_1) &= \frac{\mathbb{P}(\xi_t = n, \xi_{s_k} = m_k, \dots, \xi_{s_1} = m_1)}{\mathbb{P}(\xi_{s_k} = m_k, \dots, \xi_{s_1} = m_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\xi_t - \xi_{s_k} = n - m_k, \xi_{s_k} - \xi_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}, \dots, \xi_{s_1} - \xi_0 = m_1)}{\mathbb{P}(\xi_{s_k} - \xi_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}, \dots, \xi_{s_1} - \xi_0 = m_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\xi_t - \xi_{s_k} = n - m_k) \mathbb{P}(\xi_{s_k} - \xi_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}) \cdots \mathbb{P}(\xi_{s_1} - \xi_0 = m_1)}{\mathbb{P}(\xi_{s_k} - \xi_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}) \cdots \mathbb{P}(\xi_{s_1} - \xi_0 = m_1)} \\
&= \mathbb{P}(\xi_t - \xi_{s_k} = n - m_k) = \mathbb{P}(\xi_{t-s_k} = n - m_k) = \frac{(\lambda(t-s_k))^{n-m_k}}{(n-m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan gondolatmenettel következik, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_t = n \mid \xi_{s_k} = m_k) &= \frac{\mathbb{P}(\xi_t = n, \xi_{s_k} = m_k)}{\mathbb{P}(\xi_{s_k} = m_k)} = \frac{\mathbb{P}(\xi_t - \xi_{s_k} = n - m_k, \xi_{s_k} = m_k)}{\mathbb{P}(\xi_{s_k} = m_k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\xi_t - \xi_{s_k} = n - m_k) \mathbb{P}(\xi_{s_k} = m_k)}{\mathbb{P}(\xi_{s_k} = m_k)} = \mathbb{P}(\xi_t - \xi_{s_k} = n - m_k) \\
&= \frac{(\lambda(t-s_k))^{n-m_k}}{(n-m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)}.
\end{aligned}$$

□

14.10. Állítás. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor a 14.1. Definícióban bevezetett T_n , $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók n -edrendű, λ paraméterű Gamma eloszlásúak. A T_n valószínűségi változót a Poisson-folyamathoz tartozó n -edik "esemény (felújítás)" **várakozási idejének** szokás nevezni.

Bizonyítás. Az állítás rögtön következik abból, hogy $T_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $\eta_1, \dots, \eta_n$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók; tudva azt, hogy n darab független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása n -edrendű, λ paraméterű Gamma eloszlás.

Az érdekesség kedvéért adunk egy „elemibb” bizonyítást is. Felhasználva (14.4)-t, kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\xi_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}.$$

Tudva azt, hogy T_n , $n \in \mathbb{N}$, eloszlása abszolút folytonos, hiszen abszolút folytonos eloszlások konvolúciója, kapjuk, hogy T_n eloszlásfüggvénye a $t > 0$ helyen

$$F_{T_n}(t) = \mathbb{P}(T_n < t) = \mathbb{P}(T_n \leq t) = \mathbb{P}(\xi_t \geq n).$$

(Ha $t \leq 0$, akkor $F_{T_n}(t) = 0$, hiszen T_n nemnegatív.) Mivel ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel, kapjuk, hogy

$$F_{T_n}(t) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Felhasználva, hogy egy hatványsor a konvergencia tartományán belül "tagonként" differenciálható, a t változó szerint differenciálva kapjuk, hogy ha $t > 0$, akkor T_n sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} \left(\lambda \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} (-\lambda) \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

ami pontosan egy n -edrendű, λ paraméterű Gamma eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $t > 0$ helyen. $\square$

Megjegyezzük, hogy amikor a Gamma eloszlás rendje egy pozitív egész szám, akkor a Gamma eloszlást Erlang eloszlásnak is nevezik, így a 14.10. Állítás szerint a 14.1. Definícióban bevezetett T_n , $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók Erlang eloszlásúak.

14.11. Állítás. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$Y_k^{(n)} := T_{n+k+1} - T_{n+1} = \sum_{j=n+2}^{n+k+1} \eta_j,$$

ahol T_n , $n \in \mathbb{N}$ a 14.1. Definícióban bevezetett valószínűségi változók. Ekkor $Y_k^{(n)}$ független a $\sigma(\eta_1, \dots, \eta_{n+1})$ σ -algebrától és Gamma-eloszlású k és λ paraméterekkel, azaz $Y_k^{(n)}$ sűrűségfüggvénye

$$f_{Y_k^{(n)}}(u) = \begin{cases} \frac{\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}}{(k-1)!} & \text{ha } u > 0, \\ 0 & \text{ha } u \leq 0. \end{cases}$$

Továbbá, minden $\theta > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(Y_k^{(n)} > \theta) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda \theta)^j}{j!} \right) e^{-\lambda \theta}. \quad (14.11)$$

Bizonyítás. Az, hogy $Y_k^{(n)}$ Gamma-eloszlású a megadott paraméterekkel következik a 14.10. Állítás bizonyításából. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ha $k = 1$, akkor

$$\mathbb{P}(Y_1^{(n)} > \theta) = \mathbb{P}(\eta_{n+2} > \theta) = 1 - F_{\eta_{n+2}}(\theta) = 1 - (1 - e^{-\lambda \theta}) = e^{-\lambda \theta}.$$

Tegyük fel, hogy (14.11) igaz $1, 2, \dots, k$ -ra, és mutassuk meg, hogy fennáll $k+1$ -re is. Mivel $Y_k^{(n)}$ és η_{n+k+2} függetlenek, a teljes várható érték tétele (lásd 8.18. Tétel) alapján kapjuk,

hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{k+1}^{(n)} > \theta) &= \mathbb{P}(Y_k^{(n)} + \eta_{n+k+2} > \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k^{(n)} + u > \theta \mid \eta_{n+k+2} = u) f_{\eta_{n+k+2}}(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k^{(n)} > \theta - u) f_{\eta_{n+k+2}}(u) du = \int_0^{\theta} \mathbb{P}(Y_k^{(n)} > \theta - u) \lambda e^{-\lambda u} du + \int_{\theta}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \\
&= \int_0^{\theta} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda(\theta - u))^j}{j!} e^{-\lambda(\theta - u)} \lambda e^{-\lambda u} du + e^{-\lambda\theta} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} e^{-\lambda\theta} \int_0^{\theta} (\theta - u)^j du + e^{-\lambda\theta} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda\theta)^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta} = \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda\theta)^j}{j!} e^{-\lambda\theta}.
\end{aligned}$$

□

14.12. Állítás. (Poisson-folyamat eltolása) Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat és τ egy tőle független nemnegatív értékű valószínűségi változó. Legyen $\xi'_t := \xi_{\tau+t} - \xi_{\tau}$, $t \geq 0$. Ekkor $\{\xi'_t : t \geq 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat, mely független a $\{\tau, N_t, t \in [0, \tau]\}$ véletlen változóktól.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\{\xi'_t : t \geq 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat. Mivel tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén a $[0, \infty) \ni t \mapsto \xi'_t(\omega) = \xi_{\tau(\omega)+t}(\omega) - \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ trajektória jobbról folytonos, a 14.3. Tétel alapján elég azt megmutatni, hogy $\{\xi'_t : t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű és tetszőleges $t \geq 0$ esetén ξ'_t Poisson eloszlású λt paraméterrel.

Legyenek $0 < s < t$ és $0 < s^* < t^*$ olyanok, hogy $t^* - s^* = t - s$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\xi'_t - \xi'_s &= \xi_{\tau+t} - \xi_{\tau} - (\xi_{\tau+s} - \xi_{\tau}) = \xi_{\tau+t} - \xi_{\tau+s}, \\
\xi'_{t^*} - \xi'_{s^*} &= \xi_{\tau+t^*} - \xi_{\tau} - (\xi_{\tau+s^*} - \xi_{\tau}) = \xi_{\tau+t^*} - \xi_{\tau+s^*}.
\end{aligned}$$

Továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_{\tau+t} - \xi_{\tau+s} < x) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(\xi_{\tau+t} - \xi_{\tau+s} < x) \mid \tau) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(\xi_{u+t} - \xi_{u+s} < x) \mid_{u=\tau}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(\xi_{t-s} < x) \mid_{u=\tau}\right) = \mathbb{P}(\xi_{t-s} < x) = \mathbb{P}(\xi_{t^*-s^*} < x) \\
&= \mathbb{P}(\xi_{t^*} - \xi_{s^*} < x) = \mathbb{P}(\xi_{\tau+t^*} - \xi_{\tau+s^*} < x),
\end{aligned}$$

azaz $\xi_{\tau+t} - \xi_{\tau+s}$ és $\xi_{\tau+t^*} - \xi_{\tau+s^*}$ eloszlásaik megegyeznek. Ezért $\{\xi'_t : t \geq 0\}$ stacionárius növekményű.

Nyilván, $\xi'_0 = 0$. Tetszőleges $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ esetén megmutatjuk, hogy $\xi'_{t_1} - \xi'_{s_1} = \xi_{\tau+t_1} - \xi_{\tau+s_1}$ és $\xi'_{t_2} - \xi'_{s_2} = \xi_{\tau+t_2} - \xi_{\tau+s_2}$ függetlenek. Tetszőleges $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén, felhasználva, hogy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független növekményű, hasonlóan az előzőekhez kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_{\tau+t_1} - \xi_{\tau+s_1} \in B_1, \xi_{\tau+t_2} - \xi_{\tau+s_2} \in B_2) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(\xi_{\tau+t_1} - \xi_{\tau+s_1} \in B_1, \xi_{\tau+t_2} - \xi_{\tau+s_2} \in B_2) \mid \tau) \\
&= \mathbb{P}(\xi_{t_1-s_1} \in B_1) \mathbb{P}(\xi_{t_2-s_2} \in B_2) \\
&= \mathbb{P}(\xi_{\tau+t_1} - \xi_{\tau+s_1} \in B_1) \mathbb{P}(\xi_{\tau+t_2} - \xi_{\tau+s_2} \in B_2).
\end{aligned}$$

A független növekményűség 12.11. Definíciójában szereplő általánosabb tulajdonság hasonlóan látható be.

Végezetül, tetszőleges $t \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(\xi'_t = n) = \mathbb{P}(\xi_{\tau+t} - \xi_\tau = n) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(\xi_{\tau+t} - \xi_\tau = n) \mid \tau) = \mathbb{P}(\xi_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

azaz ξ'_t Poisson-eloszlású λt paraméterrel.

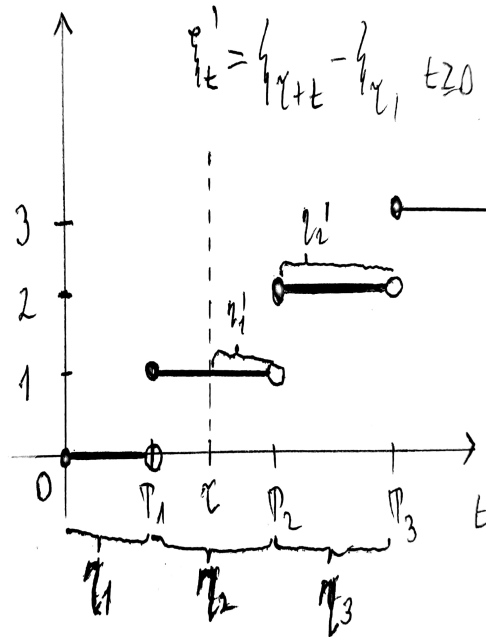
A következőkben megmutatjuk, hogy $\{\xi'_t : t \geq 0\}$ független a $\{\tau, \xi_t, t \in [0, \tau]\}$ véletlen változóktól. A 2. ábra alapján végiggondolható, hogy

$$(i) \sigma(\tau, \xi_t, t \in [0, \tau]) = \sigma(\tau, \xi_\tau, \eta_1, \dots, \eta_{\xi_\tau}),$$

$$(ii) \sigma(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+) = \sigma(\eta_\ell, \ell \in \mathbb{N}),$$

$$(iii) \sigma(\xi'_t, t \in \mathbb{R}_+) = \sigma(\eta'_\ell, \ell \in \mathbb{N}),$$

ahol η'_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$, jelöli a $\{\xi'_t : t \geq 0\}$ Poisson folyamat esetén a 14.1. Definíció szerinti értelemben az egyes felújítások közötti időtartamokat.



2. ábra. Poisson-folyamat eltolása.

Az (i) rész esetén formai okok miatt megjegyezzük, hogy $\sigma(\tau, \xi_t, t \in [0, \tau]) = \sigma(\tau, \tilde{\xi}_t, t \in \mathbb{R}_+)$, ahol $\tilde{\xi}_t := \xi_t$, ha $t \in [0, \tau]$ és $\tilde{\xi}_t := 0$, ha $t > \tau$, így $\sigma(\tau, \xi_t, t \in [0, \tau])$ az 1.12. Definíció szerint

értelmezett. Felhasználva (i)-t és (iii)-t, kapjuk, hogy ahhoz, hogy $\{\xi'_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ független a $\{\tau, \xi_t, t \in [0, \tau]\}$ véletlen változóktól azt kell megmutatnunk, hogy

$$\eta'_\ell, \ell \in \mathbb{N} \text{ és } \tau, \xi_\tau, \eta_1, \dots, \eta_{\xi_\tau} \text{ függetlenek.}$$

Legyen $n \in \mathbb{Z}_+$ és $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$, és legyen továbbá $t_n := x_1 + \dots + x_n$. A 2. ábra alapján, ha $\xi_\tau = n$, akkor $\eta'_1 = \eta_{n+1} - (\tau - T_n)$. Mivel $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ és τ függetlenek, (ii) alapján $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ és τ is függetlenek. Így a 8.14. Tétel (ii) része és az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága alapján (5.20. Állítás (ii) része) kapjuk, hogy tetszőleges $y \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi'_1 > y \mid \tau = t, \xi_\tau = n, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1} - (\tau - T_n) > y \mid \tau = t, T_n \leq \tau < T_{n+1}, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1} - (\tau - T_n) > y \mid \tau = t, T_n \leq t < T_{n+1}, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1} > (\tau - T_n) + y \mid \tau = t, 0 \leq t - t_n < \eta_{n+1}, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1} > (t - t_n) + y \mid 0 \leq t - t_n < \eta_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1} > y) = e^{-\lambda y}. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Megjegyezzük, hogy a fentiekben megjelenő $\mathbb{E}(Y \mid X = x, A)$ típusú kifejezés, ahol Y, X olyan véletlen változók és $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, hogy $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, $\mathbb{P}(A) > 0$, és X és A függetlenek, speciális esete a feltételes várható értéknél tanultaknak (lásd 8.9. Lemma és 8.11. Jelölés), ugyanis $\mathbb{E}(Y \mid X, \mathbb{1}_A) = f(X, \mathbb{1}_A)$, ahol az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{P}_{X, \mathbb{1}_A}$ -m.m. $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ esetén egyértelműen meghatározott. Mivel X és A függetlenek, kapjuk, hogy $\mathbb{P}_{X, \mathbb{1}_A} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_{\mathbb{1}_A}$, ahol

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{1}_A}(S) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A \in S) &= \begin{cases} 1 & \text{ha } 0, 1 \in C, \\ \mathbb{P}(A) & \text{ha } 1 \in C, 0 \notin C, \\ 1 - \mathbb{P}(A) & \text{ha } 1 \notin C, 0 \in C, \\ 0 & \text{ha } 0, 1 \notin C, \end{cases} \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{1}_{\{1\}}(S) + (1 - \mathbb{P}(A)) \mathbb{1}_{\{0\}}(S), \quad S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

és így $\mathbb{E}(Y \mid X = x, \mathbb{1}_A = z) = f(x, z)$ $\mathbb{P}_X$ -m.m. $x \in \mathbb{R}$ és $z \in \{0, 1\}$ esetén. Felhasználva, hogy $\{\mathbb{1}_A = 1\} = A$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(Y \mid X = x, A) = f(x, 1)$ $\mathbb{P}_X$ -m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén.

A feltétel és (ii) alapján $\eta_{n+2}, \eta_{n+3}, \dots$ függetlenek a $\tau, \eta_1, \dots, \eta_{n+1}$ véletlen változóktól, így a láncszabály, (14.12) és a 8.14. Tétel (ii) része alapján kapjuk, hogy tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta'_1 > y_1, \dots, \eta'_m > y_m \mid \tau = t, \xi_\tau = n, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\eta'_1 > y_1 \mid \tau = t, \xi_\tau = n, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n) \\ & \quad \times \mathbb{P}(\eta'_2 > y_2, \dots, \eta'_m > y_m \mid \tau = t, \xi_\tau = n, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n, \eta'_1 > y_1) \\ &= e^{-\lambda y_1} \mathbb{P}(\eta_{n+2} > y_2, \dots, \eta_{n+m} > y_m \mid \tau = t, T_n \leq \tau < T_{n+1}, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n, \\ & \quad \eta_{n+1} - (\tau - T_n) > y_1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\lambda y_1} \mathbb{P}(\eta_{n+2} > y_2, \dots, \eta_{n+m} > y_m \mid \tau = t, 0 \leq t - t_n < \eta_{n+1}, \eta_1 = x_1, \dots, \eta_n = x_n, \\
 &\quad \eta_{n+1} - (\tau - t_n) > y_1) \\
 &= e^{-\lambda y_1} \mathbb{P}(\eta_{n+2} > y_2, \dots, \eta_{n+m} > y_m) = e^{-\lambda y_1} \mathbb{P}(\eta_{n+2} > y_2) \cdots \mathbb{P}(\eta_{n+m} > y_m) \\
 &= e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda y_2} \cdots e^{-\lambda y_m}.
 \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $\eta'_1, \dots, \eta'_m$ függetlenek a $\tau, \xi_\tau, \eta_1, \dots, \eta_n$ véletlen változóktól, és így $\eta'_\ell, \ell \in \mathbb{N}$, függetlenek a $\tau, \xi_\tau, \eta_1, \dots, \eta_n$ véletlen változóktól. $\square$

Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat és legyen $0 < p < 1$ rögzített. A Poisson-folyamat 14.1. Definícióját alapul véve, ξ_t interpretálható úgy, mint a t időpontig bekövetkező "események" száma valamely kísérletben, ahol az "események" bekövetkezési időpontjai $T_n, n \in \mathbb{N}$. Például, ha ξ_t a t időpontig egy adott áruházba betérő emberek számát jelöli, akkor egy vásárlónak az áruházba történő belépése felel meg egy "eseménynek". Tegyük fel, hogy minden alkalommal, mikor egy „esemény” bekövetkezik azt vagy I-es típusúnak vagy II-es típusúnak minősítjük. Feltételezzük, hogy egy eseményt I-es típusúnak p , II-es típusúnak $1 - p$ valószínűséggel minősítünk és ezek a minősítések egymástól teljesen függetlenül történnek. Tekintsük mintaként az előző példát. Tegyük fel, hogy egy eseményt, azaz egy vásárló érkezését aszerint minősítjük, osztályozzuk, hogy ő férfi vagy nő. Jelen esetben $p = 1/2$ természetes választás. (A $p \neq 1/2$ eset annak felelhetne meg, hogy az áruházat kicseréljük például egy női fodrász szalonra.) A továbbiakban újra az általános konstrukciót tekintjük. Tetszőleges $t \geq 0$ esetén jelölje $\xi_t^{(1)}$ a t időpontig I-típusúnak minősített események, $\xi_t^{(2)}$ pedig a II-típusúnak minősített események számát. Nyilván $\xi_t = \xi_t^{(1)} + \xi_t^{(2)}$ minden $t \geq 0$ esetén.

14.13. Állítás. (Poisson-folyamat ritkítása) Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű paraméterű Poisson-folyamat és legyen $0 < p < 1$. Ekkor $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ λp paraméterű, $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ $\lambda(1 - p)$ paraméterű, egymástól független Poisson-folyamatok.

Bizonyítás. Felhasználva $\xi_t^{(1)}$ és $\xi_t^{(2)}$ konstrukcióját az könnyen adódik, hogy $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ független növekményű folyamatok, és a trajektóriák jobbról folytonossága is nyilvánvaló. A következőkben meghatározzuk $\xi_t^{(1)}$ és $\xi_t^{(2)}$ együttes eloszlását, azaz a

$$\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+$$

valószínűségeket. A teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \mid \xi_t = k) \mathbb{P}(\xi_t = k).$$

Ahhoz, hogy a t időpontig n darab I-típusú és m darab II-típusú esemény következzen be szükséges, hogy összesen $n + m$ esemény következzen be a t időpontig, így

$$\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \mid \xi_t = k) = 0, \quad \text{ha} \quad k \neq n + m.$$

Ezért, felhasználva, hogy ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel, kapjuk, hogy minden $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \mid \xi_t = n+m) \mathbb{P}(\xi_t = n+m) \\ &= \mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \mid \xi_t = n+m) \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Mivel minden eseményt p valószínűséggel I-típusúnak, $(1-p)$ valószínűséggel II-típusúnak osztályozunk, feltételezve, hogy összesen $n+m$ esemény következett be, az I-típusú események száma $(n+m)$ -edrendű és p -paraméterű binomiális eloszlást követ. Ezért annak a valószínűsége, hogy $n+m$ eseményből n -et I-típusúnak, m -et II-típusúnak osztályozunk

$$\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m.$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t (1-p)}.\end{aligned}\tag{14.13}$$

Összegezve ezen egyenlet két oldalát m szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) \\ &= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t (1-p)} = \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\mathbb{P}(\xi_t^{(2)} = m) = \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t (1-p)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezért (14.13) alapján

$$\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) = \mathbb{P}(\xi_t^{(1)} = n) \mathbb{P}(\xi_t^{(2)} = m), \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.\tag{14.14}$$

Hasonlóan beláthatjuk, hogy $0 \leq s < t$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, esetén

$$\mathbb{P}(\xi_t^{(1)} - \xi_s^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m) = \frac{(\lambda(t-s)p)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)p} \frac{(\lambda(t-s)(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)(1-p)}.$$

(Az s időpont után a t időpontig bekövetkező I-típusú, illetve II-típusú eseményeket kell figyelni.) Ebből az is következik, hogy tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén

$$\begin{aligned}\xi_t^{(1)} - \xi_s^{(1)} &\sim \xi_{t-s}^{(1)} \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)p), \\ \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} &\sim \xi_{t-s}^{(2)} \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)(1-p)).\end{aligned}$$

Azaz $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ stacionárius növekményű folyamatok is és a növekmények eloszlása a 14.3. Tétel (ii) részében megkívánt. A 14.3. Tétel alapján $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ λp paraméterű Poisson-folyamat, $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ pedig $\lambda(1-p)$ paraméterű Poisson-folyamat.

A következőkben, felhasználva (14.13)-t, megmutatjuk, hogy a $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatok függetlenek. Azt kell megmutatnunk, hogy a $\sigma(\xi_t^{(1)}, t \geq 0)$ és a $\sigma(\xi_t^{(2)}, t \geq 0)$ σ -algebrák függetlenek. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges $s, t \geq 0$ esetén $\xi_s^{(1)}$ és $\xi_t^{(2)}$ függetlenek. Feltehető, hogy $0 \leq s < t$. Ekkor tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} = m) \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k). \end{aligned}$$

Hasonlóan az előző számolásokhoz

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k) \\ &= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k \mid \xi_s = n + k, \xi_t - \xi_s = \ell) \\ &\quad \times \mathbb{P}(\xi_s = n + k, \xi_t - \xi_s = \ell) \\ &= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k \mid \xi_s = n + k, \xi_t - \xi_s = \ell) \\ &\quad \times \frac{(\lambda s)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^\ell}{\ell!} e^{-\lambda(t-s)} \\ &= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \binom{n+k}{n} p^n (1-p)^k \binom{\ell}{m-k} p^{\ell-(m-k)} (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^{n+k+\ell} s^{n+k} (t-s)^\ell}{(n+k)! \ell!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \frac{1}{n! k! (m-k)! (\ell-m+k)!} p^{n+\ell-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k+\ell} s^{n+k} (t-s)^\ell e^{-\lambda t} \\ &= \frac{p^{n-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k} s^{n+k} e^{-\lambda t}}{n! k! (m-k)!} \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \frac{1}{(\ell-m+k)!} p^\ell \lambda^\ell (t-s)^\ell \\ &= \frac{p^{n-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k} s^{n+k} e^{-\lambda t}}{n! k! (m-k)!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(p\lambda(t-s))^{\ell+m-k}}{\ell!} \\ &= \frac{p^{n-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k} s^{n+k} e^{-\lambda t}}{n! k! (m-k)!} (p\lambda(t-s))^{m-k} e^{p\lambda(t-s)} \\ &= \frac{p^n (1-p)^m \lambda^{n+m} s^{n+k} (t-s)^{m-k}}{n! k! (m-k)!} e^{-\lambda(t-p(t-s))}, \end{aligned}$$

mely megegyezik az alábbival:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n) \mathbb{P}(\xi_s^{(2)} = k) \mathbb{P}(\xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k) \\
 &= \frac{(\lambda s p)^n}{n!} e^{-\lambda s p} \cdot \frac{(\lambda s (1-p))^k}{k!} e^{-\lambda s (1-p)} \cdot \frac{(\lambda (t-s)(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda (t-s)(1-p)} \\
 &= \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n) \mathbb{P}(\xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k).
 \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n) \mathbb{P}(\xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k) \\
 &= \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n) \mathbb{P}(\xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} = m) \\
 &= \mathbb{P}(\xi_s^{(1)} = n) \mathbb{P}(\xi_t^{(2)} = m).
 \end{aligned}$$

Tehát $\xi_t^{(1)}$ és $\xi_s^{(2)}$ függetlenek tetszőleges $s, t \geq 0$ esetén. Ebből már következik, hogy a szóbanforgó σ -algebrák is függetlenek (a pontos bizonyítás a Kolmogorov 0-1 törvény bizonyításánál látottaknak megfelelően történhet). $\square$

14.14. Megjegyzés. Nem az a meglepő, hogy $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatok, hanem az, hogy függetlenek. Jelölje például ξ_t a t időpontig egy bankba érkező ügyfelek számát (az időt mérjük órában). Tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ 1 paraméterű Poisson-folyamat. Tételezzük fel továbbá azt is, hogy minden egyes ügyfél $1/2$ valószínűséggel férfi, ill. nő. Tudjuk, hogy a bank nyitása utáni 10 órában 100 férfi érkezett. Várhatóan mennyi nő érkezett ez idő alatt a bankba? Egy **téves** érvelés a következő, mivel 100 férfi érkezett és minden érkező $1/2$ valószínűséggel férfi, várhatóan összesen 200-an érkeztek, ezért várhatóan 100 nő érkezett ez idő alatt. Azonban ez hibás érvelés. A helyes gondolatmenet a következő. A 14.13. Állítás alapján, ha $\xi_t^{(2)}$ jelöli a t időpontig a bankba érkező női ügyfelek számát, akkor $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ $1/2$ paraméterű Poisson-folyamat. Így az első 10 órában érkező női ügyfelek száma Poisson eloszlású $10 \cdot 1/2 = 5$ paraméterrel. S mivel a Poisson eloszlás várható értéke megegyezik a paraméterével kapjuk, hogy várhatóan 5 nő érkezik a bankba az első 10 órában (és ez független az ez idő alatt a bankba érkező férfi ügyfelek számától). $\square$

A 14.13. Állítás szerint, ha egy λ paraméterű Poisson-folyamat minden egyes „eseményét” egymástól függetlenül I. vagy II. típusúnak osztályozzuk p , ill. $1-p$ valószínűséggel, akkor az I-típusú, ill. II-típusú eseményeket számláló folyamatok egymástól független λp , ill. $\lambda(1-p)$ paraméterű Poisson-folyamatok. Vizsgáljunk most egy kicsit összetettebb helyzetet. Tegyük fel, hogy a bekövetkező eseményeket k darab, egymástól különböző típusúnak osztályozhatjuk és az, hogy egy eseményt milyen típusúnak minősítünk függ attól is, hogy mikor következik be. Tegyük fel, hogy ha egy esemény az y időpontban következik be, akkor öt $p_i(y)$ valószínűséggel

minősítjük i -edik típusúnak ($i = 1, \dots, k$), minden olyan eseménytől (és annak minősítésétől) függetlenül, ami előtte következett be. (Nyilván $\sum_{i=1}^k p_i(y) = 1$ minden $y \geq 0$ esetén.) A 14.13. Állítás alapján bizonyítható a következő állítás.

14.15. Állítás. (Poisson-folyamat ritkítása, általános eset) Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat és tekintsük az állítás előtt szereplő konstrukciót. Jelölje $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ a $t \geq 0$ időpontig bekövetkező i -edik típusú események számát. Ekkor minden $t \geq 0$ esetén $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mathbb{E}(\xi_i(t)) = \lambda \int_0^t p_i(s) ds$ paraméterekkel.

14.16. Megjegyzés. (Független Poisson-folyamatokra vonatkozó várakozási idők) Legyenek $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ független $\lambda_1 > 0$, ill. $\lambda_2 > 0$ paraméterű Poisson-folyamatok. Jelölje $T_n^{(1)}$, ill. $T_n^{(2)}$, $n \in \mathbb{N}$ az első, ill. második folyamatra vonatkozó várakozási időket. A $\mathbb{P}(T_n^{(1)} < T_m^{(2)})$, $n, m \in \mathbb{N}$ valószínűség kiszámításával foglalkozunk. (Azaz arra keressük a választ, mi annak a valószínűsége, hogy egy Poisson-folyamatban hamarabb következik be n darab esemény, mint egy másik, tőle független Poisson-folyamatban m darab esemény.) Tekintsük először az $n = m = 1$ esetet. Ekkor $T_1^{(1)}$ λ_1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $T_1^{(2)}$ pedig tőle független λ_2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Így a teljes várható érték tétele (lásd 8.18. Tétel) alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(T_1^{(1)} < T_1^{(2)}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x) f_{T_1^{(2)}}(x) dx.$$

Felhasználva azt, ha ξ és η független valószínűségi változók és $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|g(\xi, \eta)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(\xi, \eta) | \eta = y) = \mathbb{E}(g(\xi, y))$ $\mathbb{P}_\eta$ -m.m. $y \in \mathbb{R}$ (lásd 8.14. Tétel (ii) része), kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(T_1^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x) = \mathbb{P}(T_1^{(1)} < x), \quad \mathbb{P}_{T_1^{(2)}}\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}. \quad (14.15)$$

Felhasználva, hogy $\mathbb{P}_{T_1^{(2)}}$ abszolút folytonos az $\mathbb{R}$ -en adott Lebesgue-mértékre nézve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1^{(1)} < T_1^{(2)}) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1^{(1)} < x) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 x}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx = 1 - \lambda_2 \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{P}(T_1^{(1)} < T_1^{(2)}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (14.16)$$

Határozzuk meg most annak a valószínűségét, hogy a $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatban 2 esemény is bekövetkezik, mielőtt a $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatban egy esemény is

bekövetkezne, azaz a $\mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)})$ valószínűségre vagyunk kíváncsiak. Tekintsük az alábbi (kicsit heurisztikus) gondolatmenetet. Ahhoz, hogy a $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatban 2 esemény is azelőtt következzen be, hogy a $\{\xi_t^{(2)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatban egy esemény is bekövetkezne szükséges, hogy az első esemény a $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatból következzen be, ennek valószínűsége (14.16) alapján $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Feltételezve, hogy az első esemény a $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatból következik be, ahhoz, hogy $T_2^{(1)} < T_1^{(2)}$ legyen szükséges és elégséges, hogy a második esemény is a $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ folyamatból következzen be. Azonban az első esemény bekövetkezésekor mindkét folyamat újjászületik (emlékezet nélküiség), így ez a feltételes valószínűség is $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2.$$

A pontos indoklás a következő. A teljes várható érték tétele alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 x} dx dy \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) e^{-\lambda_1 y} dy \right) e^{-\lambda_2 x} dx, \end{aligned}$$

hiszen, ha $x < y$, akkor $\mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) = 0$, mert $T_1^{(1)} \leq T_2^{(1)}$.

Ha $x \geq y \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} | T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) &= \mathbb{P}(T_2^{(1)} - T_1^{(1)} < T_1^{(2)} - y | T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) \\ &= \mathbb{P}(T_2^{(1)} - T_1^{(1)} < T_1^{(2)} - y | T_1^{(2)} = x) \\ &= \mathbb{P}(T_2^{(1)} - T_1^{(1)} < x - y) = 1 - e^{-\lambda_1(x-y)}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $T_1^{(2)}$ független $T_1^{(1)}$ -től (az alapul vett Poisson-folyamatok függetlensége miatt), azt, hogy $T_2^{(1)} - T_1^{(1)}$ független $T_1^{(1)}$ -től, ill. $T_1^{(2)}$ -től (hiszen az 14.1. Definíció alapján $\{\xi_t^{(1)} : t \geq 0\}$ független növekményű folyamat, ill. az alapul vett Poisson-folyamatok függetlenek), valamint a legvégén azt, hogy $T_2^{(1)} - T_1^{(1)}$ exponenciális eloszlású λ_1 paraméterrel. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \left(\int_0^x (1 - e^{-\lambda_1(x-y)}) e^{-\lambda_1 y} dy \right) e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \left(\left[\frac{e^{-\lambda_1 y}}{-\lambda_1} \right]_0^x - e^{-\lambda_1 x} \int_0^x 1 dy \right) e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 x} - 1) - e^{-\lambda_1 x} x \right) e^{-\lambda_2 x} dx. \end{aligned}$$

Innen egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\mathbb{P}(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2.$$

Általában megmutatható, hogy tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{P}(T_n^{(1)} < T_m^{(2)}) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}.$$

□

A Poisson-folyamattal nemcsak a Poisson eloszlás és az exponenciális eloszlás áll kapcsolatban. Megmutatjuk, hogyan jön itt elő az egyenletes és a binomiális eloszlás.

14.17. Tétel. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $t > 0$ esetén $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ feltételes eloszlása a $\{\xi_t = n\}$ feltételre vonatkozóan megegyezik a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók n elemű rendezett mintájának eloszlásával, ahol $T_1, \dots, T_n$ a 14.1. Definícióban szereplő valószínűségi változók. Azaz minden $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ és $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$ esetén

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n | \xi_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int \dots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_i \leq t_i \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, n}} 1 \, dx_1 \dots dx_n.$$

Bizonyítás. A feltételes várható érték definíciója alapján és felhasználva, hogy ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n | \xi_t = n) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n, \xi_t = n)}{\mathbb{P}(\xi_t = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n, \xi_t = n)}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Felhasználva a T_n , $n \in \mathbb{N}$, definícióját és azt, hogy a definíálásában szereplő $\eta_1, \eta_2, \dots$ valószínűségi változók független, λ paraméterű exponenciális eloszlásúak kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n, \xi_t = n) \\ &= \mathbb{P}(\eta_1 \leq t_1, \eta_1 + \eta_2 \leq t_2, \dots, \eta_1 + \dots + \eta_n \leq t_n, \eta_1 + \dots + \eta_{n+1} > t) \\ &= \int_{(0, \infty)^{n+1}} \mathbb{1}_{\{x_1 \leq t_1, x_1 + x_2 \leq t_2, \dots, x_1 + \dots + x_n \leq t_n, x_1 + \dots + x_{n+1} > t\}} f_{(\eta_1, \dots, \eta_{n+1})}(x_1, \dots, x_{n+1}) \, dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \dots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} \int_{t - x_1 - \dots - x_n}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{n+1})} \, dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \lambda^{n+1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \dots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} \left[\frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_{u=t-x_1-\dots-x_n}^{u=\infty} \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \dots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} 1 \, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n \mid \xi_t = n) &= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2-x_1} \dots \int_0^{t_n-x_1-\dots-x_{n-1}} 1 \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int \dots \int 1 \, dx_1 \dots dx_n. \\ &\quad \substack{x_1+\dots+x_i \leq t_i \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, n}\end{aligned}$$

Végrehajtva az $x_1 + \dots + x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$ helyettesítést, a helyettesítés Jacobi-mátrixa determinánsának abszolút értéke 1, és az $x_1 + \dots + x_i \leq t_i$, $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ integrálási tartomány az $y_i \leq t_i$, $i = 1, \dots, n$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ integrálási tartományba megy át. Így

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n \mid \xi_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{y_1}^{t_2} \dots \int_{y_{n-1}}^{t_n} 1 \, dy_1 \dots dy_n. \quad (14.17)$$

Azt kell még megmutatni, hogy a (14.17) formula jobb oldala megegyezik a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók n elemű rendezett mintájának eloszlásfüggvényének a $(t_1, \dots, t_n)$ helyen felvett értékével. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független, a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Meghatározzuk az $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ rendezett minta elemeinek együttes sűrűségfüggvényét. Először az együttes eloszlásfüggvényüket határozzuk meg:

$$F_{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Csak olyan $x_1, \dots, x_n$ -ekre vizsgálódunk, melyekre $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq t$. Az, hogy $x_i \in (0, t)$ annak a következménye, hogy a mintánk $(0, t)$ -n egyenletes eloszlásra van. A növekvő sorrend pedig annak, hogy ha például $x_1 > x_2$, akkor $X_1^* \leq X_2^* < x_2 < x_1$ miatt $X_1^* < x_1$, így

$$\mathbb{P}(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n) = \mathbb{P}(X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n).$$

Ezért amikor az együttes sűrűségfüggvényt határozzuk meg deriválással, az x_1 változó szerint konstans függvényt kell deriválni, így az ilyen helyeken a sűrűségfüggvény nulla.

Tehát $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq t$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n) &= \int \dots \int \frac{1}{t^n} \, dy_1 \dots dy_n \\ &\quad \substack{(y_1, \dots, y_n) \in (0, t)^n \\ y_i^* < x_i, i=1, \dots, n} \\ &= n! \int \dots \int \frac{1}{t^n} \, dy_1 \dots dy_n, \\ &\quad \substack{(y_1, \dots, y_n) \in (0, t)^n \\ y_1 \leq \dots \leq y_n, y_i < x_i, i=1, \dots, n}\end{aligned}$$

ugyanis $\mathbb{P}(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n)$ az $X_1, \dots, X_n$ minta egy függvényének várható értékeként írható fel, és az $X_1, \dots, X_n$ minta együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \frac{1}{t^n} & \text{ha } y_i \in (0, t), \quad i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

az utolsó lépésben pedig az integrandus $y_1, \dots, y_n$ -ben való szimmetriáját, illetve azt használtuk fel, hogy egy permutáció mátrix determinánsának abszolútértéke 1-el egyenlő.

Ezért

$$f_{X_1^*, \dots, X_n^*}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & \text{ha } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq t, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Összefoglalva, minden $n \in \mathbb{N}$ és $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1^* < t_1, X_2^* < t_2, \dots, X_n^* < t_n) &= \frac{n!}{t^n} \int \dots \int_{\substack{x_i \leq t_i, i=1, \dots, n \\ 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq t}} 1 \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{t_2} \dots \int_{x_{n-1}}^{t_n} 1 \, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Ez utóbbi pedig megegyezik (14.17) jobboldalával. $\square$

14.18. Következmény. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $t > 0$ esetén $T_1, \dots, T_{n-1}$ együttes eloszlása a $\{T_n = t\}$ feltételre vonatkozóan megegyezik a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett $n-1$ elemű rendezett minta együttes eloszlásával.

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint a 14.17. Tétel. $\square$

14.19. Megjegyzés. Ha például $\xi_1 = 3$, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy a $(0, 1)$ időintervallumban várhatóan milyen időpontokban következett be a $\xi_1 = 3$ által jelzett 3 darab esemény, akkor azt mondhatjuk, hogy a bekövetkezési időpontok együttes eloszlása a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásra vett 3 elemű rendezett minta eloszlásával egyezik meg. Jelölje X_1^*, X_2^*, X_3^* a szóbanforgó rendezett mintát. Ismert, hogy $\mathbb{E} X_i^* = \frac{i}{4}$, $i = 1, 2, 3$. Így a szóbanforgó 3 darab esemény várhatóan az $1/4$, $2/4$ és $3/4$ időpontokban következett be. $\square$

Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogyan jön be a Poisson-folyamatnál a binomiális eloszlás.

14.20. Állítás. Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden $0 < u < t$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_u feltételes eloszlása a $\xi_t = n$ feltételre vonatkozóan n -edrendű, u/t paraméterű binomiális eloszlás. Azaz minden $0 < u < t$ és $k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(\xi_u = k \mid \xi_t = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n}.$$

Bizonyítás. A Poisson-folyamat tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_u = k \mid \xi_t = n) &= \frac{\mathbb{P}(\xi_u = k, \xi_t = n)}{\mathbb{P}(\xi_t = n)} = \frac{\mathbb{P}(\xi_u = k, \xi_t - \xi_u = n - k)}{\mathbb{P}(\xi_t = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\xi_u = k) \mathbb{P}(\xi_t - \xi_u = n - k)}{\mathbb{P}(\xi_t = n)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda(t-u))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-u)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \binom{n}{k} \frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n}.$$

□

14.21. Állítás. (Poisson-folyamatra vonatkozó nagy számok erős törvénye) *Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor*

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi_t(\omega)}{t} = \lambda \right\} \right) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $t > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor ξ_t definíciója miatt $T_{\xi_t} \leq t < T_{\xi_t+1}$. Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\xi_t(\omega) > 0$, úgy

$$\frac{T_{\xi_t(\omega)}(\omega)}{\xi_t(\omega)} \leq \frac{t}{\xi_t(\omega)} < \frac{T_{\xi_t(\omega)+1}(\omega)}{\xi_t(\omega)} = \frac{T_{\xi_t(\omega)+1}(\omega)}{\xi_t(\omega)+1} \frac{\xi_t(\omega)+1}{\xi_t(\omega)}. \quad (14.19)$$

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = +\infty) = 1$. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, \infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória monoton növekvő. Tegyük fel, hogy valamely $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, \infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória korlátos. Ekkor létezik olyan (ω -tól függő) $n_0 \in \mathbb{N}$ és $t_0 \in [0, \infty)$, hogy $\xi_{t_0}(\omega) = n_0$ és $\xi_t(\omega) \leq n_0$ bármilyen $t \in [0, \infty)$ esetén. Így ξ_t definíciója alapján $T_{n_0+1}(\omega) > t$, ha $t \in [0, \infty)$. Felhasználva, hogy

$$\mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N} : T_{n_0+1} > t, \forall t \in [0, \infty)) \leq \mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N} : T_{n_0+1} > t), \quad t \in [0, \infty),$$

és $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N} : T_{n_0+1} > t) = 0$, kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N} : T_{n_0+1} > t, \forall t \in [0, \infty)) = 0$. Ezért $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, \infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória nem korlátos. Felhasználva, hogy egy monoton növekvő, nem korlátos (valós) sorozat $+\infty$ -hez konvergál, kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = +\infty) = 1$. A nagy számok erős törvénye alapján tudjuk, hogy

$$\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k}{n} \rightarrow \mathbb{E} \eta_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{P}\text{-m.m.}$$

Mivel $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = +\infty) = 1$ és ξ_t nemnegatív egész értékű, kapjuk, hogy

$$\frac{T_{\xi_t}}{\xi_t} \rightarrow \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{P}\text{-m.m.} \quad (14.20)$$

Mivel $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = +\infty) = 1$, az is következik, hogy

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \exists t_0 \geq 0 : \xi_t(\omega) > 0, \forall t \geq t_0 \right\} \right) = 1.$$

Így (14.19) és (14.20) alapján $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén

$$\frac{1}{\lambda} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\xi_t(\omega)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\xi_t(\omega)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Ezért $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik a $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\xi_t(\omega)}$ határérték és $\frac{1}{\lambda}$ -val egyenlő. Ebből már következik a bizonyítandó állítás. □

14.22. Példa. (Születésnap probléma és Poisson-folyamat) Valószínűségszámításból ismerjük azt a problémát, hogy legalább hány embert kell elhelyezni egy szobában, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább két embernek ugyanakkor van a születésnapja legalább 0.5 legyen (az éveket és szökőnapokat nem számítva)? Jelölje k az elhelyezendő emberek számát, $k \in \{1, \dots, 365\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{legalább két embernek ugyanakkor van a születésnapja}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{mind a } k \text{ embernek máskor van a születésnapja}) \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{k-1} \frac{365-i}{365} = 1 - \frac{365!}{(365-k)! 365^k}, \end{aligned}$$

mely valószínűség $k = 22$ esetén 0,476 körüli, illetve $k = 23$ esetén 0,507 körüli. Tehát legalább 23 embert kell elhelyezni a szobában.

Tekintsük a következő változatát a születésnap problémának. Feltételezzük, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember születésnapja az év 365 napján egyenletes eloszlású. Az emberek egyesével lépnek be egy szobába, és jelölje K azt, hogy hányadik embernél teljesül először az, hogy a szobában levő emberek közül legalább két embernek ugyanakkor van a születésnapja. Határozzuk meg K várható értékét! A kérdést úgy válaszoljuk meg, hogy tekintjük a feladat egy folytonos idejű változatát (beágyazását). Legyen $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy $\lambda = 1$ paraméterű Poisson-folyamat, és tegyük fel, hogy az emberek ezen Poisson-folyamat szerint (a Poisson-folyamathoz tartozó egymást követő "felújítási" időpontokban) lépnek be a szobába. Minden egyes embert egymástól függetlenül megjelölünk a 365 születésnap egyikével, mind a 365 születésnapot egyenlő eséllyel választva. Ilyen módon az eredeti $\{\xi_t : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatnak 365 darab ritkítását kapjuk, melyek a 14.13. Állítás szerint egymástól független $\frac{1}{365}$ -paraméterű Poisson-folyamatok. Jelölje $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az egyes emberek érkezései között eltelt időtartamokat (a $\{\xi_t : t \geq 0\}$ Poisson-folyamatban), azaz η_n az n -edik és $(n-1)$ -edik ember érkezése között eltelt időtartam, ahol $n \in \mathbb{N}$. A feltételezéseink miatt $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ független, 1-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Jelölje továbbá T az első olyan időpontot, amikor a szobában levő emberek közül legalább két embernek ugyanakkor van a születésnapja. Ekkor

$$T = \sum_{i=1}^K \eta_i,$$

ahol $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ és K függetlenek. Továbbá,

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T | K)) = \mathbb{E}(K \mathbb{E}(\eta_1)) = \mathbb{E}(K),$$

ahol felhasználtuk, hogy η_1 1-paraméterű exponenciális eloszlású, és így várható értéke $\mathbb{E}(\eta_1) = 1$. Tetszőleges $k = 1, \dots, 365$ esetén jelölje Z_k az első olyan időpontot, amikor a második olyan ember belép a szobába, akinek a k -adik napon van a születésnapja ("k-típusú születésnap"). Ekkor $T = \min_{k=1, \dots, 365} Z_k$, Továbbá, Z_k egy $\frac{1}{365}$ -paraméterű Poisson-folyamatban a második

”esemény (felújítás)” időpontja, és ezért a 14.10. Állítás alapján Z_k 2-odrendű, $\frac{1}{365}$ -paraméterű Gamma eloszlású minden $k = 1, \dots, 365$ esetén, azaz Z_k sűrűségfüggvénye

$$f_{Z_k}(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{365}\right)^2 x^{2-1} e^{-\frac{1}{365}x}}{\Gamma(2)} = \frac{x e^{-\frac{x}{365}}}{365^2}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases}$$

és tetszőleges $x \geq 0$ esetén, parciális integrálással,

$$\mathbb{P}(Z_k < x) = \int_0^x \frac{t e^{-\frac{t}{365}}}{365^2} dt = \frac{1}{365^2} \left(\left[-365 t e^{-\frac{t}{365}} \right]_0^x + 365 \int_0^x e^{-\frac{t}{365}} dt \right) = 1 - \frac{(x+365)e^{-\frac{x}{365}}}{365}.$$

A $Z_1, \dots, Z_k$ valószínűségi változók függetlenek is, ugyanis azon $\frac{1}{365}$ -paraméterű Poisson-folyamatok, melyeknél a második ”esemény (felújítás)” időpontjai, függetlenek egymástól (lásd 14.13. Állítás). Így tetszőleges $x \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq x) &= \mathbb{P}\left(\min_{k=1, \dots, 365} Z_k \geq x\right) = \mathbb{P}(Z_1 \geq x, \dots, Z_{365} \geq x) = (\mathbb{P}(Z_1 \geq x))^{365} \\ &= \left(\frac{(x+365)e^{-\frac{x}{365}}}{365}\right)^{365} = \left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365} e^{-x}. \end{aligned}$$

Ezért a 3.7. Tétel (xxii) része alapján

$$\mathbb{E}(K) = \mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T \geq x) dx = \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365} e^{-x} dx,$$

mely integrál értéke közelítőleg 24,6166 (numerikusan számolva). $\square$

14.23. Példa. (Várakozási paradoxon és Poisson-folyamat) Legyen $\{\xi_t: t \geq 0\}$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Tetszőleges $t > 0$ esetén, a t időponttal bezárólag a legutolsó felújítás időpontja T_{ξ_t} , a következő felújítás pedig a T_{ξ_t+1} időpontban fog bekövetkezni. Nyilván $T_{\xi_t} \leq t < T_{\xi_t+1}$. Amennyiben ξ_t -re úgy gondolunk, mint egy buszmegállóban az egymást követő buszok száma a t időponttal bezárólag, akkor rögzített $t > 0$ esetén

- $t - T_{\xi_t}$: a t időpontbeli érkezésünk és az ezelőtt érkezett busz érkezési ideje között eltelt idő,
- $T_{\xi_t+1} - t$: a t időpontbeli érkezésünk után a következő busz érkezéséig eltelt idő,
- $T_{\xi_t+1} - T_{\xi_t}$: a t időpontbeli érkezésünk előtt és után érkező két busz követési ideje.

Mivel $T_{\xi_t+1} - T_{\xi_t} = \eta_{\xi_t+1}$, természetes lehet azt várni, hogy $\mathbb{E}(T_{\xi_t+1} - T_{\xi_t}) = \frac{1}{\lambda}$, azonban kiderül, hogy ez hibás, ugyanis a helyes formula

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t+1} - T_{\xi_t}) = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda},$$

melyet az alábbiakban belátunk. Ezt a meglepő eredményt hívják várakozási paradoxonnak vagy Feller-paradoxonnak.

Meghatározzuk az $\mathbb{E}(T_{\xi_t+1})$ és $\mathbb{E}(T_{\xi_t})$ várható értékeket külön-külön. Ekkor $\mathbb{E}(T_{\xi_t+1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T_{\xi_t+1} | \xi_t))$, és belátjuk, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t+1} | \xi_t = k) = \mathbb{E}(T_{k+1} | \xi_t = k) = t + \frac{1}{\lambda}.$$

Tetszőleges $b > 0$ és $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{k+1} < b, \xi_t = k) &= \mathbb{P}(T_{k+1} < b, T_k \leq t < T_{k+1}) = \mathbb{P}(T_k + \eta_{k+1} < b, T_k \leq t < T_k + \eta_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}(t - T_k < \eta_{k+1} < b - T_k, T_k \leq t), \end{aligned}$$

mely 0-val egyenlő, ha $t \geq b$, és $t < b$ esetén, mivel T_k és η_{k+1} függetlenek, és T_k k -adrendű és λ -paraméterű Gamma-eloszlású (lásd 14.10. Állítás),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{k+1} < b, \xi_t = k) &= \int_0^t \left(\int_{t-s}^{b-s} f_{T_k, \eta_{k+1}}(s, x) dx \right) ds \\ &= \int_0^t \left(\int_{t-s}^{b-s} \frac{\lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda x} dx \right) ds = \int_0^t \frac{\lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s}}{(k-1)!} (e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(b-s)}) ds \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^t s^{k-1} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda b}) ds = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda b}) \int_0^t s^{k-1} ds \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda b}) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda(b-t)}) \\ &= \mathbb{P}(\xi_t = k) \mathbb{P}(\eta_1 < b - t). \end{aligned}$$

Így tetszőleges $b > 0$ és $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén,

$$\mathbb{P}(T_{k+1} < b | \xi_t = k) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(b-t)} & \text{ha } t < b, \\ 0 & \text{ha } t \geq b, \end{cases}$$

és ezért

$$\mathbb{E}(T_{k+1} | \xi_t = k) = \int_t^\infty b(1 - e^{-\lambda(b-t)}) db = \int_0^\infty (\tilde{b} + t)(1 - e^{-\lambda \tilde{b}}) d\tilde{b} = \frac{1}{\lambda} + t.$$

Következésképpen, $\mathbb{E}(T_{\xi_t+1} | \xi_t) = t + \frac{1}{\lambda}$, melyből következik, hogy

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t+1}) = t + \frac{1}{\lambda}. \quad (14.21)$$

Továbbá, $\mathbb{E}(T_{\xi_t}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T_{\xi_t} | \xi_t))$, ahol belátjuk, hogy

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t} | \xi_t = k) = \frac{tk}{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

A $k = 0$ esetben ez triviálisan teljesül, ugyanis $T_0 = 0$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$. A 14.17. Tétel alapján a $\{\xi_t = k\}$ feltétel mellett T_{ξ_t} eloszlása megegyezik k darab,

a $(0, t)$ intervallumon vett egyenletes eloszlású véletlen változó maximumának az eloszlásával, azaz $\max(X_1, \dots, X_k)$ eloszlásával, ahol $X_1, \dots, X_k$ független, a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók. Így $\mathbb{E}(T_{\xi_t} | \xi_t = k) = \mathbb{E}(\max(X_1, \dots, X_k))$, $k \in \mathbb{N}$. Mivel $\max(X_1, \dots, X_k)$ eloszlásfüggvénye $F_{\max(X_1, \dots, X_k)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_{\max(X_1, \dots, X_k)}(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_k) < x) = (\mathbb{P}(X_1 < x))^k = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \left(\frac{x}{t}\right)^k & \text{ha } 0 \leq x \leq t, \\ 1, & \text{ha } x > t, \end{cases}$$

a 3.7. Tétel (xxii) része alapján

$$\mathbb{E}(\max(X_1, \dots, X_k)) = \int_0^\infty (1 - F_{\max(X_1, \dots, X_k)}(x)) dx = \int_0^t \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^k\right) dx = \frac{kt}{k+1}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t} | \xi_t) = \frac{t\xi_t}{\xi_t + 1} = t - \frac{t}{\xi_t + 1},$$

amiből

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t}) = t - t \mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi_t + 1}\right).$$

Itt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi_t + 1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k+1)!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t}, \end{aligned}$$

így

$$\mathbb{E}(T_{\xi_t}) = t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}. \quad (14.22)$$

Következésképpen, (14.21) és (14.22) alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(T_{\xi_{t+1}} - T_{\xi_t}) = \mathbb{E}(T_{\xi_{t+1}}) - \mathbb{E}(T_{\xi_t}) = \frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Látható az is, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T_{\xi_{t+1}} - T_{\xi_t}) = \frac{2}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}(\eta_1^2)}{\mathbb{E}(\eta_1)} > \mathbb{E}(\eta_1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Továbbá,

$$\mathbb{E}(T_{\xi_{t+1}} - t) = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(\eta_1),$$

és

$$\mathbb{E}(t - T_{\xi_t}) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} < \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(\eta_1).$$

□

A következőkben a nemstacionárius Poisson-folyamattal és az összetett Poisson-folyamattal foglalkozunk.

14.24. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ **nemstacionárius (más néven inhomogén) Poisson-folyamat** $\lambda(t)$, $t \geq 0$, **intenzitásfüggvénnyel** (ahol $\lambda(t)$, $t \geq 0$, egy nemnegatív, lokálisan integrálható függvény), ha

- (i) $\xi_0 = 0$ és nemnegatív egész értékű,
- (ii) független növekményű,
- (iii) tetszőleges $t \geq 0$ esetén $\mathbb{P}(\xi_{t+h} - \xi_t \geq 2) = o(h)$ és $\mathbb{P}(\xi_{t+h} - \xi_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ amint $h \rightarrow 0$,
- (iv) a $[0, \infty) \ni t \mapsto \xi_t$ trajektóriák jobbról folytonosak.

(Azon, hogy $\lambda(t)$, $t \geq 0$, lokálisan integrálható azt értjük, hogy $[0, \infty)$ minden véges részintervallumán integrálható függvény.)

Vezessük be az $m(t) := \int_0^t \lambda(s) ds$, $t \geq 0$, jelölést. Mivel $\lambda(t)$, $t \geq 0$, lokálisan integrálható, $m(t) \in [0, \infty)$, $t \geq 0$. Megmutatható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $s, t \geq 0$ esetén

$$\mathbb{P}(\xi_{t+s} - \xi_t = n) = \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(t))}. \quad (14.23)$$

Tehát $\xi_{t+s} - \xi_t$ Poisson eloszlású $m(t+s) - m(t)$ paraméterrel. Speciálisan ξ_t Poisson eloszlású $m(t)$ várható értékkel, ezért az $m(t)$ függvényt a folyamat várható érték függvényének is szokás hívni. Abban a speciális esetben mikor $\lambda(t) \equiv \lambda$ (azaz $\{\xi_t : t \geq 0\}$ egy λ paraméterű Poisson-folyamat), $m(t) = \lambda t$.

14.25. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{X_t : t \geq 0\}$ **sztochasztikus folyamat** λ **paraméterű összetett Poisson-folyamat**, ha előállítható

$$X_t = \sum_{i=1}^{\xi_t} Y_i, \quad t \geq 0 \quad (14.24)$$

alakban, ahol $\{\xi_t : t \geq 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek függetlenek a $\{\xi_t : t \geq 0\}$ Poisson-folyamattól is.

14.26. Megjegyzés. (i) Az $Y_n \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$ választással $X_t = \xi_t$, $t \geq 0$, így visszkapjuk a szokásos Poisson-folyamatot.

- (ii) Tegyük fel, hogy egy sporteseményre buszok szállítják a nézőket. Jelölje ξ_t a t időpontig induló buszok számát és tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ Poisson-folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy az egyes buszok által szállított utasok számát leíró valószínűségi változók egymástól

függetlenek és azonos eloszlásúak. Jelölje X_t a t időpontig a rendezvényre megérkezett nézők számát. Ekkor $\{X_t : t \geq 0\}$ összetett Poisson-folyamat, a (14.24) reprezentációban Y_n jelenti az n -edik busszal érkező utasok számát.

□

15. Diszkrét idejű martingálok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér. Az $1, 2, \dots$ pozitív egészeket *időpontoknak* nevezzük. Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n$ azoknak az eseményeknek a halmazát, melyekről az n időpontban már tudjuk, hogy bekövetkeztek-e, vagy sem. Ekkor $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növekvő rész- σ -algebra sereg $\mathcal{A}$ -ban, azaz $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{A}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

15.1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra.

Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat **filtráció (szűrés)**, ha $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$.

Azt mondjuk, hogy véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata **adaptált** az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén X_n $\mathcal{F}_n$ -mérhető, azaz $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$.

Véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata akkor és csak akkor adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ időpontban a rendelkezésre álló információk alapján tudjuk X_n értékét. Nyilván véletlen változók tetszőleges $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata adaptált a $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ **természetes filtrációhoz**, ahol $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, és ez a legszűkebb szűrés, melyhez az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat adaptált.

15.2. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, mely adaptált valamely $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtrációhoz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Azt mondjuk, hogy az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat

(i) **martingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ $\mathbb{P}$ -m.m.,

(ii) **szubmartingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$ $\mathbb{P}$ -m.m.,

(iii) **szupermartingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$ $\mathbb{P}$ -m.m.

Azt mondjuk, hogy a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál, ha az $(X_n, \mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál.

Ha X_n egy játékos előjeles vagyona az n időpontban, akkor martingál esetén a játék igazságos, szubmartingál esetén a játék előnyös, szupermartingál esetén pedig hátrányos a játékos számára.

Nyilván

(i) martingál esetén $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = \dots$;

(ii) szubmartingál esetén $\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2) \leq \mathbb{E}(X_3) \leq \dots$;

(iii) szupermartingál esetén $\mathbb{E}(X_1) \geq \mathbb{E}(X_2) \geq \mathbb{E}(X_3) \geq \dots$.

Ha az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál, akkor az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál. Valóban, mivel X_n $\mathcal{F}_n^X$ -mérhető, azt kell csak ellenőriznünk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^X) = X_n$ $\mathbb{P}$ -m.m. Mivel $\mathcal{F}_n^X \subset \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, a toronyszabály (8.5. Tétel (vii) rész) alapján

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_n^X) = X_n \quad \mathbb{P}\text{-m.m.}$$

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szupermartingál.

15.3. Tétel. *Ha az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat*

- (i) *martingál, akkor minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n$;*
- (ii) *szubmartingál, akkor minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$;*
- (iii) *szupermartingál, akkor minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazoljuk az (i) részt. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $k=1$ esetén teljesül az állítás a martingál definíciója miatt. Tegyük fel, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $1, \dots, k$ esetén teljesül az állítás, és mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $k+1$ esetén is teljesül. Felhasználva, hogy $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, a toronyszabály és az indukciós feltevés alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+k+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+k+1} | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél azt használtuk, hogy X_n mérhető $\mathcal{F}_n$ -re nézve a martingál definíciója miatt.

A (ii) és (iii) részek hasonlóan igazolhatóak. □

15.4. Példa. Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független, integrálható véletlen változók, és legyen $X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor belátjuk, hogy az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat

- (i) martingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) = 0$;
- (ii) szubmartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) \geq 0$;
- (iii) szupermartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) \leq 0$.

Nyilván, $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{F}_n^Y$, mert

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Az X_n véletlen változó $\mathcal{F}_n^X$ -mérhető, és

$$\mathbb{E}(|X_n|) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|Y_i|) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, felhasználva, hogy $\mathcal{F}_n^X = \mathcal{F}_n^Y$ és Y_{n+1} független $\mathcal{F}_n^Y$ -től, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^X) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_n^X) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_n^Y) = Y_1 + \dots + Y_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}),$$

melyből következik az állítás. $\square$

15.5. Példa. Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független, integrálható pozitív véletlen változók, és legyen $X_n := \prod_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat

- (i) martingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) = 1$;
- (ii) szubmartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) \geq 1$;
- (iii) szupermartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) \leq 1$.

Nyilván, $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{F}_n^Y$, mert ha $(Y_1, \dots, Y_n)$ adott, akkor $(X_1, \dots, X_n)$ kifejezhető a definíció alapján, illetve ha $(X_1, \dots, X_n)$ ismert, akkor

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = \frac{X_2}{X_1}, \quad Y_n = \frac{X_n}{X_{n-1}},$$

melyek jól definiáltak, mert Y_i , $i = 1, \dots, n$, pozitívak, és így X_i , $i = 1, \dots, n$, is pozitívak. Az X_n véletlen változó $\mathcal{F}_n^X$ -mérhető, és

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, felhasználva, hogy $\mathcal{F}_n^X = \mathcal{F}_n^Y$ és Y_{n+1} független $\mathcal{F}_n^Y$ -től, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^X) &= \mathbb{E}(Y_{n+1} Y_n \cdots Y_1 | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{E}(Y_{n+1} X_n | \mathcal{F}_n^X) = X_n \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n^X) \\ &= X_n \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n^Y) = X_n \mathbb{E}(Y_{n+1}), \end{aligned}$$

melyből következik az állítás. $\square$

15.6. Példa. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtráció, Y olyan véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, és legyen $X_n := \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál.

Az X_n véletlen változó $\mathcal{F}_n$ -mérhető a feltételes várható érték definíciója miatt. Továbbá,

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Y| | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(|Y|) < \infty,$$

és

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n) = X_n.$$

□

15.7. Állítás. Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$, akkor az $X_1, X_2 - X_1, X_3 - X_2, \dots$ véletlen változók páronként korrelálatlanok.

Bizonyítás. Nyilván $\mathbb{E}(X_k - X_{k-1}) = 0$ minden $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ esetén, így tetszőleges $2 \leq j < k$ esetén

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_j - X_{j-1}, X_k - X_{k-1}) &= \mathbb{E}[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1})] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}]\right] \\ &= \mathbb{E}[(X_j - X_{j-1}) \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})] = 0, \end{aligned}$$

hiszen egyrészt $j \leq k-1$ miatt $\sigma(X_j - X_{j-1}) \subset \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-1}$, másrészt $\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$. A $\text{Cov}(X_1, X_k - X_{k-1})$, $k \geq 2$, kovarianciák hasonlóan kezelhetők. □

Tehát a négyzetesen integrálható martingálok előállnak páronként korrelálatlan valószínűségi változók részletösszeg-sorozataként, ugyanis,

$$X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \dots + (X_n - X_{n-1}).$$

15.8. Tétel. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ (nem feltétlenül korlátos) intervallum, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, és $X_1, X_2, \dots$ olyan véletlen változók, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $X_k \in I$ m.b., és $\mathbb{E}(|g(X_k)|) < \infty$. Ekkor $(g(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(i) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál és g monoton növekvő;

(ii) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál.

Bizonyítás. A feltételek miatt $\mathbb{E}(|g(X_k)|) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Továbbá, mivel $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, így Borel-mérhető is, melyből következik, hogy $g(X_n)$ mérhető $\mathcal{F}_n$ -re nézve. Legyen $j \leq k$. Ekkor (i) esetén $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingálsága miatt $X_j \leq \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_j)$, így g monotonitása miatt $g(X_j) \leq g(\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_j))$. Továbbá (ii) esetén $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingálsága miatt $X_j = \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_j)$, így $g(X_j) = g(\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_j))$. Mindkét esetben g konvexsége miatt a feltételes Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$g(X_j) \leq g(\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_j)) \leq \mathbb{E}(g(X_k) | \mathcal{F}_j),$$

tehát $(g(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál. □

Például ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál, akkor $(|X_n|, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál.

15.9. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, mely adaptált valamely $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtrációhoz.

Azt mondjuk, hogy a $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat

- **növekvő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Z_n \leq Z_{n+1}$ m.b.,
- **előrejelezhető (prediktálható)**, ha $Z_1 = 0$ m.b., és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén Z_{n+1} $\mathcal{F}_n$ -mérhető.

Nyilván, ha $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ növekvő, akkor $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots$ teljesül 1 valószínűséggel, hiszen megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény. Ha $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ előrejelezhető, akkor a Z_n értékét már az $n-1$ időpontban tudjuk.

15.10. Tétel. (Doob-felbontás) Tetszőleges $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál esetén léteznek olyan $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változókból álló sorozatok, hogy

- (i) $X_n = Y_n + Z_n$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- (ii) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál,
- (iii) $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ növekvő, előrejelezhető sorozat. (Ilyenkor $Z_n \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.m. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén.)

Ilyen tulajdonságokkal rendelkező $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok $\mathbb{P}$ -m.b. egyértelműen meghatározottak.

Bizonyítás. Tekintsük X_n -nek az alábbi felbontását:

$$X_n = X_1 + \sum_{k=2}^n (X_k - X_{k-1}) = X_1 + \sum_{k=2}^n \left((X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1})) + (\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}) \right),$$

mely motiválja az alábbi Y_n és Z_n véletlen változók bevezetését. Legyen $Z_1 := 0$, $Y_1 := X_1$, és $n \geq 2$ esetén

$$Y_n := X_1 + \sum_{k=2}^n [X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1})], \quad Z_n := \sum_{k=2}^n [\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}].$$

Ekkor nyilván minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$, Y_n mérhető $\mathcal{F}_n$ -re nézve, és

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0,$$

melyből következik, hogy $\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_n) = Y_n$, tehát $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Z_n \geq 0$, mert minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1} \geq 0$, hiszen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál. Az indoklásból az is következik, hogy $Z_n \leq Z_{n+1}$ $\mathbb{P}$ -m.m. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}$ $\mathcal{F}_{k-1}$ -mérhető, ezért minden

$n \in \mathbb{N}$ esetén Z_{n+1} $\mathcal{F}_n$ -mérhető, tehát $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ növekvő, előrejelezhető sorozat. Végül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$Y_n + Z_n = X_1 + \sum_{k=2}^n (X_k - X_{k-1}) = X_n,$$

tehát az $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok rendelkeznek a megfelelő tulajdonságokkal.

A $\mathbb{P}$ -m.b. egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy az $(\tilde{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokra is teljesülnek az (i)–(iii) tulajdonságok ugyanazzal az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációval. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{n+1} - \tilde{Z}_n &= (X_{n+1} - \tilde{Y}_{n+1}) - (X_n - \tilde{Y}_n) = (Y_{n+1} + Z_{n+1} - \tilde{Y}_{n+1}) - (Y_n + Z_n - \tilde{Y}_n) \\ &= (Z_{n+1} - Z_n) + (Y_{n+1} - Y_n) - (\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $Z_{n+1}, Z_n, \tilde{Z}_{n+1}, \tilde{Z}_n$ mérhetőek $\mathcal{F}_n$ -re nézve a prediktálhatóság miatt, véve az előző az egyenletnek a feltételes várható értékét az $\mathcal{F}_n$ σ -algebrára vonatkozóan, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{Z}_{n+1} - \tilde{Z}_n = Z_{n+1} - Z_n.$$

Mivel $Z_1 = \tilde{Z}_1 = 0$, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tilde{Z}_n = Z_n$, ezért $\tilde{Y}_n = X_n - \tilde{Z}_n = X_n - Z_n = Y_n$. $\square$

A Doob-felbontásban szereplő $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra nyilván teljesül $\mathbb{E}(|Z_n|) < \infty$, hiszen $|Z_n| \leq |X_n| + |Y_n|$, melyből következik, hogy $\mathbb{E}(|Z_n|) \leq \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$, hiszen a szubmartingálság miatt $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ és a martingálság miatt $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$.

Ha az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat növekvő és adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rész- σ -algebra sereghez és $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \geq 0$ (hiszen $X_{n+1} - X_n \geq 0$) miatt $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_n) = X_n$, melyből következik, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, de nem feltétlenül előrejelezhető, ezért nem feltétlenül $X_n = 0 + X_n$ a Doob-felbontása!

15.11. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtráció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ véletlen változó (opcionális, vagyis választható, azaz megengedett) **megállási időpont** az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Vagyis tetszőleges n időpontban a rendelkezésre álló információk alapján el lehet dönteni, hogy már elérkezett-e az α véletlen időpont, vagy sem.

15.12. Példa. (i) Ha véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata adaptált egy $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, akkor tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazba való első megérkezési időpont:

$$\alpha_B(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in B\} = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in B\}$$

(ahol $\inf \emptyset := \infty$) megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hiszen tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \alpha_B(\omega) \leq n\} &= \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : \alpha_B(\omega) > n\} \\ &= \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \notin B, \dots, X_n(\omega) \notin B\} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_n^X$, $n \in \mathbb{N}$, választás mindig lehetséges.

(ii) Ha $c \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ és $\alpha(\omega) := c$, $\omega \in \Omega$, akkor α megállási időpont tetszőleges $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leq n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{ha } n < c, \\ \Omega & \text{ha } n \geq c. \end{cases}$$

Tehát minden determinisztikus időpont egyúttal megállási időpont is. $\square$

15.13. Definíció. Ha α megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, akkor az α -ig bekövetkező események (vagyis azok az események, melyekről az α időpontban meg tudjuk állapítani, hogy bekövetkeztek-e vagy sem):

$$\mathcal{F}_\alpha := \{A \in \mathcal{A} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } A \cap \{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

15.14. Állítás. Ha α megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, akkor az $\mathcal{F}_\alpha$ halmaz egy σ -algebra. Speciálisan, ha $N \in \mathbb{N}$ és $\alpha(\omega) := N$, $\omega \in \Omega$, akkor $\mathcal{F}_\alpha$ valóban megegyezik $\mathcal{F}_N$ -nel.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\Omega \in \mathcal{F}_\alpha$. Mivel $\Omega \in \mathcal{A}$ és α megállási időpont, kapjuk, hogy

$$\Omega \cap \{\alpha \leq n\} = \{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Legyen most $A \in \mathcal{F}_\alpha$. Belátjuk, hogy $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_\alpha$. Ekkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ és felhasználva, hogy

$$\{\alpha \leq n\} = (A \cap \{\alpha \leq n\}) \cup ((\Omega \setminus A) \cap \{\alpha \leq n\}),$$

kapjuk, hogy

$$(\Omega \setminus A) \cap \{\alpha \leq n\} = \{\alpha \leq n\} \setminus (A \cap \{\alpha \leq n\}) \in \mathcal{F}_n,$$

hiszen $\{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ (mert α megállási időpont), $A \cap \{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ (mert $A \in \mathcal{F}_\alpha$), és az $\mathcal{F}_n$ σ -algebra zárt a különbségképzésre.

Legyenek most $A_i \in \mathcal{F}_\alpha$, $i \in \mathbb{N}$. Ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\alpha$, hiszen $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ és

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cap \{\alpha \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{\alpha \leq n\}) \in \mathcal{F}_n,$$

ugyanis $\mathcal{F}_\alpha$ definíciója miatt $A_i \cap \{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $i \in \mathbb{N}$, és az $\mathcal{F}_n$ σ -algebra zárt a megszámlálható unióképzésre.

Legyen a továbbiakban $N \in \mathbb{N}$ és $\alpha(\omega) := N$, $\omega \in \Omega$. Ekkor

$$A \cap \{\alpha \leq n\} = \begin{cases} A \cap \emptyset = \emptyset & \text{ha } n < N, \\ A \cap \Omega = A & \text{ha } n \geq N, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

és így

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha &= \{A \in \mathcal{A} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } A \cap \{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n\} \\ &= \{A \in \mathcal{A} : A \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq N\} = \mathcal{F}_N, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}_{N+j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

15.15. Állítás. Ha véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz és α megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hogy $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$, akkor az $X_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(X_\alpha)(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \mathbb{1}_{\{\alpha=n\}}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

leképezés mérhető, tehát véletlen változó, sőt $\mathcal{F}_\alpha$ -mérhető is, azaz $\sigma(X_\alpha) \subset \mathcal{F}_\alpha$.

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{X_\alpha < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_\alpha < x, \alpha = n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n < x, \alpha = n\} \in \mathcal{A},$$

hiszen $\{X_n < x, \alpha = n\} = \{X_n < x\} \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mert X_n $\mathcal{F}_n$ -mérhető (adaptáltság) és α megállási időpont. Továbbá, tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{X_\alpha < x\} \cap \{\alpha \leq N\} = \bigcup_{n=1}^N \{X_n < x\} \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_N,$$

hiszen $\{X_n < x\} \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_N$, $n = 1, \dots, N$. □

Ha α korlátos, azaz $\alpha \leq m$ valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén, és $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$, hiszen $|X_\alpha| \leq \max\{|X_1|, \dots, |X_m|\}$.

15.16. Példa. Legyenek Y_k , $k \in \mathbb{N}$ független véletlen változók, $\mathbb{P}(Y_k = 2^k) = \mathbb{P}(Y_k = -2^k) = \frac{1}{2}$, $X_n := \sum_{j=1}^n Y_j$. Ekkor $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál, $\mathcal{F}_n^X = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, és

$$\alpha(\omega) := \begin{cases} \min\{n : X_n(\omega) > 0\} & \text{ha } \exists n \in \mathbb{N} \text{ melyre } X_n(\omega) > 0, \\ \infty & \text{ha } \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } X_n(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve (alkalmazhatjuk a 15.12. Példa (i) részét $B := (0, \infty)$ választással). Továbbá, α 1 valószínűséggel véges: $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$, de nem korlátos, hiszen

$$\mathbb{P}(\alpha = \infty) = \mathbb{P}(X_n \leq 0, n \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}(Y_k = -2^k, k \in \mathbb{N}) \leq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(Y_k = -2^k) = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Továbbá $X_\alpha = 2$ m.b. Ugyan 1 és α olyan megállási pillanatok, hogy $1 \leq \alpha$ m.b., viszont mégsem teljesül, hogy $\mathbb{E}(X_\alpha | \mathcal{F}_1) = X_1$, mert a bal oldal 2-vel egyenlő 1 valószínűséggel, a jobb oldal pedig $2 \cdot \frac{1}{2}$ valószínűséggel és $-2 \cdot \frac{1}{2}$ valószínűséggel. Ezért a következő tétel nem feltétlenül teljesül nem korlátos megállási időpontokra. □

15.17. Tétel. (Opcionális megállási tétel) Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) martingál, (ii) szubmartingál, (iii) szupermartingál,

és legyenek α és β olyan megállási időpontok $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -re nézve, hogy $\alpha \leq \beta$, $\mathbb{P}(\beta < \infty) = 1$, $\mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$, $\mathbb{E}(|X_\beta|) < \infty$, és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{\beta > n\}}) = 0,$$

mely utóbbi feltétel automatikusan teljesül, ha β korlátos. Ekkor $(X_\alpha, X_\beta; \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)$

(i) martingál, (ii) szubmartingál, (iii) supermartingál,

és így, speciálisan:

$$(i) \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) = X_\alpha, \quad (ii) \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) \geq X_\alpha, \quad (iii) \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) \leq X_\alpha.$$

Bizonyítás. Az állítást elegendő szubmartingál esetén belátni (hiszen egy szubmartingál (-1) -szerese supermartingál). Elegendő azt belátni, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\alpha$ esetén $\mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_A) \geq \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_A)$. Ehhez pedig elegendő azt megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\}}) \geq \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\}})$, hiszen $n \in \mathbb{N}$ -re szummázva és figyelembe véve azt is, hogy $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$, megkapjuk az előző egyenlőtlenséget. Nyilván $A \cap \{\alpha = n\} = A \cap \{\alpha \leq n\} \cap (\Omega \setminus \{\alpha \leq n-1\}) \in \mathcal{F}_n$. Így, felhasználva azt is, hogy $\alpha \leq \beta$, és, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\}}) &= \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\}}) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta = n\}}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta > n\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta = n\}}) + \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta > n\}}]. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta = n\} \in \mathcal{F}_n$, hiszen $A \in \mathcal{F}_\alpha$ miatt $A \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$ és, mivel β megállási időpont $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -re, $\{\beta > n\} = \Omega \setminus \{\beta \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Így a feltételes várható érték definíciója alapján

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta > n\}}] = \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta \geq n+1\}}).$$

Ezért, felhasználva újra, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál és azt, hogy

$$A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta \geq n+2\} = A \cap \{\alpha = n\} \cap (\Omega \setminus \{\beta \leq n+1\}) \in \mathcal{F}_{n+1},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\}}) &= \mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta = n\}}) + \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta \geq n+1\}}) \\ &= \mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{n \leq \beta \leq n+1\}}) + \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta \geq n+2\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{n \leq \beta \leq n+1\}}) + \mathbb{E}(X_{n+2} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta \geq n+2\}}) \\ &\leq \dots \leq \mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{n \leq \beta \leq m\}}) + \mathbb{E}(X_{m+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta > m\}}) \end{aligned}$$

tetszőleges $m \geq n$ esetén, azaz

$$\mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{n \leq \beta \leq m\}}) \geq \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\}}) - \mathbb{E}(X_{m+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha = n\} \cap \{\beta > m\}}).$$

Ebból $m \rightarrow \infty$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}}) &\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} [\mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=k\}}) - \mathbb{E}(X_{m+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\} \cap \{\beta>m\}})] \\
&= \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}}) - \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{m+1} \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\} \cap \{\beta>m\}}) \\
&\geq \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}}) - \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\} \cap \{\beta>m\}}) \\
&\geq \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}}) - \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta>m\}}) = \mathbb{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A \cap \{\alpha=n\}}),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőséget a következőképpen láthatjuk be. A várható érték additivitása miatt

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta>m\}}) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \left[\mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta>m+1\}}) + \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta=m+1\}}) \right],$$

ahol a dominált konvergencia tétel alapján

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta=m+1\}}) = 0,$$

hiszen tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |X_{m+1}(\omega)| \mathbb{1}_{\{\beta(\omega)=m+1\}} = 0,$$

és $|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta=m+1\}} \leq |X_\beta|$, ahol $\mathbb{E}(|X_\beta|) < \infty$. Így

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta>m\}}) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_{m+1}| \mathbb{1}_{\{\beta>m+1\}}) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőség a feltétel miatt adódik. $\square$

15.18. Megjegyzés. Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál és α olyan megállási időpont $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -re nézve, hogy $\alpha \leq N$ valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén, akkor tekintsük a $\beta(\omega) := N$, $\omega \in \Omega$ megállási időpontot. Ekkor a tétel alapján $X_\alpha = \mathbb{E}(X_N | \mathcal{F}_\alpha)$, ezért $\mathbb{E}(X_\alpha) = \mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_1)$. Tehát egy igazságos játék esetén a játékos nem javíthatja (de nem is ronthatja!) a várható nyeresményét (megengedett, azaz választható) véletlen megállással (amely tehát csak a megállási időpontig felhalmozódó információ alapján), ha a megállási idő korlátos. Például ha a játékos abban az első időpontban akar megállni, amikor nyeresébe került vagy letelik az előre rögzített időtartam, akkor lehet, hogy kicsi annak a valószínűsége, hogy veszítsen, de a veszteség esetén fellépő (feltételes) várható veszteség éppen kompenzálja (kiegyenlíti) a nyereség esetén keletkező (feltételes) várható nyeresményt.

15.19. Tétel. (Wald-azonosságok) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, és $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. Legyen τ olyan megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hogy $\mathbb{E}(\tau) < \infty$.

(i) Ekkor

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_\tau) = \mathbb{E}(\tau) \mathbb{E}(X_1).$$

(ii) Ha még az is teljesül, hogy $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, akkor

$$\mathbb{E} \left(((X_1 + \cdots + X_\tau) - \tau \mathbb{E}(X_1))^2 \right) = \mathbb{E}(\tau) \operatorname{Var}(X_1).$$

Bizonyítás. Az (i) részt már beláttuk, lásd 3.12. Állítás (ii) része.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(((X_1 + \cdots + X_{\tau \wedge n}) - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \right)^2 \right) + \mathbb{E} \left((X_n - \mathbb{E}(X_n))^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \right) \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left((X_n - \mathbb{E}(X_n)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \right). \end{aligned}$$

Mivel $\{\tau \geq i\} \in \mathcal{F}_{i-1}^X$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}$$

mérhető az $\mathcal{F}_{n-1}^X$ σ -algebrára nézve és független $(X_n - \mathbb{E}(X_n))$ -től, és ezért

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left((X_n - \mathbb{E}(X_n)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \right) \\ &= \mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(X_n)) \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \right) \\ &= 0 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Így az $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, és $S_0 := 0$, jelölést használva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left((S_{\tau \wedge n} - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))^2 \right) - \mathbb{E} \left((S_{\tau \wedge (n-1)} - (\tau \wedge (n-1)) \mathbb{E}(X_1))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left((X_n - \mathbb{E}(X_n))^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \right) = \operatorname{Var}(X_1) \mathbb{P}(\tau \geq n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Összeadva ezen egyenlőségeket 1-től n -ig, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left((S_{\tau \wedge n} - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))^2 \right) = \operatorname{Var}(X_1) \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\tau \geq j), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért a 3.7. Tétel (xxii) része alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left((S_{\tau \wedge n} - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))^2 \right) = \operatorname{Var}(X_1) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq j) = \operatorname{Var}(X_1) \mathbb{E}(\tau) < \infty.$$

Hasonló módon adódik, hogy ha $n > m$, akkor

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((S_{\tau \wedge n} - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))^2) - \mathbb{E}((S_{\tau \wedge m} - (\tau \wedge m) \mathbb{E}(X_1))^2) \\
&= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=m+1}^n (X_j - \mathbb{E}(X_j)) \mathbb{1}_{\{\tau \geq j\}} \right)^2 \right) = \text{Var}(X_1) \sum_{j=m+1}^n \mathbb{P}(\tau \geq j) \\
&= \text{Var}(X_1) \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\tau \geq j) - \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(\tau \geq j) \right) \\
&\rightarrow \text{Var}(X_1) (\mathbb{E}(\tau) - \mathbb{E}(\tau)) = 0 \quad \text{ha } m \rightarrow \infty \text{ (és így } n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Mivel $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ teljes, kapjuk, hogy $(S_{\tau \wedge n} - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergál L^2 -ben egy S -sel jelölt véletlen változóhoz és

$$\mathbb{E}((S_{\tau \wedge n} - (\tau \wedge n) \mathbb{E}(X_1))^2) \rightarrow \mathbb{E}(S^2) = \text{Var}(X_1) \mathbb{E}(\tau) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Az maradt csak hátra, hogy belássuk, hogy $S = S_\tau - \tau \mathbb{E}(X_1)$ $\mathbb{P}$ -m.m. Ez abból következik, hogy létezik olyan $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $n_k \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$, $S_{\tau \wedge n_k} \rightarrow S_\tau$, ha $k \rightarrow \infty$ $\mathbb{P}$ -m.m. és $\tau \wedge n_k \rightarrow \tau$, ha $k \rightarrow \infty$ $\mathbb{P}$ -m.m. (hiszen $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$). $\square$

15.20. Tétel. (Doob maximál-egyenlőtlensége) Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\}} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(X_n^+).$$

Bizonyítás. A 15.12. Példa (i) része alapján

$$\alpha_\varepsilon := \inf \{j \in \mathbb{N} : X_j \geq \varepsilon\}$$

megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve és az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve is. Így, felhasználva azt is, hogy

$$\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\} = \{\alpha_\varepsilon \leq n\},$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\}} \right) = \mathbb{E} (X_n \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon \leq n\}}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} (X_n \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}}).$$

Mivel $\{\alpha_\varepsilon = k\} \in \mathcal{F}_k$, ezért $\mathbb{E} (X_n \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}}) = \mathbb{E} (\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}})$. A szubmartingálság miatt $\mathbb{E} (\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}}) \geq \mathbb{E} (X_k \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}})$, ha $n \geq k$. Mivel $\{\alpha_\varepsilon = k\} \subset \{X_k \geq \varepsilon\}$, így $\mathbb{E} (X_k \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}}) \geq \varepsilon \mathbb{E} (\mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}}) = \varepsilon \mathbb{P}(\alpha_\varepsilon = k)$, tehát végülis

$$\mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\}} \right) \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon \mathbb{P}(\alpha_\varepsilon = k) = \varepsilon \mathbb{P}(\alpha_\varepsilon \leq n) = \varepsilon \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right),$$

amit átrendezve kapjuk az első egyenlőtlenséget. A második abból jön ki, hogy

$$\mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\}} \right) \leq \mathbb{E} \left(X_n^+ \mathbb{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\}} \right) \leq \mathbb{E}(X_n^+).$$

□

Az alábbi következményben arra mutatunk rá, hogy a Doob maximál-egyenlőtlenség speciális esete a Kolmogorov maximál-egyenlőtlenség (lásd 10.3. Tétel).

15.21. Következmény. (Kolmogorov maximál-egyenlőtlensége) *Ha $X_1, \dots, X_n$ független véletlen változók és $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$ minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $S_k := \sum_{i=1}^k (X_i - \mathbb{E}(X_i))$, $k = 1, \dots, n$. A 15.4. Példa alapján S_k , $k = 1, \dots, n$ martingál. A 15.8. Tétel (ii) része alapján S_k^2 , $k = 1, \dots, n$ szubmartingál. Így a Doob maximál-egyenlőtlenség szerint (lásd, 15.20. Tétel)

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} (S_k - \mathbb{E}(S_k))^2 \geq \varepsilon^2 \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2) = \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

□

A Doob maximál-egyenlőtlenség és a monoton konvergenciatétel alapján adódik az alábbi következmény.

15.22. Következmény. *Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(X_n^+).$$

15.23. Lemma. *Legyenek X és Y nemnegatív véletlen változók, hogy*

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}), \quad \varepsilon > 0.$$

Ekkor tetszőleges $p > 1$ esetén

$$\mathbb{E}(X^p) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(Y^p).$$

Bizonyítás. A 3.10. Következmény (i) része alapján

$$\mathbb{E}(X^p) = \int_0^\infty p x^{p-1} (1 - F_X(x)) dx,$$

ahol F_X az X eloszlásfüggvényét jelöli. Így a feltétel miatt, a Tonelli tételt is használva adódik, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^p) &\leq \int_0^\infty px^{p-1} \frac{1}{x} \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}) dx = \int_0^\infty \int_\Omega px^{p-2} Y(\omega) \mathbb{1}_{\{X(\omega) \geq x\}} \mathbb{P}(d\omega) dx \\ &= \int_\Omega Y(\omega) \int_0^\infty px^{p-2} \mathbb{1}_{\{X(\omega) \geq x\}} dx \mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega Y(\omega) \int_0^{X(\omega)} px^{p-2} dx \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega Y(\omega) \frac{p}{p-1} (X(\omega))^{p-1} \mathbb{P}(d\omega) = \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(Y X^{p-1}).\end{aligned}$$

Legyen $q \in (1, \infty)$ olyan, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, azaz $q = \frac{p}{p-1}$. A Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{E}(Y X^{p-1}) \leq (\mathbb{E}(Y^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}((X^{p-1})^q))^{\frac{1}{q}} = (\mathbb{E}(Y^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(X^p))^{\frac{p-1}{p}}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}(X^p) \leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}(Y^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(X^p))^{1-\frac{1}{p}},$$

amiből következik, hogy

$$(\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}(Y^p))^{\frac{1}{p}},$$

azaz

$$\mathbb{E}(X^p) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(Y^p).$$

□

15.24. Tétel. (L^p maximál egyenlőtlenség) Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy szubmartingál és $p \in (1, \infty)$. Ekkor

(i) tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(X_n^p).$$

(ii)

$$\mathbb{E} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^p).$$

Bizonyítás. (i). A Doob maximál-egyenlőtlenségből (15.20. Tétel), a 15.23. Lemma segítségével adódik felhasználva azt is, hogy $\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k^p \right) = \mathbb{E} \left((\max_{1 \leq k \leq n} X_k)^p \right)$.

(ii). Az (i) részből a monoton konvergencia tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n^p \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k^p \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(X_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^p).$$

□

15.25. Definíció. Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Legyen

$$\begin{aligned}\tau_0 &:= 0, \\ \tau_1 &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \leq a\}, \\ \tau_2 &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_1, X_n \geq b\}, \\ &\vdots \\ \tau_{2m-1} &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_{2m-2}, X_n \leq a\}, \\ \tau_{2m} &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_{2m-1}, X_n \geq b\}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

ahol $\inf \emptyset := \infty$. Legyen $N \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $X_1, \dots, X_N$ sorozat **felmetszésein** száma az $[a, b]$ intervallumon

$$U_N^X(a, b) := \sup\{m \in \mathbb{Z}_+ : \tau_{2m} \leq N\}.$$

Mivel $\tau_0 = 0 \leq N$, kapjuk, hogy $\{m \in \mathbb{Z}_+ : \tau_{2m} \leq N\} \neq \emptyset$. Továbbá, a definíció folytán $X_{\tau_{2m-1}} \leq a$ és $X_{\tau_{2m}} \geq b$, $m \in \mathbb{N}$, és a $[\tau_{2m-1}, \tau_{2m}]$ időintervallum alatt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyszer "átmetszi" az $[a, b]$ intervallumot.

15.26. Lemma. (Doob felmetszési lemmája) Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}[U_N^X(a, b)] \leq \frac{\mathbb{E}[(X_N - a)^+]}{b - a} \leq \frac{\mathbb{E}(X_N^+) + |a|}{b - a}.$$

Bizonyítás. A második egyenlőtlenség annak a következménye, hogy $(X_N - a)^+ \leq X_N^+ + |a|$.

Mivel az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x - a)^+ \in \mathbb{R}$ függvény konvex és monoton növekvő, a 15.8. Tétel (i) része alapján kapjuk, hogy $((X_n - a)^+, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is szubmartingál, ezért az első egyenlőtlenséget elegendő nemnegatív szubmartingál és $a = 0$ esetén belátni, mert az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál éppen annyszor metszi át felfelé az $[a, b]$ intervallumot, ahányszor az $(X_n - a, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, illetve az $((X_n - a)^+, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál metszi át felfelé a $[0, b - a]$ intervallumot (hiszen, hogy ha 0-nál kisebb vagy egyenlő, akkor nem számít, hogy mennyivel).

Legyen tehát $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemnegatív szubmartingál és $a = 0$. Ekkor azt kell belátni, hogy

$$\mathbb{E}[U_N^X(0, b)] \leq \frac{\mathbb{E}(X_N)}{b}.$$

Legyen $X_0 := 0$, $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \emptyset\}$, és minden $i \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } \exists m \in \mathbb{N}, \text{ melyre } i \in (\tau_{2m-1}, \tau_{2m}], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor

$$bU_N^X(0, b) \leq \sum_{i=1}^N (X_i - X_{i-1})\varphi_i,$$

hiszen minden egyes felmetszés hozzájárulása legalább b , és az utolsó esetlegesen nem teljes felmetszés hozzájárulása is nemnegatív (hiszen nemnegatív szubmartingált tekintünk).

Mivel a $\tau_1, \tau_2, \dots$ megállási időpontok az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, így

$$\{\varphi_i = 1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\tau_{2m-1} < i \leq \tau_{2m}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} [\{\tau_{2m-1} < i\} \setminus \{\tau_{2m} < i\}] \in \mathcal{F}_{i-1}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} b \mathbb{E}[U_N^X(0, b)] &\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})\varphi_i] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})\mathbb{1}_{\{\varphi_i=1\}}] \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_i - X_{i-1} \mid \mathcal{F}_{i-1})\mathbb{1}_{\{\varphi_i=1\}}] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\{\mathbb{E}(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}\}\mathbb{1}_{\{\varphi_i=1\}}] \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}] = \sum_{i=1}^N [\mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(X_{i-1})] = \mathbb{E}(X_N), \end{aligned}$$

hiszen a szubmartingálság miatt $\mathbb{E}(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1} \geq 0$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén (az $i=1$ esetben ez az egyenlőtlenség azért teljesül, mert $X_1 \geq 0$, amiből $\mathbb{E}(X_1) \geq 0 = X_0$). $\square$

15.27. Tétel. (Doob szubmartingál konvergencia-tétele) Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan szubmartingál, hogy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, akkor létezik egy olyan X_∞ véletlen változó, melyre $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X_\infty$ ha $n \rightarrow \infty$, és $\mathbb{E}(|X_\infty|) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$.

Bizonyítás. Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén legyen $U_\infty^X(a, b) := \lim_{N \rightarrow \infty} U_N^X(a, b)$. Mivel $U_N^X(a, b)$ monoton növekvő N -ben, ez a határérték létezik, esetleg $+\infty$ (később kiderül, hogy 1 valószínűséggel véges). Mivel tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}[U_N^X(a, b)] \leq \frac{\mathbb{E}(X_N^+) + |a|}{b - a} < \infty,$$

ezért a monoton konvergencia tétel alapján

$$\mathbb{E}[U_\infty^X(a, b)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_N^X(a, b)] \leq \frac{\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_N^+) + |a|}{b - a} \leq \frac{\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_N|) + |a|}{b - a} < \infty,$$

ahol az utolsó lépében használtuk a feltételt. Ebből az is következik, hogy $\mathbb{P}(U_\infty^X(a, b) < \infty) = 1$. Mivel

$$\{\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n\} \subset \{U_\infty^X(a, b) = \infty\},$$

ezért $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) = 0$. Mivel

$$\{\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n\} = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}, a < b} \{\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n\},$$

így $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) = 0$, tehát $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) = 1$, vagyis az $X_\infty := \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ véletlen változóra teljesül $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X_\infty$. Végül a Fatou-lemmával (mely alkalmazható, hiszen $|X_n| \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

□

15.28. Megjegyzés. Egy példát adva megmutatjuk, hogy a 15.27. Tétel feltételei mellett általában nem következik, hogy X_n konvergál X_∞ -hez L_1 -ben, amint $n \rightarrow \infty$. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$, és az alábbi filtrációt

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left\{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right), j = 0, 1, \dots, 2^n - 1\right\}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tekintsük továbbá az alábbi véletlen változókat:

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 2^n & \text{ha } \omega \in [0, \frac{1}{2^n}), \\ 0 & \text{ha } \omega \in [\frac{1}{2^n}, 1), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál, mert X_n mérhető $\mathcal{F}_n$ -re nézve, integrálható és belátjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(2^{n+1} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2^{n+1}})} | \mathcal{F}_n\right) = 2^n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2^n})} = X_n \quad \lambda|_{[0,1]} \text{-m.m.}$$

Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}_n$ esetén

$$\mathbb{E}\left(2^{n+1} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2^{n+1}}) \cap A}\right) = \mathbb{E}\left(2^n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2^n}) \cap A}\right).$$

Ha $A = [0, \frac{1}{2^n})$, akkor mindkét oldal 1-gyel egyenlő, ha $A = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$, $j = 1, \dots, 2^n - 1$, akkor mindkét oldal 0-val egyenlő, és így teljesül az egyenlőség $\mathcal{F}_n$ generátorrendszerén. Ebből az is következik, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}_n$ esetén is teljesül az egyenlőség, hiszen $\mathcal{F}_n$ a generátorrendszerét alkotó intervallumok véges unióból áll.

Továbbá, $\mathbb{E}(|X_n|) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, és

$$X_n(\omega) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \in (0,1), \\ \infty & \text{ha } \omega = 0, \end{cases} \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

Így az $X(\omega) := 0$, $\omega \in [0,1)$, választással, kapjuk, hogy $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, amint $n \rightarrow \infty$, azonban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - 0|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = 1 \neq 0 = \mathbb{E}(X).$$

□

A. Appendix: Legközelebbi pont és néhány tulajdonsága

Az alábbiakban a feltételes Jensen-egyenlőtlenség (8.6. Tétel) bizonyításához szükséges topológiai előkészületeket tárgyaljuk.

A.1. Lemma. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$ egy nemüres, zárt halmaz és $x \in \mathbb{R}^d$. Ekkor létezik x -hez legközelebbi $s \in S$ pont, azaz olyan $s \in S$, melyre $\|x - s\| = \inf_{y \in S} \|x - y\| =: d_S(x)$. (A szóban forgó legközelebbi pont nem feltétlenül egyértelműen létezik.)*

Bizonyítás. Az infimum definíciója miatt létezik olyan $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ S -beli sorozat, melyre $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_k\| = d_S(x)$. Mivel konvergens sorozat korlátos is, kapjuk, hogy létezik olyan $M > 0$, melyre $\|x - y_k\| < M$, $k \in \mathbb{N}$. Mivel

$$\|y_k\| = \|y_k - x + x\| \leq \|y_k - x\| + \|x\| < M + \|x\|, \quad k \in \mathbb{N},$$

kapjuk, hogy $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ korlátos. A Bolzano-Weierstrass tétel alapján (egy korlátos $\mathbb{R}^d$ -beli sorozatnak létezik konvergens részsorozata), létezik $(y_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergens részsorozata $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ -nek, azaz létezik az $s := \lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_i}$ határérték. Mivel S zárt, kapjuk, hogy $s \in S$. Továbbá a normafüggvény folytonossága alapján

$$d_S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_k\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|x - y_{k_i}\| = \|x - s\|.$$

□

A.2. Lemma. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy nemüres, zárt, konvex halmaz és $x \in \mathbb{R}^d$. Ekkor egyértelműen létezik x -hez legközelebbi K -beli x_0 pont. Továbbá, x_0 az egyértelmű megoldása az alábbi egyenlőtlenség rendszernek:*

$$(x - x_0)^\top (y - x_0) \leq 0, \quad \forall y \in K,$$

azaz tetszőleges $y \in K$ esetén az $x - x_0$ és $y - x_0$ által bezárt szög $\frac{\pi}{2}$ -nél nagyobb vagy egyenlő.

Bizonyítás. Az $x_0 \in K$ pont létezése az A.1. Lemma következménye. Legyen $y \in K$ és $\lambda \in (0,1)$. Mivel K konvex, $(1 - \lambda)x_0 + \lambda y \in K$, és mivel x_0 egy, az x -hez legközelebbi K -beli pont, kapjuk, hogy

$$\|(1 - \lambda)x_0 + \lambda y - x\| \geq \|x_0 - x\|,$$

azaz $\|(x_0 - x) + \lambda(y - x_0)\| \geq \|x_0 - x\|$, és így $\|(x_0 - x) + \lambda(y - x_0)\|^2 \geq \|x_0 - x\|^2$. Ezért

$$\|x_0 - x\|^2 + 2\lambda(x_0 - x)^\top (y - x_0) + \lambda^2\|y - x_0\|^2 \geq \|x_0 - x\|^2,$$

azaz $2(x_0 - x)^\top (y - x_0) + \lambda\|y - x_0\|^2 \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$, $y \in K$. A $\lambda \downarrow 0$ határátmenetet véve, kapjuk, hogy $(x_0 - x)^\top (y - x_0) \geq 0$, $y \in K$, azaz $(x - x_0)^\top (y - x_0) \leq 0$, $y \in K$.

Tegyük fel, hogy $x_1 \in K$ egy másik x -hez legközelebbi pont. Az előző egyenlőtlenségben $y = x_1$ választással kapjuk, hogy $(x - x_0)^\top (x_1 - x_0) \leq 0$. Szimmetria okok miatt (vagy az előzőekhez hasonló érveléssel) adódik, hogy $(x - x_1)^\top (x_0 - x_1) \leq 0$. Ezen két egyenlőtlenséget összeadva

$$(x - x_0)^\top (x_1 - x_0) - (x - x_1)^\top (x_1 - x_0) \leq 0,$$

azaz $\|x_1 - x_0\|^2 = (x_1 - x_0)^\top (x_1 - x_0) \leq 0$, és így $x_1 = x_0$. $\square$

A.3. Megjegyzés. Az A.2. Lemma alábbi megfordítása is igaz (Motzkin-tétel): ha egy nem-üres, zárt $S \subset \mathbb{R}^d$ halmaz esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ -hez egyértelműen létezik S -beli legközelebbi pont, akkor S konvex. $\square$

A.4. Lemma. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy nemüres, zárt, konvex halmaz, és tekintsük az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto h_K(x) \in K$ leképezést, ahol $h_K(x)$ az x -hez legközelebbi K -beli pontot jelöli (az A.2. Lemma alapján $h_K(x)$ egyértelműen létezik). Ekkor h_K folytonos.

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in \mathbb{R}^d$ olyanok, hogy $h_K(x) \neq h_K(y)$, és tekintsük a $h_K(x)$ és $h_K(y)$ pontokra illeszkedő egyenest: $h_K(x) + \lambda(h_K(y) - h_K(x)) = (1 - \lambda)h_K(x) + \lambda h_K(y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tetszőleges $z \in \mathbb{R}^d$ esetén keressük meg az erre az egyenesre illeszkedő, z -hez legközelebbi pontot, melynek paraméterét jelölje $\lambda_z \in \mathbb{R}$. Mivel ekkor $z - (h_K(x) + \lambda_z(h_K(y) - h_K(x)))$ és a szóban forgó egyenes $h_K(y) - h_K(x)$ irányvektora merőlegesek, kapjuk, hogy

$$(h_K(x) + \lambda_z(h_K(y) - h_K(x)) - z)^\top (h_K(y) - h_K(x)) = 0,$$

melyből

$$\lambda_z = \frac{(z - h_K(x))^\top (h_K(y) - h_K(x))}{\|h_K(y) - h_K(x)\|^2}.$$

Mivel K konvex, $h_K(x) + \lambda(h_K(y) - h_K(x)) \in K$ minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén. Továbbá, mivel $h_K(y) \in K$, az A.2. Lemma alapján

$$(x - h_K(x))^\top (h_K(y) - h_K(x)) \leq 0, \tag{A.1}$$

azaz az $x - h_K(x)$ és $h_K(y) - h_K(x)$ által bezárt szög legalább $\frac{\pi}{2}$. Így $\lambda_x \leq 0$, a $\lambda_x = 0$ pedig a $h_K(x)$ pontnak felel meg az egyenesen. Hasonlóan, mivel $h_K(x) \in K$, az A.2. Lemma alapján

$$(y - h_K(y))^\top (h_K(x) - h_K(y)) \leq 0,$$

és így

$$(y - h_K(y))^\top (h_K(y) - h_K(x)) \geq 0.$$

Ezért

$$\lambda_y = \frac{(y - h_K(y))^\top (h_K(y) - h_K(x))}{\|h_K(y) - h_K(x)\|^2} + 1 \geq 1,$$

ahol a $\lambda_y = 1$ a $h_K(y)$ pontnak felel meg az egyenesen. Mindezek miatt $\lambda_y - \lambda_x \geq 1$ és így

$$\begin{aligned} \|h_K(y) - h_K(x)\| &= 1 \cdot \|h_K(y) - h_K(x)\| \leq (\lambda_y - \lambda_x) \|h_K(y) - h_K(x)\| \\ &= \frac{(y - h_K(x))^\top (h_K(y) - h_K(x)) - (x - h_K(x))^\top (h_K(y) - h_K(x))}{\|h_K(y) - h_K(x)\|^2} \|h_K(y) - h_K(x)\| \\ &= \frac{(y - x)^\top (h_K(y) - h_K(x))}{\|h_K(y) - h_K(x)\|} \leq \frac{|(y - x)^\top (h_K(y) - h_K(x))|}{\|h_K(y) - h_K(x)\|} \leq \frac{\|y - x\| \|h_K(y) - h_K(x)\|}{\|h_K(y) - h_K(x)\|} \\ &= \|y - x\|, \end{aligned}$$

és így $\|h_K(x) - h_K(y)\| \leq \|y - x\|$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, amiből következik h_K folytonossága. $\square$

A.5. Lemma. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy nemüres, konvex, zárt halmaz, és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén jelölje $h_K(x)$ az x -hez legközelebbi K -beli pontot (mely az A.2. Lemma alapján egyértelműen létezik). Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ és $y \in K$ esetén

$$x^\top (x - h_K(x)) \geq h_K(x)^\top (x - h_K(x)) \geq y^\top (x - h_K(x)),$$

és az első egyenlőtlenségnél egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in K$.

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$(x - h_K(x))^\top (x - h_K(x)) = \|x - h_K(x)\|^2 \geq 0,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h_K(x) = x$, ami azzal ekvivalens, hogy $x \in K$. Valóban, ha $h_K(x) = x$, akkor mivel $h_K(x) \in K$, kapjuk, hogy $x \in K$ is teljesül. Ha pedig $x \in K$, akkor nyilván $\|x - x\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$, és felhasználva, hogy az A.2. Lemma alapján $h_K(x)$ egyértelműen meghatározott, kapjuk, hogy $x = h_K(x)$.

A második egyenlőtlenség abból következik, hogy $y \in K$ esetén $h_K(y) = y$, és ezért (A.1) alapján $(y - h_K(x))^\top (x - h_K(x)) \leq 0$. $\square$

B. Appendix: Kompakt regularitás

Ebben az appendixben a Kolmogorov konzisztenciátétel (13.12. Tétel) bizonyításában felhasznált olyan topológiai- és mértékelméleti definíciókat és eredményeket gyűjtünk össze, melyek nem szerepelnek a mértékelméleti előkészítést tartalmazó 1. Fejezetben.

B.1. Definíció. Egy $X \neq \emptyset$ részhalmazából álló $\mathcal{K}$ családot σ -kompaktnak hívjuk, ha valahányszor egy $K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, sorozatra $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, mindannyiszor található olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset$.

B.2. Megjegyzés. (i). Egy $\mathcal{K}$ család σ -kompaktsága nem keverendő egy halmaz σ -kompaktságának fogalmával. Egy topológikus tér egy részhalmazát σ -kompaktnak nevezzük, ha előállítható megszámlálható sok kompakt részhalmaz uniójaként.

(ii). Példa: $\mathbb{R}$ kompakt részhalmazai σ -kompakt családot alkotnak. $\square$

B.3. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ az X részhalmazából álló halmazrendszer, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ halmazfüggvény. Azt mondjuk, hogy μ egy $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszerre nézve **belülről reguláris**, ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$.

B.4. Tétel. Legyen $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ az X részhalmazából álló halmazalgebra, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ véges értékeket felvevő, végesen additív halmazfüggvény és $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ egy σ -kompakt család. Ha μ belülről reguláris a $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ rendszerre nézve, úgy μ σ -additív az $\mathcal{A}$ halmazalgebrán.

B.5. Definíció. Legyen X egy topológikus tér, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér.

- (i) Egy $A \in \mathcal{A}$ halmazt regulárisnak hívunk, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan F_ε zárt és G_ε nyílt halmazok, melyekre $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$, $F_\varepsilon, G_\varepsilon \in \mathcal{A}$ és $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Ha egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz reguláris, akkor nyilván

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G, G \in \mathcal{A} \text{ nyílt}\}, \quad (\text{B.1})$$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A, F \in \mathcal{A} \text{ zárt}\}. \quad (\text{B.2})$$

Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, ill. a μ mérték reguláris, ha minden $A \in \mathcal{A}$ reguláris.

- (ii) Ha egy $A \in \mathcal{A}$ halmazra csak (B.1) teljesül, akkor a halmazt kívülről, ha csak (B.2) teljesül, akkor belülről regulárisnak nevezzük.

- (iii) Ha egy $A \in \mathcal{A}$ halmazra

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{A} \text{ kompakt}\} \quad (\text{B.3})$$

teljesül, akkor az A halmazt belülről kompakt regulárisnak hívjuk. Ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra teljesül (B.3), úgy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ -t, illetve μ -t belülről kompakt regulárisnak hívjuk. Ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén (B.1) és (B.3) teljesül, úgy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ -t, illetve μ -t **kompakt regulárisnak** hívjuk.

B.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér. Ha X teljes szeparábilis metrikus tér is, úgy μ kompakt reguláris.*

C. Appendix: Függvények és sorozatok konvolúciója

Ebben az Appendixben a jegyzet egyéb részeitől eltérően egy X véletlen változó eloszlásfüggvényét $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, módon értelmezzük (a korábbi $\mathbb{P}(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$, definíció helyett). Az eloszlásfüggvény ezen definíció esetén jobbról folytonos (a korábbi definíció mellett balról folytonos). Azért választjuk ezt az új definíciót, mert az alább tárgyalandó Stieltjes-konvolúció esetén ún. càdlàg (continue à droite, limitée à gauche) függvényekkel fogunk dolgozni, azaz olyan függvényekkel, melyek mindenhol jobbról folytonosak és mindenhol létezik a baloldali határértékük.

Ez az Appendix a C.10. Megjegyzés kivételével Szűcs Gábor: *Kockázati folyamatok* című jegyzetének 5. fejezetét követi (esetenként kisebb módosításokkal a levezetésekben).

Először felidézzük, hogy egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ahol $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, korlátos változásúnak nevezünk, ha

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| : \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}, n \in \mathbb{N}, \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek} \right\} < \infty.$$

Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos változású minden véges intervallumon (másképpen lokálisan korlátos változású), ha korlátos változású tetszőleges $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, intervallumon. Emlékeztetünk rá, hogy a Jordan-féle dekompozíciós tétel alapján $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ akkor és csak akkor korlátos változású, ha előállítható két monoton növekvő függvény különbségeként. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút folytonos (azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és olyan páronként diszjunkt $[x_i, y_i] \subset [a, b]$ (ahol $x_i < y_i$) $i = 1, \dots, n$, részintervallumok esetén, melyekre $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$), akkor f korlátos változású is.

C.1. Definíció. Legyenek $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények, és tegyük fel, hogy G càdlàg és korlátos változású minden véges intervallumon. Ekkor ϕ és G Stieltjes-konvolúciója a $t \in \mathbb{R}$ helyen

$$(\phi * G)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - x) dG(x),$$

feltéve, hogy a fenti Lebesgue-Stieltjes integrál létezik. A G függvény n -edik konvolúció hatványa az n tényezős $G^{*n} := G * \dots * G$ konvolúció, ahol $n \in \mathbb{N}$.

C.2. Tétel. (i) Ha X és Y független véletlen változók rendre G és H eloszlásfüggvénnyel, akkor az $X + Y$ véletlen változó eloszlásfüggvénye $G * H$.

(ii) Ha $n \in \mathbb{N}$ és $X_1, \dots, X_n$ független és azonos eloszlású véletlen változók G eloszlásfüggvénnyel, akkor $X_1 + \dots + X_n$ eloszlásfüggvénye G^{*n} .

Bizonyítás. Az (i) rész állítása megegyezik a 12.12. Állítással, melyet már megmutattunk. (A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a 12.12. Állítás bizonyításában az eloszlásfüggvényt

balról folytonosnak tekintettük, a jobbról folytonos esetre egyszerűen adaptálható a bizonyítás.) A (ii) rész állítása teljes indukcióval következik az (i) részből. $\square$

C.3. Következmény. Ha G és H eloszlásfüggvények, $n \in \mathbb{N}$, akkor $G * H$ és G^{*n} mindenhol léteznek a valós egyenesen, továbbá $G * H = H * G$.

Az alábbiakban véletlen változók konvolúciójának azon két speciális esetét tárgyaljuk, amikor mindkét véletlen változó abszolút folytonos, illetve mindkét véletlen változó egész értékű.

C.4. Példa. (Abszolút folytonos véletlen változók konvolúciója) Legyenek X és Y független abszolút folytonos eloszlású véletlen változók, rendre G és H eloszlásfüggvénnyel, illetve g és h sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $z = y - x$ helyettesítéssel és a Fubini-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} (G * H)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x) dH(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{t-x} g(z) dz \right) h(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^t g(y-x) dy \right) h(x) dx = \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y-x) h(x) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Mivel a C.2. Tétel alapján $G * H$ nem más, mint $X + Y$ eloszlásfüggvénye, a fentiek alapján következik, hogy $X + Y$ is abszolút folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye

$$(g * h)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} g(y-x) h(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

A $g * h$ függvényt g és h Lebesgue-konvolúciójának nevezzük. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a fent definiált $g * h$ függvény egy Lebesgue szerint null mértékű, Borel mérhető halmaztól eltekintve véges (lásd a C.10. Megjegyzés (i) részének elejét), továbbá a szóban forgó "kivételes" halmazon (ahol nem véges) például 0-nak átdefiniálva sűrűségfüggvényt kapunk. $\square$

C.5. Példa. (Egész értékű véletlen változók konvolúciója) Legyenek X és Y független, egész értékű véletlen változók. Ekkor $X + Y$ szintén egész értékű véletlen változó, és a C.2. Tétel alapján eloszlásfüggvénye $G * H$. Továbbá, a G , H és $G * H$ eloszlásfüggvények olyan lépcsős függvények, melyek az egész pontokban ugorhatnak, és felhasználva, hogy $\{X = n\} = \{X \leq n\} \setminus \{X \leq n-1\}$, $n \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy X és Y eloszlása:

$$\begin{aligned} p_n &:= \mathbb{P}(X = n) = G(n) - G(n-) = G(n) - G(n-1), & n \in \mathbb{Z}, \\ q_n &:= \mathbb{P}(Y = n) = H(n) - H(n-) = H(n) - H(n-1), & n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Így, felhasználva, hogy $\{X \leq n\} = \bigcup_{k=-\infty}^n \{X = k\}$, $n \in \mathbb{Z}$, adódik, hogy

$$G(n) = \sum_{k=-\infty}^n p_k, \quad H(n) = \sum_{k=-\infty}^n q_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A konvolúció C.1. Definíciója alapján, felhasználva, hogy H konstans tetszőleges $(k, k+1)$ alakú intervallumon, ahol $k \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\begin{aligned} (G * H)(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(n-x) dH(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\{k\}} G(n-x) dH(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(n-k)(H(k) - H(k-)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n-k)(H(k) - H(k-1)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{n-k} p_{\ell} \right) q_k = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}, k+\ell \leq n} p_{\ell} q_k. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy a C.2. Tétel alapján $X+Y$ eloszlásfüggvénye $G * H$ és, hogy $X+Y$ egész értékű, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y = n) &= (G * H)(n) - (G * H)(n-1) = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}, k+\ell=n} p_{\ell} q_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k} q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = n-k) \mathbb{P}(Y = k), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A

$$(p * q)_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k} q_k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

sorozatot a $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ és $(q_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatok konvolúciójának nevezzük. $\square$

Ha X nemnegatív véletlen változó, akkor $F_X(x) = 0$ tetszőleges $x < 0$ esetén. Az alábbiakban a C.1. Definícióban bevezetett Stieltjes-konvolúció azon speciális esetével foglalkozunk, amikor $\phi(x) = 0$, $x < 0$ és $G(x) = 0$, $x < 0$.

C.6. Példa. (Stieltjes-konvolúciója a $(-\infty, 0)$ -n eltűnő függvényeknek) Legyenek $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a C.1. Definíció feltételeit kielégítő függvények, melyekre $\phi(x) = 0$, $x < 0$ és $G(x) = 0$, $x < 0$, és tegyük fel, hogy $\phi * G$ jól definiált a valós egyenesen. Ekkor tetszőleges $y < 0$ esetén

$$(\phi * G)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-x) dG(x) = \int_{(-\infty, 0)} \phi(y-x) d0 + \int_{[0, \infty)} 0 dG(x) = 0, \quad (\text{C.1})$$

és tetszőleges $y \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} (\phi * G)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-x) dG(x) = \int_{(-\infty, 0)} \phi(y-x) d0 + \int_{[0, y]} \phi(y-x) dG(x) + \int_{(y, \infty)} 0 dG(x) \\ &= \int_{[0, y]} \phi(y-x) dG(x). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Felhívjuk végezetül a figyelmet, hogy általában véve

$$\int_{[0,y]} \phi(y-x) dG(x) \neq \int_{(0,y]} \phi(y-x) dG(x) \left(=: \int_0^y \phi(y-x) dG(x) \right),$$

hanem az teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \int_{[0,y]} \phi(y-x) dG(x) &= \int_{\{0\}} \phi(y-x) dG(x) + \int_{(0,y]} \phi(y-x) dG(x) \\ &= \phi(y)(G(0+) - G(0-)) + \int_{(0,y]} \phi(y-x) dG(x) \\ &= \phi(y)G(0) + \int_{(0,y]} \phi(y-x) dG(x), \end{aligned} \quad (C.3)$$

ahol $G(0+)$, illetve $G(0-)$ a G -nek a 0-beli jobboldali, illetve baloldali határértékét jelöli, és felhasználtuk, hogy G jobbról folytonos, illetve azt, hogy feltételezésünk alapján $G(x) = 0$, $x < 0$, és így $G(0-) = 0$. $\square$

A következő állításban egy elégséges feltételrendszert adunk arra vonatkozóan, hogy a $\phi * G$ jól definiált legyen a valós egyenesen.

C.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető és lokálisan korlátos (korlátos minden véges intervallumon), $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ càdlàg és korlátos változású minden véges intervallumon (ekkor G mérhető is), továbbá $\phi(x) = G(x) = 0$ minden $x < 0$ esetén. Ekkor a $\phi * G$ konvolúció jól definiált a valós egyenesen, és mérhető, lokálisan korlátos függvény.*

Bizonyítás. Mivel (C.1) alapján $(\phi * G)(y) = 0$, $y < 0$, és (C.3) alapján $(\phi * G)(0) = \phi(0)(G(0) - G(0-)) \in \mathbb{R}$, elég azt igazolni, hogy $(\phi * G)(y)$ létezik tetszőleges $y > 0$ esetén és az $[0, \infty) \ni y \mapsto (\phi * G)(y)$ függvény mérhető és lokálisan korlátos. Legyen $t > 0$ tetszőlegesen rögzített. Mivel G korlátos változású a $[0, t]$ intervallumon, ismert, hogy léteznek olyan $G_1, G_2: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő (korlátos) függvények, hogy $G(x) = G_1(x) - G_2(x)$, $x \in [0, t]$. Így (C.2) és ϕ lokális korlátossága alapján

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [0,t]} |(\phi * G)(y)| &= \sup_{y \in [0,t]} \left| \int_{[0,y]} \phi(y-x) dG(x) \right| \\ &= \sup_{y \in [0,t]} \left| \int_{[0,y]} \phi(y-x) dG_1(x) - \int_{[0,y]} \phi(y-x) dG_2(x) \right| \\ &\leq \sup_{y \in [0,t]} \left[\left| \int_{[0,y]} \phi(y-x) dG_1(x) \right| + \left| \int_{[0,y]} \phi(y-x) dG_2(x) \right| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{y \in [0, t]} \left[\left(\sup_{x \in [0, y]} |\phi(y-x)| \right) \left(\int_{[0, y]} 1 \, dG_1(x) + \int_{[0, y]} 1 \, dG_2(x) \right) \right] \\
&= \sup_{y \in [0, t]} \left[\left(\sup_{x \in [0, y]} |\phi(y-x)| \right) \left(G_1(y) - G_1(0-) + G_2(y) - G_2(0-) \right) \right] \\
&\leq \left(\sup_{x \in [0, t]} |\phi(x)| \right) \left(G_1(t) - G_1(0-) + G_2(t) - G_2(0-) \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a fentiekben a második egyenlőség a Lebesgue-Stieltjes integrálnak az integrátor szerinti linearitásából következik (ennél a lépésnél hivatkozhattunk volna a konvolúció disztributivitására is, melyet a C.8. Állításban tárgyalunk). Az utolsó egyenlőtlenségnél pedig azt használtuk, hogy $0 \leq G_i(y) - G_i(0-) \leq G_i(t) - G_i(0-)$, $y \in [0, t]$, $i = 1, 2$, hiszen G_1 és G_2 monoton növekvők. A fentiekben $G_1(0-) - G_2(0-) = G(0-) = 0$, hiszen $G(x) = 0$ tetszőleges $x < 0$ esetén.

A szóban forgó mérhetőség abból következik, hogy az $\mathbb{R}^2 \ni (x, t) \mapsto \phi(t-x)$ függvény mérhető, így ezen függvény pozitív és negatív részére alkalmazhatjuk a Tonelli-tétel bizonyításában is használt (a mérhetőségi részre vonatkozó) gondolatmenetet az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_{G_i})$, $i = 1, 2$, mérhető tereken, ahol μ_{G_i} , $i = 1, 2$, a G_i -hez tartozó Lebesgue-Stieltjes mértéket jelöli.

Felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy a fentiekben szereplő $G_1(t) - G_1(0-) + G_2(t) - G_2(0-)$ mennyiség úgy is írható, hogy

$$\begin{aligned}
&G_1(t) - G_1(0-) + G_2(t) - G_2(0-) \\
&= G_1(t) - G_1(0) + G_2(t) - G_2(0) + G_1(0) - G_1(0-) + G_2(0) - G_2(0-) \\
&= V_{[0, t]}(G_1) + V_{[0, t]}(G_2) + G_1(0) - G_1(0-) + G_2(0) - G_2(0-),
\end{aligned}$$

ahol egy $h: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén $V_{[0, t]}(h)$ jelöli a h teljes változását a $[0, t]$ intervallumon:

$$V_{[0, t]}(h) := \sup_{\{0=y_0 < y_1 < \dots < y_n=t, n \in \mathbb{N}\}} \sum_{i=0}^{n-1} |h(y_{i+1}) - h(y_i)|,$$

ugyanis, ha h monoton növekvő, akkor $V_{[0, t]}(h) = h(t) - h(0)$. $\square$

C.8. Állítás. (i) **(Disztributivitás)** Legyenek $\phi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető és lokálisan korlátos függvények, és legyenek $G, H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan càdlàg függvények, melyek korlátos változásúak minden véges intervallumon. Tegyük fel továbbá, hogy $\phi(x) = \psi(x) = G(x) = H(x) = 0$, $x < 0$. Ekkor tetszőleges $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a\phi + b\psi) * (\alpha G + \beta H) = a\alpha(\phi * G) + a\beta(\phi * H) + b\alpha(\psi * G) + b\beta(\psi * H).$$

(ii) Legyenek $\phi_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, mérhető és lokálisan korlátos függvények, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ szintén lokálisan korlátos. Legyen $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő és càdlàg függvény. Tegyük fel továbbá, hogy $\phi_n(x) = G(x) = 0$, $x < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \right) * G = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n * G).$$

Bizonyítás. A C.7. Állítás szerint mind az (i), mind a (ii) részben a formulákban szereplő összes konvolúció létezik a valós számegegyenesen (a (ii) részben a $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ függvény mérhető a mértékelméletből tanultak alapján).

(i). Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
 (a\phi + b\psi) * (\alpha G + \beta H)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (a\phi + b\psi)(t-x) d(\alpha G + \beta H)(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (a\phi + b\psi)(t-x) d[\alpha G(x) + \beta H(x)] \\
 &= a\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-x) dG(x) + a\beta \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-x) dH(x) \\
 &\quad + b\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-x) dG(x) + b\beta \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-x) dH(x) \\
 &= a\alpha(\phi * G)(t) + a\beta(\phi * H)(t) + b\alpha(\psi * G)(t) + b\beta(\psi * H)(t).
 \end{aligned}$$

(ii). A (mértékelméleti) monoton konvergencia tételt használva az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_G)$ mértéktéren, ahol μ_G a G -hez tartozó Lebesgue-Stieltjes mértéket jelöli, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \right) * G \right) (t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t-x) dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \phi_n(t-x) dG(x) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t-x) dG(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\phi_n * G)(t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n * G)(t).
 \end{aligned}$$

Végezetül megjegyezzük, hogy mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) = 0$, $x < 0$, adódik, hogy $((\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n) * G)(t) = 0$, $t < 0$, továbbá, (C.3) és a fentiek alapján, kapjuk, hogy

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \right) * G \right) (t) = \int_{[0,t]} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t-x) dG(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]} \phi_n(t-x) dG(x), \quad t \geq 0.$$

□

C.9. Állítás. (Kommutativitás és asszociativitás) Legyen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető és lokálisan korlátos függvény, és legyenek $G, H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő és càdlàg függvények. Tegyük fel továbbá, hogy $\phi(x) = G(x) = H(x) = 0$, $x < 0$. Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$G * H = H * G \quad \text{és} \quad (\phi * G) * H = \phi * (G * H).$$

Bizonyítás. Mivel G és H monoton növekvő függvények, ezért mérhetőek, lokálisan korlátosak és korlátos változásúak a véges intervallumokon. Így a C.7. Állítás alapján a $G * H$ és

$H * G$ konvolúciók jól-definiáltak a valós egyenesen és lokálisan korlátos függvények. Jelölje μ_G , illetve μ_H a G -hez, illetve H -hoz tartozó Lebesgue-Stieltjes mértékeket. Mivel G és H monoton növekvő függvények, $\mu_G \times \mu_H$ (nemnegatív) mérték. Legyen továbbá

$$S_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A Fubini-tétel alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} (G * H)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-y) dH(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x \leq t-y\}} dG(x) dH(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{S_t}(x, y) (\mu_G \times \mu_H)(dx, dy) \\ &= (\mu_G \times \mu_H)(S_t), \end{aligned} \tag{C.4}$$

ahol a második egyenlőség abból következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x \leq t-y\}} dG(x) &= \int_{(-\infty, t-y]} 1 dG(x) + \int_{(t-y, \infty)} 0 dG(x) \\ &= G(t-y) - \lim_{z \downarrow -\infty} G(z) = G(t-y). \end{aligned}$$

Mivel az S_t halmaz szimmetrikus az $y = x$ egyenesre nézve, kapjuk, hogy

$$(H * G)(t) = (\mu_H \times \mu_G)(S_t) = (\mu_G \times \mu_H)(S_t) = (G * H)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

azaz $G * H = H * G$.

Rátérünk most az asszociativitás igazolására. Felhasználva (C.4)-et kapjuk, hogy

- $G * H$ monoton növekvő, ugyanis tetszőleges $u \leq t$, $u, t \in \mathbb{R}$ esetén $S_u \subset S_t$, melyből a $\mu_G \times \mu_H$ mérték monotonitása miatt következik, hogy $(G * H)(u) = (\mu_G \times \mu_H)(S_u) \leq (\mu_G \times \mu_H)(S_t) = (G * H)(t)$. Speciálisan, $G * H$ -nek mindenhol létezik a baloldali határértéke.
- $G * H$ jobbról folytonos, ugyanis tetszőleges $u \in \mathbb{R}$ esetén (a $\mu_G \times \mu_H$ mérték folytonosságát is használva)

$$\lim_{t \downarrow u} (G * H)(t) = \lim_{t \downarrow u} (\mu_G \times \mu_H)(S_t) = (\mu_G \times \mu_H) \left(\bigcap_{t > u} S_t \right) = (\mu_G \times \mu_H)(S_u) = (G * H)(u).$$

Így $G * H$ càdlàg függvény, mely korlátos változású a véges intervallumokon (hiszen monoton növekvő), és a (C.1) formula alapján $(G * H)(x) = 0$, $x < 0$. Ezért a C.7. Állítás szerint létezik $(\phi * (G * H))(t)$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén. A C.7. Állítás alapján az is következik, hogy $\phi * G$ jól definiált a valós száme egyenesen és lokálisan korlátos függvény, így újra csak a C.7. Állítás alapján $((\phi * G) * H)(t)$ is jól definiált tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén. Jelölje $\mu_{G * H}$ a

$G * H$ monoton növekvő, càdlàg függvényhez tartozó Lebesgue-Stieltjes mértéket. Ekkor (C.4) alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\mu_{G*H}((-\infty, t]) &= (G * H)(t) = (\mu_G \times \mu_H)(S_t) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{S_t}(x, y) (\mu_G \times \mu_H)(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{f^{-1}((-\infty, t])}(x, y) (\mu_G \times \mu_H)(dx, dy) = (\mu_G \times \mu_H)(f^{-1}((-\infty, t])),\end{aligned}$$

ahol $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := x + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Így Carathéodory kiterjesztési tétele (lásd 1.8. Tétel) alapján

$$\mu_{G*H}(B) = (\mu_G \times \mu_H)(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ezért a képmérték szerinti integrálás tétele alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}(\phi * (G * H))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - z) (G * H)(dz) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t - z) \mu_{G*H}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \phi(t - f(x, y)) (\mu_G \times \mu_H)(dx, dy) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \phi(t - x - y) (\mu_G \times \mu_H)(dx, dy).\end{aligned}$$

Így, mivel $(\phi * (G * H))(t) \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \phi^+(t - x - y)$ és $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \phi^-(t - x - y)$ integrálható a $\mu_G \times \mu_H$ mérték szerint, ahol ϕ^+ és ϕ^- a ϕ pozitív, illetve negatív részét jelöli. Ezért $|\phi| = \phi^+ + \phi^-$ is integrálható $\mu_G \times \mu_H$ szerint, így alkalmazható a Fubini-tétel és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\phi * (G * H))(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t - x - y) \mu_G(dx) \mu_H(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t - x - y) dG(x) dH(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\phi * G)(t - y) dH(y) = ((\phi * G) * H)(t).\end{aligned}$$

□

C.10. Megjegyzés. (i). A C.4. Példában szereplő Lebesgue-konvolúció asszociativitását $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvények esetén egyszerűbben is igazolhatjuk, mint a C.9. Állítás bizonyításában. Ha $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$, akkor a C.4. Példában bevezetett $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ függvény is mérhető és $\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx < \infty$, hiszen a Fubini-tétel miatt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y) g(y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y) g(y)| dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)| dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| dz \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| dz \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy < \infty.\end{aligned}$$

Legyen továbbá $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$. Ekkor az előzőek alapján $(f * g) * h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mérhető és $\int_{\mathbb{R}} |((f * g) * h)(x)| dx < \infty$. Így Lebesgue

majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x - y) h(y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y - z) g(z) \, dz \right) h(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y - z) g(z) h(y) \, dy \right) dz. \end{aligned}$$

A $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(y, z) := (y, z - y)$, $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, transzformáció Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

melynek determinánsa 1 (és így ennek abszolút értéke is 1), ezért

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y - (z - y)) g(z - y) h(y) \, dy \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - z) g(z - y) h(y) \, dy \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z - y) h(y) \, dy \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z) (g * h)(z) \, dz = (f * (g * h))(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii). Megjegyezzük, hogy a Lebesgue-konvolúció nem csak $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvények esetén lehet jóldefiniált. Például, ha $f(x) := 1$, $x \in \mathbb{R}$, és $g(x) := \sin(x) \mathbb{1}_{[0, 2\pi)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) \, dy = \int_0^{2\pi} \sin(y) \, dy = 0,$$

azonban $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt = \infty$. □

D. Appendix: Néhány idősoranalízisből elmaradt eredmény

D.1. Állítás. Ha $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ valószínűségi változók olyan sorozata, hogy $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ és $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ valós számok olyan sorozata, hogy $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, akkor a $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ sor abszolút konvergens $\mathbb{P}$ -m.m. Továbbá, ha $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, akkor a $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ sor L^2 -ben is konvergens (és ugyanaz az összege).

Bizonyítás. A monoton konvergencia tétel alapján (lásd, 3.7. Tétel, (x) rész)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| |X_{t-j}| \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=-n}^n |\psi_j| |X_{t-j}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\psi_j| \mathbb{E}(|X_{t-j}|) \\ &\leq \left(\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\psi_j| \\ &= \left(\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty. \end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| |X_{t-j}(\omega)| < \infty \right\} \right) = 1,$$

azaz

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}(\omega) \text{ abszolút konvergens} \right\} \right) = 1.$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$. Legyen $S_n := \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor tetszőleges $0 < m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, esetén

$$\mathbb{E}((S_n - S_m)^2) = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{m < |j| \leq n} \psi_j X_{t-j} \right)^2 \right) = \sum_{m < |j| \leq n} \sum_{m < |k| \leq n} \psi_j \psi_k \mathbb{E}(X_{t-j} X_{t-k}),$$

ahol a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{E}(X_{t-j} X_{t-k}) \leq |\mathbb{E}(X_{t-j} X_{t-k})| \leq \mathbb{E}(|X_{t-j} X_{t-k}|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X_{t-j}^2)} \sqrt{\mathbb{E}(X_{t-k}^2)} \leq \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty.$$

Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((S_n - S_m)^2) &\leq \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_t^2) \sum_{m < |j| \leq n} \sum_{m < |k| \leq n} \psi_j \psi_k = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_t^2) \left(\sum_{m < |j| \leq n} \psi_j \right)^2 \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_t^2) \left(\sum_{m < |j| \leq n} |\psi_j| \right)^2 \rightarrow 0, \quad \text{ha } m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Tehát $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, és mivel $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ teljes, kapjuk, hogy $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^2 -ben is konvergens. Jelölje S az $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat L^2 -beli határértékét. Felhasználva, hogy az állítás első része alapján $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ konvergens $\mathbb{P}$ -m.m., kapjuk, hogy

$$S - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S - \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j} \right) \quad \mathbb{P}\text{-m.m.}$$

Így $\mathbb{P}$ -m.m. $\omega \in \Omega$ esetén

$$\left(S - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}(\omega) \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S - \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j}(\omega) \right)^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(S - \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j}(\omega) \right)^2.$$

Ezért a Fatou-lemma alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(S - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j} \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(S - \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j} \right)^2 \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left(S - \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j} \right)^2 \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} ((S - S_n)^2) = 0, \end{aligned}$$

melyből következik, hogy

$$\mathbb{P} \left(S = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j} \right) = 1.$$

□

D.2. Megjegyzés. A D.1. Állításban, ha X_t , $t \in \mathbb{Z}$, független, azonos eloszlású nulla várható értékű valószínűségi változók és $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, akkor a Kolmogorov egy sor tétel (lásd 10.4. Tétel) alapján a $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ sor konvergens $\mathbb{P}$ -m.m. Valóban, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbb{D}^2(\psi_j X_{t-j}) = \mathbb{D}^2(X_1) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. □

D.3. Állítás. Legyen $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ egy gyengén stacionárius folyamat, μ várható értékkel és γ autokovariancia függvénnyel. Legyen továbbá $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ valós számok olyan sorozata, hogy $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{Z}$ esetén

$$Y_t := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

konvergens $\mathbb{P}$ -m.m. és L^2 -ben is (ugyanazon összeggel). Továbbá, $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ gyengén stacionárius folyamat, várható értéke $\mu \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j$, és autokovariancia függvénye $\gamma_Y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma_Y(h) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma(h-j+k), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Bizonyítás. A $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ sor konvergenciájára vonatkozó állítások a D.1. Állításból következnek, ugyanis, felhasználva, hogy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ gyengén stacionárius, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(|X_t|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2)} = \sqrt{\mathbb{D}^2(X_t) + (\mathbb{E}(X_t))^2} =: C, \quad t \in \mathbb{Z},$$

és így $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$.

Felhasználva, hogy az Y_t valószínűségi változót definiáló sor L^2 -ben konvergens, és, hogy az L^2 -beli belsőszorzat tényezőinek folytonos függvénye, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}(Y_t \cdot 1) = \langle Y_t, 1 \rangle_{L^2} = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j}, 1 \right\rangle_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j}, 1 \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t-j} \cdot 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \psi_j \mathbb{E}(X_{t-j}) = \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \psi_j = \mu \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{t+h} Y_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=-n}^n \psi_j X_{t+h-j} \sum_{k=-n}^n \psi_k X_{t-k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \psi_j \psi_k \mathbb{E}(X_{t+h-j} X_{t-k}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k (\gamma(h-j+k) + \mu^2), \quad t, h \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(Y_{t+h} Y_t)| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_j \psi_k| (|\gamma(h-j+k)| + \mu^2) \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_j \psi_k| \left(\sqrt{\mathbb{D}^2(X_{h+k})} \sqrt{\mathbb{D}^2(X_j) + \mu^2} \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_j \psi_k| (\mathbb{D}^2(X_0) + \mu^2) \\ &\leq \mathbb{E}(X_0^2) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| \right)^2 < \infty, \quad t, h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tehát tetszőleges $t, h \in \mathbb{Z}$ esetén $\mathbb{E}(Y_t)$ és $\mathbb{E}(Y_{t+h} Y_t)$ végesek és nem függenek t -től, továbbá, felhasználva, hogy $\mathbb{E}(Y_t) = \mu \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j$, $t \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy Y autokovariancia függvénye $\gamma_Y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma_Y(h) = \mathbb{E}(Y_{t+h} Y_t) - \mathbb{E}(Y_{t+h}) \mathbb{E}(Y_t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma(h-j+k), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

□

A következőkben kétoldali mozgóátlag folyamatokra vonatkozó nagy számok gyenge törvényét tárgyaljuk. Először egy önmagában is érdekes eredményt szerepeltetünk az eloszlásbeli konvergenciával kapcsolatban, melyet felhasználunk majd a szóban forgó nagy számok gyenge törvényének a bizonyításban.

D.4. Állítás. Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, és $Y_{n,j}$, $n, j \in \mathbb{N}$, k -dimenziós véletlen vektorok, hogy

$$(i) Y_{n,j} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y_j, \text{ ha } n \rightarrow \infty \text{ minden } j \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

$$(ii) Y_j \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \text{ ha } j \rightarrow \infty,$$

$$(iii) \lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - Y_{n,j}\| \geq \varepsilon) = 0 \text{ tetszőleges } \varepsilon > 0 \text{ esetén.}$$

Ekkor $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, ha $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A folytonossági tétel (4.15. Tétel) alapján elég azt belátni, hogy $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_Y(t)$, ha $n \rightarrow \infty$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}^k$ esetén. A háromszög-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $t \in \mathbb{R}^k$ és $n, j \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_Y(t)| \leq |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j}}(t)| + |\varphi_{Y_{n,j}}(t) - \varphi_{Y_j}(t)| + |\varphi_{Y_j}(t) - \varphi_Y(t)|.$$

Belátjuk, hogy

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j}}(t)| = 0.$$

Tetszőleges $t \in \mathbb{R}^k$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta := \delta(\varepsilon, t) > 0$, hogy

$$|e^{i\langle t, x \rangle} - e^{i\langle t, y \rangle}| = |1 - e^{i\langle t, y-x \rangle}| < \varepsilon, \quad \text{ha } |x - y| < \delta. \quad (\text{D.1})$$

Így (D.1) alapján

$$\begin{aligned} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j}}(t)| &= |\mathbb{E}(e^{i\langle t, X_n \rangle}) - \mathbb{E}(e^{i\langle t, Y_{n,j} \rangle})| \leq \mathbb{E}(|e^{i\langle t, X_n \rangle} - e^{i\langle t, Y_{n,j} \rangle}|) = \mathbb{E}(|1 - e^{i\langle t, X_n - Y_{n,j} \rangle}|) \\ &= \mathbb{E}(|1 - e^{i\langle t, X_n - Y_{n,j} \rangle}| \mathbb{1}_{\{|X_n - Y_{n,j}| < \delta\}}) \\ &\quad + \mathbb{E}(|1 - e^{i\langle t, X_n - Y_{n,j} \rangle}| \mathbb{1}_{\{|X_n - Y_{n,j}| \geq \delta\}}) \\ &\leq \varepsilon + 2\mathbb{P}(|X_n - Y_{n,j}| \geq \delta). \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}^k$ és $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j}}(t)| \leq \varepsilon + 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_{n,j}| \geq \delta),$$

melyből (iii) alapján következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $t \in \mathbb{R}^k$ esetén

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j}}(t)| \leq \varepsilon.$$

Így tetszőleges $t \in \mathbb{R}^k$ esetén létezik a $\lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j}}(t)|$ határérték és 0-val egyenlő.

A folytonossági tétel és (ii) alapján $\lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_{Y_j}(t) - \varphi_Y(t)| = 0$, $t \in \mathbb{R}^k$. Ezért tetszőleges $t \in \mathbb{R}^k$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $j_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j_0}}(t)| + |\varphi_{Y_{j_0}}(t) - \varphi_Y(t)| < \varepsilon.$$

A folytonossági tétel és (i) alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{Y_{n,j_0}}(t) - \varphi_{Y_{j_0}}(t)| = 0, \quad t \in \mathbb{R}^k.$$

Így tetszőleges $t \in \mathbb{R}^k$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_Y(t)| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{Y_{n,j_0}}(t)| + \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{Y_{n,j_0}}(t) - \varphi_{Y_{j_0}}(t)| \\ &\quad + |\varphi_{Y_{j_0}}(t) - \varphi_Y(t)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

melyből következik az állítás, hiszen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\square$

D.5. Tétel. (Mozgóátlag folyamatokra vonatkozó nagy számok gyenge törvénye)

Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ egy kétoldali mozgóátlag folyamat:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

ahol $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbb{E}(|Z_1|) < \infty$, és tegyük fel, hogy $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Ekkor

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \right) \mathbb{E}(Z_1), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. A D.1. Állítás alapján tetszőleges $t \in \mathbb{Z}$ esetén a $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ sor abszolút konvergens $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt, hiszen $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Z_t|) = \mathbb{E}(|Z_1|) < \infty$.

Továbbá a nagy számok gyenge törvénye szerint tetszőleges $j \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{t-j} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Z_1), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Legyen

$$Y_{n,k} := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=-k}^k \psi_j Z_{t-j} = \sum_{j=-k}^k \psi_j \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{t-j} \right), \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén alkalmazhatjuk a 7.22. Tételt az

$$X_n := \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{t-(-k)}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{t-k} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

és $h : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{j=-k}^k \psi_j x_j, \quad \mathbf{x} = (x_{-k}, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{2k+1},$$

választásokkal, ugyanis $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} (\mathbb{E}(Z_0), \dots, \mathbb{E}(Z_0)) \in \mathbb{R}^{2k+1}$, és kapjuk, hogy

$$Y_{n,k} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sum_{j=-k}^k (\psi_j \mathbb{E}(Z_0)) = \left(\sum_{j=-k}^k \psi_j \right) \mathbb{E}(Z_0) =: Y_k, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \right) \mathbb{E}(Z_0)$, a D.4. Állítás alapján az igazolni kívánt állítás következik, ha megmutatjuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - Y_{n,k}| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{tetszőleges } \varepsilon > 0 \text{ esetén.} \quad (\text{D.2})$$

Valóban, ekkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \right) \mathbb{E}(Z_0)$, ha $n \rightarrow \infty$, és mivel $\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \right) \mathbb{E}(Z_0)$ konstans, a 7.20. Tétel (iii) része alapján kapjuk, hogy $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \right) \mathbb{E}(Z_0)$, ha $n \rightarrow \infty$.

Rátérünk most (D.2) bizonyítására. A Markov-egyenlőtlenség alapján tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - Y_{n,k}| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=-k}^k \psi_j Z_{t-j} \right| \geq \varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{|j|>k, j \in \mathbb{N}} \psi_j Z_{t-j} \right| \geq \varepsilon \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{|j|>k, j \in \mathbb{N}} \psi_j Z_{t-j} \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon n} \sum_{t=1}^n \sum_{|j|>k, j \in \mathbb{N}} |\psi_j| \mathbb{E}(|Z_{t-j}|) \\ &= \frac{\mathbb{E}(|Z_1|)}{\varepsilon} \sum_{|j|>k, j \in \mathbb{N}} |\psi_j|. \end{aligned}$$

Így

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - Y_{n,k}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|Z_1|)}{\varepsilon} \sum_{|j|>k, j \in \mathbb{N}} |\psi_j|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Felhasználva, hogy $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, kapjuk (D.2)-t. $\square$