Barczy Mátyás és Pap Gyula

Valószínűségszámítás 2. feladatsor

mobiDIÁK könyvtár

Barczy Mátyás és Pap Gyula

Valószínűségszámítás 2. feladatsor

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ
Fazekas István

Barczy Mátyás és Pap Gyula
Debreceni Egyetem

Valószínűségszámítás 2. feladatsor

Oktatási segédanyag

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

Szerzők

Barczy Mátyás
egyetemi tanársegéd
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
barczy@inf.unideb.hu

Pap Gyula
egyetemi tanár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
papgy@inf.unideb.hu

Lektor

Iglói Endre
számítástechnikai munkatárs
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem

Informatikai Kar

4010 Debrecen, Pf. 12

http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) projekt keretében készült.

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítás 1. feladatsor

1.1. Valószínűségi változók eloszlása, várható értéke

1.1.1. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, független valószínűségi változók úgy, hogy

$$P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Legyen továbbá τ a ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, hogy $P(\tau \in \mathbb{Z}_+) = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$P(\xi_\tau = 0) = P(\xi_\tau = 1) = \frac{1}{2}.$$

1.1.2. Feladat. Egy urnában N golyó van, fehérek és pirosak ($N \in \mathbb{N}$). A fehérek száma valószínűségi változó, melynek csak a várható értékét ismerjük. Legyen ez M. Egy golyót húzunk az urnából. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó fehér $\frac{M}{N}$. Miért teljesül, hogy $\frac{M}{N} \leqslant 1$?

1.1.3. Feladat. Mutassunk példát olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre, és ebben olyan A, B és C eseményekre, hogy a $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez.

1.1.4. Feladat. Egy n férőhelyes mozi egy előadására minden jegy elkelt, ahol $n \geqslant 2$. Az elsőnek érkező vendég az n hely közül véletlenszerűen választ egyet és leül oda. A másodiknak érkező vendég megnézi, hogy szabad-e a helye, ha igen leül oda, egyébként pedig a meglevő helyek közül egyenlő valószínűséggel választ egyet. Az összes többi vendég is hasonlóan jár el. Mi a valószínűsége, hogy az utolsónak érkező vendég szabadon találja a helyét?

1.1.5. Feladat. Egy szabályos kockát feldobunk n alkalommal. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 5-tel?

1.1.6. Feladat. Tekintsük az alábbi $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt:

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \qquad \mathcal{A} := 2^{\Omega}, \qquad P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) := \frac{1}{3}.$$

Legyen

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; X(\omega_1) := 1, \, X(\omega_2) := 2, \, X(\omega_3) := 3,$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; Y(\omega_1) := 2, \, Y(\omega_2) := 3, \, Y(\omega_3) := 1.$$

(i) Írjuk fel $\mathcal{A}$ elemeit!

(ii) Igazoljuk, hogy X és Y valószínűségi változók!

(iii) Határozzuk meg X és Y eloszlását!

(iv) Írjuk fel X és Y eloszlásfüggvényét!

(v) Létezik-e X-nek, illetve Y-nak sűrűségfüggvénye?

1.1.7. Feladat. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $|X| \cdot \operatorname{sgn}(Y)$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

1.1.8. Feladat. Az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

eloszlásfüggvényű eloszlást $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ paraméterű logisztikus eloszlásnak nevezzük és $Log(\mu, \sigma)$ módon jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $\xi \sim Log(0,1)$ és $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, úgy $\sigma\xi + \mu \sim Log(\mu, \sigma)$. (Tehát μ hely-, σ pedig skálaparaméter.)

(b) ha ξ egyenletes eloszlású $(0, a)$-n, akkor $\log\left(\frac{\xi}{a-\xi}\right) \sim Log(0,1)$. (Ezért hívják logisztikus eloszlásnak.)

(c) ha $\eta_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $\eta_2 \sim Exp(\lambda_2)$ függetlenek, úgy $\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \sim Log(\log\lambda_2 - \log\lambda_1, 1)$.

(d) Számítsuk ki a $Log(\mu, \sigma)$-eloszlás várható értékét!

1.1.9. Feladat. Tetszőleges $p > 0$ és $\sigma > 0$ esetén az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{p}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^p} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű eloszlást p és σ paraméterű Weibull eloszlásnak hívjuk és $W(p, \sigma)$ módon jelöljük. Mutassuk meg, hogy

(a) $W(1, \frac{1}{\lambda}) \sim Exp(\lambda)$ minden $\lambda > 0$-ra.

(b) ha $\xi \sim W(1,1)$ és $p > 0$, $\sigma > 0$, úgy $\sigma\xi^{\frac{1}{p}} \sim W(p, \sigma)$.

(c) ha $\eta_1 \sim W(p, \sigma_1)$ és $\eta_2 \sim W(p, \sigma_2)$ függetlenek, úgy $\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)$ logisztikus eloszlású, pontosabban

$$\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \sim Log\left(\log\sigma_1 - \log\sigma_2, \frac{1}{p}\right).$$

1.1.10. Feladat. Legyen (ξ, η) együttes eloszlásfüggvénye $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) := \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y} & \text{ha} \quad x > 0, \ y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat, és a $P(\xi < 1, \eta < 1)$ valószínűséget!

1.1.11. Feladat. Eloszlásfüggvény-e az alábbi két függvény?

(i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+y)}}$, $x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1.1.12. Feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon. Létezik-e $\eta := \tan\xi$ várható értéke?

1.1.13. Feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Létezik-e $\frac{1}{\xi^2}$ várható értéke? Feltéve, hogy igen, véges-e ez a várható érték?

1.1.14. Feladat. Számoljuk ki a p-edrendű, λ paraméterű Gamma-eloszlás n-edik momentumát!

1.1.15. Feladat. Legyen $\xi \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$, ahol $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}\xi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

1.1.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $X \sim \Gamma(p, \lambda)$ és $Y \sim \Gamma(q, \lambda)$ függetlenek, akkor

$$\frac{X}{X+Y} \sim \mathrm{Beta}(p, q).$$

1.1.17. Feladat. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók. Adjuk meg $X_1, \ldots, X_n$-nek egy olyan kifejezését, melynek várható értéke λ^2. (Más szavakkal, adjunk torzítatlan becslést λ^2-re.)

1.1.18. Feladat. Legyenek X_n, $n \geqslant 1$ azonos eloszlású valószínűségi változók és tegyük fel, hogy közülük bármelyik kettő különböző korrelációs együtthatója ρ. Mutassuk meg, hogy $\rho \geqslant 0$.

1.1.19. Feladat. Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy eloszlásfüggvény és $a \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x))\, \mathsf{d}x = a.$$

1.1.20. Feladat. Legyenek F_1 és F_2 eloszlásfüggvények f_1 és f_2 sűrűségfüggvényekkel. Tegyük fel, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(c) < F_2(c)$. Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{ha} \quad x \leqslant c, \\ F_2(x) & \text{ha} \quad x > c. \end{cases}$$

(i) Mutassuk meg, hogy F eloszlásfüggvény!

(ii) Jelölje P azt az F eloszlásfüggvényhez egyértelműen tartozó valószínűségi mértéket $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en, melyre $P((-\infty, x)) = F(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy P abszolút folytonos $(\lambda + \delta_c)$-re nézve, ahol λ a Lebesgue-mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en és δ_c a $c \in \mathbb{R}$ pontba koncentrálódó Dirac-mérték!

1.1.21. Feladat. Legyenek ξ és η valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn és tegyük fel, hogy véges a második momentumuk. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis? A hamisakra adjunk ellenpéldát!

(a) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.

(b) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.

(c) $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$.

(d) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$.

(e) Ha $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$, akkor ξ és η függetlenek.

(f) $\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$.

(g) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$.

(h) Ha $\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$, akkor ξ és η függetlenek.

1.1.22. Feladat. Legyen X egy valószínűségi változó. Igaz-e általában, hogy

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}X}?$$

Van-e olyan X valószínűségi változó, melyre teljesül az előző egyenelőség?

1.1.23. Feladat. Legyenek $X_n, n \geqslant 1$, független, azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók. Legyen $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén jelölje R_n az $S_0, S_1, \dots, S_n$ sorozat által felvett különböző (egész) értékek számát. Mutassuk meg, hogy

$$P(R_n = R_{n-1} + 1) = P(S_1S_2 \cdots S_n \neq 0), \quad n \in \mathbb{N},$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}R_n = P(S_k \neq 0,\ \forall\ k \geqslant 1).$$

1.1.24. Feladat. Tekintsünk egy olyan érmét, mellyel a fejdobás valószínűsége p, az írásdobásé pedig $1-p$, ahol $p \in (0, 1)$. Feldobjuk ezt az érmét n alkalommal. Szériának nevezzük dobásoknak egy olyan sorozatát, mely azonos kimenetelekből áll. Például, ha $n = 7$ és a $FFIFIIF$ dobássorozat adódott, úgy a szériák száma 5. Jelölje a továbbiakban R_n az n dobásból a szériák számát. Határozzuk meg R_n várható értékét és szórásnégyzetét!

1.1.25. Feladat. Legyen X egy valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ akkor és csak akkor, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden olyan A eseményre, melyre $P(A) < \delta$.

1.2. Konvolúció

1.2.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy k db független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege k-adrendű, λ paraméterű gamma eloszlású.

1.2.2. Feladat. Mutassunk példát két korrelálatlan, abszolút folytonos ξ és η valószínűségi változóra, melyek nem függetlenek.

1.2.3. Feladat. Legyen ξ $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $\xi + \xi^2$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

1.2.4. Feladat. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, hogy ξ Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel és η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy $\xi + \eta$-nak is van sűrűségfüggvénye, és határozzuk is meg azt!

1.2.5. Feladat. Legyenek ξ, η és ζ független valószínűségi változók, hogy ξ Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, η és ζ egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy $\xi + \eta + \zeta$ abszolút folytonos eloszlású és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

1.3. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség, Borel-Cantelli lemma

1.3.1. Feladat. Legyenek ξ és η olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, és $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{D}^2\eta = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) \leqslant 1 + \sqrt{1 - \rho^2},$$

ahol $\rho := \operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

1.3.2. Feladat. (A Csebisev-egyenlőtlenség kétdimenziós analógja) Legyenek ξ és η valószínűségi változók, és legyen $\rho := \operatorname{corr}(\xi, \eta)$. Mutassuk meg, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\big\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon\mathbb{D}\xi\big\} \cup \big\{|\eta - \mathbb{E}\eta| \geqslant \varepsilon\mathbb{D}\eta\big\}\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(1 + \sqrt{1 - \rho^2}).$$

1.3.3. Feladat. (A normális fluktuációk igazi nagyságrendjének megsejtése) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek várható értéke $\mathbb{E}X_1 = 0$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2X_1 = \sigma^2 < +\infty$. Legyen $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. A nagy számok gyenge törvénye azt mondja ki, hogy bármilyen rögzített $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon\right) = 0.$$

Bizonyítsuk be a következő (erősebb) állítást: bármilyen $+\infty$-hez tartó $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ pozitív számokból álló sorozatra, minden rögzített $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{b_n\sqrt{n}} > \varepsilon\right) = 0.$$

1.3.4. Feladat. (a): Bizonyítsuk be, hogy *a Markov-egyenlőtlenség éles a következő értelemben:* rögzítve az $0 < m \leqslant \lambda$ számokat, létezik olyan nemnegatív X valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbb{E}X = m$ és $P(X \geqslant \lambda) = m/\lambda$, azaz a ,,Markov-egyenlőtlenség telítődik".

(b): Bizonyítsuk be, hogy *a Markov-egyenlőtlenség nem éles a következő értelemben:* rögzített nemnegatív X valószínűségi változóra, melynek várható értéke véges és nem nulla, fennáll, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda P(X \geqslant \lambda)}{\mathbb{E}X} = 0.$$

1.3.5. Feladat. (Monte–Carlo-integrálás) Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mérhető, négyzetesen integrálható függvény (a Lebesgue-mérték szerint). Legyen továbbá

$$I := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad J := \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Legyenek U_n, $n \in \mathbb{N}$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók és

$$I_n := \frac{f(U_1) + f(U_2) + \cdots + f(U_n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Mutassuk meg, hogy $I_n \xrightarrow{st} I$.

(b) Legyen $a > 0$ rögzített. Igaz-e, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P\left(|I_n - I| \geqslant \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{J - I^2}{a^2}?$$

1.3.6. Feladat. Egy kaszinóban azt játsszák, hogy egymás után feldobnak egy szabályos pénzdarabot. Végtelen sok ember egymást felváltva bemegy a kaszinóba, és ott megfigyel bizonyos számú pénzfeldobást, mégpedig az n-edik ember k_n-et, $n \in \mathbb{N}$. Akinek a kaszinóban való ott-tartózkodása alatt csupa fej dobás történt, az nyer, akinek ott-tartózkodása alatt történt írás dobás is, az veszít. Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $k_n = [\log_2 n]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel végtelen sok ember távozik nyertesen;

b) ha $k_n = \left[\frac{101}{100}\log_2 n\right]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen;

c) ha $k_n = [\log_2 n + \log_2\log_2 n]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel végtelen sok ember távozik nyertesen;

d) ha $k_n = \left[\log_2 n + \frac{101}{100}\log_2\log_2 n\right]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen.

1.3.7. Feladat. Mutassunk példát olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre és ebben olyan A_n, $n \in \mathbb{N}$, eseményekre, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ és

(a) annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be $\frac{1}{2}$.

(b) annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be 0.

2. Valószínűségszámítás 2. feladatsor

2.1. Valószínűségi változók eloszlása, várható értéke

2.1.1. Feladat. Legyenek $A_i, i \in I$, és B olyan részhalmazai $\Omega \neq \emptyset$-nak, hogy $B \notin \bigcup_{i\in I} A_i$. Igaz-e, hogy ekkor $B \notin \sigma(A_i, i \in I)$?

2.1.2. Feladat. Legyenek X és Y valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn és tegyük fel, hogy $\sigma(X) = \sigma(Y)$. Igaz-e, hogy ekkor $P(X = Y) = 1$?

2.1.3. Feladat. Legyenek $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy ekkor $P_\xi = P_\eta$ akkor és csak akkor, ha $F_\xi = F_\eta$. (Azaz az eloszlás és az eloszlásfüggvény kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.)

2.1.4. Feladat. Hogyan illeszkednek a most megtanult várható érték fogalomba a diszkrét, ill. abszolút folytonos esetre (Valószínűségszámítás 1-ben) megtanult várható érték fogalmak?

2.1.5. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha ξ és η független, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor $\xi\eta$ is véges várható értékű, és $\mathbb{E}(\xi\eta) = (\mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\eta)$.

2.1.6. Feladat. Bizonyítandó, hogy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$\varphi_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{\xi_1}(t_1) \cdots \varphi_{\xi_n}(t_n), \qquad \forall\ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R},$$

ahol $\varphi_{\xi_1,\dots,\xi_n}$ és $\varphi_{\xi_{t_k}}$ a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó, illetve a ξ_k valószínűségi változó karakterisztikus függvényét jelöli.

2.1.7. Feladat. Legyen I egy nemüres halmaz. Legyen minden $i \in I$ esetén $(E_i, \mathcal{B}_i)$ egy mérhető tér, és $X_i : \Omega \to E_i$ egy valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy az $\{X_i : i \in I\}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha az I különböző elemeiből álló minden $(i_1, \dots, i_n)$ véges részhalmaz és tetszőleges $f_{i_1} : E_{i_1} \to \mathbb{R}, \dots, f_{i_n} : E_{i_n} \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvények esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{E}\Big(f_{i_1}(X_{i_1}) \cdots f_{i_n}(X_{i_n})\Big) = \mathbb{E}f_{i_1}(X_{i_1}) \cdots \mathbb{E}f_{i_n}(X_{i_n}).$$

2.1.8. Feladat. Bizonyítandó, hogy az $\{A_i : i \in I\}$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha az $\{\mathbb{1}_{A_i} : i \in I\}$ valószínűségi változók függetlenek.

2.1.9. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ és ξ valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy a következő halmaz esemény

$$\Big\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\Big\}.$$

2.1.10. Feladat. (Jensen-egyenlőtlenség) Bizonyítandó, hogy ha ξ véges várható értékű valószínűségi változó, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény, akkor $g(\mathbb{E}\xi) \leqslant \mathbb{E}g(\xi)$.

2.1.11. Feladat. (Többdimenziós Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres, Borel-mérhető, konvex halmaz, $f : C \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $X : \Omega \to C$ olyan valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}\|X\| < +\infty$ és $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ is valószínűségi változó. Ekkor $\mathbb{E}X \in C$, az $\mathbb{E}f(X)$ várható érték létezik és $\mathbb{E}f(X) \in (-\infty, +\infty]$, továbbá $\mathbb{E}f(X) \geqslant f(\mathbb{E}X)$.

2.1.12. Feladat. Legyenek ξ, $\eta : \Omega \to (0, +\infty)$ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi < +\infty$, $\mathbb{E}\eta < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}\left(\xi + \eta + \frac{1}{\xi\eta}\right) \geqslant \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta + \frac{1}{\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta} \geqslant 3.$$

2.1.13. Feladat. (Ljapunov-egyenlőtlenség) Mutassuk meg, hogy ha $0 < s < t$, akkor

$$(\mathbb{E}|\xi|^s)^{1/s} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^t)^{1/t},$$

azaz az L^p-terek normái monoton növekvőek. (Ha $(X, \mathcal{X}, m)$ egy mértéktér, akkor $p > 0$ esetén

$$L^p(X, \mathcal{X}, m) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ mérhető}, \int_X |f|^p \, \mathsf{d}m < +\infty \right\},$$

és $\|f\|_p := (\int |f|^p \, \mathsf{d}m)^{1/p}$.)

2.1.14. Feladat. (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség) Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$, $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$, akkor $\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$.

2.1.15. Feladat. (Hölder-egyenlőtlenség) Legyenek $p, q \in (1, +\infty)$, melyekre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor, ha $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$ és $\mathbb{E}|\eta|^q < +\infty$, akkor

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant \left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}|\eta|^q\right)^{1/q} = |\xi|_p|\eta|_q.$$

2.1.16. Feladat. (Minkowski-egyenlőtlenség) Ha $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$ és $\mathbb{E}|\eta|^p < +\infty$ valamely $p \in [1, +\infty)$ esetén, akkor

$$\left(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{1/p} + \left(\mathbb{E}|\eta|^p\right)^{1/p}.$$

2.2. Konvergenciafajták

2.2.1. Feladat. Miért nem követeljük meg az eloszlásban való konvergencia definíciójában, hogy

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}?$$

2.2.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az egyenletes konvergenciából következik az L_p-beli konvergencia.

2.2.3. Feladat. Legyen $0 < s < t$. Mutassuk meg, hogy az L_t-beli konvergenciából következik az L_s-beli konvergencia.

2.2.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy az egyenletes konvergenciából következik a majdnem biztos konvergencia.

2.2.5. Feladat. Legyen $0 < p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy az L_p-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

2.2.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy a majdnem mindenütti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

2.2.7. Feladat. Mutassuk meg, hogy a sztochasztikus konvergenciából következik az eloszlásban való konvergencia!

2.2.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy a P-majdnem mindenütti konvergenciából általában nem következik az egyenletes konvergencia.

2.2.9. Feladat. Legyen $p > 0$. Mutassuk meg, hogy az L_p-beli konvergenciából általában nem következik az egyenletes konvergencia.

2.2.10. Feladat. Legyen $p > 0$. Mutassuk meg, hogy az L_p-beli konvergenciából általában nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia.

2.2.11. Feladat. Legyen $p > 0$. Mutassuk meg, hogy a P-majdnem mindenütti konvergenciából általában nem következik az L_p-beli konvergencia.

2.2.12. Feladat. Legyen $p > 0$. Mutassuk meg, hogy a sztochasztikus konvergenciából általában nem következik az L_p-beli konvergencia.

2.2.13. Feladat. Mutassuk meg, hogy a sztochasztikus konvergenciából általában nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia.

2.2.14. Feladat. Legyen P a $[0,1]$ intervallumon definiált Lebesgue-mérték, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén P_n az a mérték, mely $1/n$ súlyt helyez az $(i-1)/n$, $i = 1, \ldots, n$ pontok mindegyikébe.

(i) Mutassuk meg, hogy P_n tart P-hez gyengén.

(ii) Tekintsük a $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ valószínűségi mezőt. Adjunk példát olyan $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változókra, hogy ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ eloszlása rendre P_n, $n \in \mathbb{N}$, illetve P, és fennáll, hogy $\xi_n \stackrel{st}{\to} \xi$.

2.2.15. Feladat. Mutassuk meg, ha $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $\xi_n \xrightarrow{st} c$. (Azaz ha egy valószínűségi változó sorozat eloszlásban tart egy valós konstanshoz, akkor sztochasztikusan is konvergál hozzá, ez is egyfajta részleges visszafele irány.)

2.2.16. Feladat. Az alábbi feladatban arra adunk egy újabb példát, hogy az eloszlásban való konvergenciából általában nem következik a sztochasztikus konvergencia (Stromberg 38. old. és 94. old. alapján).

Legyen $\Omega := [0,1[$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$, és $P := \lambda|_{\mathcal{A}}$, ahol λ a $[0,1[$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Legyen minden $\omega \in \Omega$ esetén $\{d_n(\omega),\, n \in \mathbb{N}\}$ az $\omega \in [0,1[$ valós szám diadikus törtbefejtése. Azaz, $\omega \in [0,1[$ esetén a $\{d_n(\omega),\, n \in \mathbb{N}\}$ sorozatot az alábbi rekurzióval definiáljuk: $d_1(\omega) := [2\omega]$, $d_{n+1}(\omega) := [2^{n+1}\omega - (d_1(\omega)2^n + \cdots + d_n(\omega)2)]$. (Itt

$[x]$ egy x valós szám egészrészét jelöli.) Analízisből tanultuk, hogy erre a $\{d_n(\omega),\, n \in \mathbb{N}\}$ sorozatra igazak az alábbiak

(a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $d_n(\omega) \in \{0, 1\}$,

(b) nem létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, melyre $d_n(\omega) = 1$ bármilyen $n > n_0$ esetén,

(c) a ω számot meghatározza a diadikus törtbefejtése az alábbi értelemben

$$\omega = \sup\left\{\frac{d_1(\omega)}{2} + \cdots + \frac{d_n(\omega)}{2^n},\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Így minden $n \in \mathbb{N}$-re egyértelműen definiáltunk egy $d_n : \Omega \to \{0, 1\}$ függvényt.

A. Mutassuk meg, hogy $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $P(d_n = 0) = P(d_n = 1) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

B. Mutassuk meg, hogy d_n eloszlásban konvergál d_1-hez, ha $n \to \infty$, de sztochasztikusan nem.

2.2.17. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ nemnegatív valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_n \to \xi) = 1$ és $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$.

2.2.18. Feladat. Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, akkor $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\xi_n^2 \to \mathbb{E}\xi^2$.

2.2.19. Feladat. Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{D}^2(\xi_n - \xi) \to 0$, akkor $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$.

2.2.20. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $c \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}\xi_n \to c$ és $\mathbb{D}^2\xi_n \to 0$, akkor $\xi_n \xrightarrow{st} c$ és $\xi_n \xrightarrow{L_2} c$.

2.2.21. Feladat. Legyen $p \geqslant 1$ és tegyük fel, hogy ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$.

(i) Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, akkor $\mathbb{E}|\xi_n|^p \to \mathbb{E}|\xi|^p$.

(ii) Legyen $p = 1$. Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$, akkor $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$. Igaz-e ennek a megfordítása?

2.2.22. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy X egy olyan valószínűségi változó, melyre $X_n \xrightarrow{st} X$. Mutassuk meg, hogy X 1-valószínűséggel konstans.

2.2.23. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy X egy olyan valószínűségi változó, melyre $X_n \stackrel{st}{\longrightarrow} X$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$P(X_n = c) = P(X = c) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.2.24. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha létezik olyan $p > 0$, mely esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, akkor $P(\xi_n \to 0) = 1$.

2.2.25. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ valószínűségi változók, és ε_n, $n \in \mathbb{N}$, olyan valós számok, hogy $\varepsilon_n \to 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon_n) < +\infty$. Bizonyítandó, hogy ekkor $P(\xi_n \to \xi) = 1$.

2.2.26. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \xi$ és $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \eta$, akkor $P(\xi = \eta) = 1$. (Azaz a sztochasztikus konvergencia határértéke 1 valószínűséggel egyértelmű.)

2.2.27. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \xi$, $\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \eta$ és $P(\xi = \eta) = 1$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

2.2.28. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \xi$ és $\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \eta$, akkor $|\xi_n| \stackrel{st}{\longrightarrow} |\xi|$, $\xi_n\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \xi\eta$, és bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} a\xi + b\eta$.

2.2.29. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikusan korlátos, azaz

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} P(|\xi_n| > R) = 0,$$

valamint $\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} 0$, akkor $\xi_n\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} 0$.

2.2.30. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} 0$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(0 \leqslant \xi_{n+1} \leqslant \xi_n) = 1$, akkor $P(\xi_n \to 0) = 1$.

2.2.31. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \xi$, $\eta_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \eta$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(\xi_n \leqslant \eta_n) = 1$, akkor $P(\xi \leqslant \eta) = 1$.

2.2.32. Feladat. Legyen ξ és η valószínűségi változók esetén

$$d(\xi, \eta) := \mathbb{E}\Big(\frac{|\xi - \eta|}{1 + |\xi - \eta|}\Big).$$

Bizonyítandók a következő állítások:

(a) d egy metrikát határoz meg a P-majdnem mindenütt egyenlő valószínűségi változók ekvivalencia-osztályain.

(b) $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} \xi$ akkor és csak akkor, ha $d(\xi_n, \xi) \to 0$.

(Ezen állítás mondanivalója, hogy metrizáljuk a sztochasztikus konvergenciát.)

2.3. Borel–Cantelli-lemma és a nagy számok erős törvénye

2.3.1. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, melyekre

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad P(\xi_n = n^2) = P(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{2n^2}.$$

Bizonyítandó, hogy ekkor $P(\xi_n \to 0) = 1$, $\mathbb{E}\xi_n \to 0$, de $\xi_n \overset{L_1}{\not\to} 0$.

2.3.2. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független valószínűségi változók, akkor létezik olyan $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \xi_n = c\Big) = 1,$$

azaz $\limsup_{n\to\infty} \xi_n$ konstans P-m.m.

2.3.3. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független valószínűségi változók, és $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan pozitív valós számok, hogy $b_n \uparrow +\infty$. Bizonyítandó, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{b_n} = c\Big) = 1.$$

2.3.4. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = -1) = 1 - p$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $p \neq 1/2$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítandó, hogy $P(\{S_n = 0 \text{ véges sok } n\text{-re}\}) = 1$.

2.3.5. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan független valószínűségi változók, hogy $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítandó, hogy $P(\{S_n = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}\}) = 1$.

2.3.6. Feladat. Legyen ξ egy valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$,

(b) bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) < +\infty$,

(c) létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) < +\infty$.

2.3.7. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy ξ_1-nek létezik a várható értéke és az $+\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\Big) = 1.$$

2.3.8. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Bizonyítandó, hogy ekkor

(a) $P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0\Big) = 1,$

(b) $P\big(\{|\xi_n| > n \ \text{ véges sok } \ n\text{-re}\}\big) = 1.$

2.3.9. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty$ bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén,

(b) $P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1,$

(c) $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1.$

(d) Igaz-e, hogy $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1$?

2.3.10. Feladat. Legyenek X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $P(X_1 \geqslant 1) = 1$. Tekintsük az alábbi, ,,véletlen együtthatós", 0-középpontú, valós hatványsort:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölje R ezen hatványsor konvergenciasugarát. Mutassuk meg, hogy R 1-valószínűséggel konstans, és R 0 vagy 1 lehet (az X_k-k közös eloszlásától függően). Mutassuk meg továbbá, hogy

$$P(R = 0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(\ln|X_1|) = +\infty.$$

2.3.11. Feladat. Legyenek $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ független, az $[1, 2]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Tekintsük az alábbi ,,véletlen együtthatós" 0-középpontú, valós hatványsort:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mutassuk meg, hogy ezen hatványsor konvergenciasugara 1-valószínűséggel 1.

2.3.12. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right)^{1/n} = \frac{1}{e}\right) = 1.$$

2.3.13. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})\, \mathsf{d}x_1 \ldots \mathsf{d}x_n = g\left(\frac{1}{e}\right).$$

2.3.14. Feladat. Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{2}{3}.$$

2.3.15. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\cdots\int_0^1\left[f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{1}{24}f''\left(\frac{1}{2}\right),$$

ahol $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény.

2.3.16. Feladat. Legyenek a, b és c páronként különböző valós számok. Határozzuk meg az

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(x+y+z)}\sin(ax+by+cz)}{\sqrt{x+y+z}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

integrál értékét!

2.3.17. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n\in\mathbb{N}\}$ olyan független valószínűségi változók, melyekre valamely $\alpha<1/2$ esetén $P(\xi_n=n^\alpha)=P(\xi_n=-n^\alpha)=1/2$. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k=0\Big)=1.$$

2.3.18. Feladat. Legyen $q\in\mathbb{N}$ és legyenek $\{\varepsilon_n\}_{n=1-q}^\infty$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\varepsilon_1|<+\infty$. Legyenek $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_q\in\mathbb{R}$ és legyen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\xi_n:=\alpha_0\varepsilon_n+\alpha_1\varepsilon_{n-1}+\cdots+\alpha_q\varepsilon_{n-q}$. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k=\mathbb{E}\varepsilon_1\cdot\sum_{j=0}^q\alpha_j\Big)=1.$$

2.3.19. Feladat. Legyenek X_n, $n\in\mathbb{N}$ valószínűségi változók, melyekre

$$P(X_n=n^2-1)=\frac{1}{n^2},\qquad P(X_n=-1)=1-\frac{1}{n^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_n=0$, $n\in\mathbb{N}$, de

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=-1\right)=1.$$

(Ez a feladat arra mutat rá, hogy a nagy számok erős törvényében fontos az azonos eloszlásúság feltétele.)

2.3.20. Feladat. Legyenek X_n, $n\in\mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X_1^2<+\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}X_iX_j\longrightarrow(\mathbb{E}X_1)^2\quad \text{P-m.m.}$$

2.3.21. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változók, hogy

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{st} 0$, azonban $P(\frac{S_n}{n} \to 0) \neq 1$. Azaz, $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan tart 0-hoz, P-majdnem mindenütt viszont nem.

2.4. Borel–Cantelli-lemma és határeloszlás-tételek

2.4.1. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

2.4.2. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} = 0\right) = 1.$$

2.4.3. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} = 1\right) = 1.$$

2.4.4. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy a $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza 1 valószínűséggel a $[0,1]$ intervallum.

2.4.5. Feladat. Legyen ξ $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, azaz ξ sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ξ karakterisztikus függvénye

$$\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.4.6. Feladat. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}$ is $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású.

2.4.7. Feladat. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, $\mathcal{N}(0,1)$-eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}}$ is $\mathcal{N}(0,1)$-eloszlású.

2.4.8. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty\Big) = P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1.$$

2.4.9. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ sor akkor és csak akkor konvergens 1-valószínűséggel, ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > 0) < +\infty$.

2.4.10. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan differenciálható függvény, melyre $f(0) = 1$, f és f' seholsem nulla $\mathbb{R}$-en. Legyen ξ_1 egy pozitív valószínűségi változó és minden $n \geqslant 1$ esetén $\xi_{n+1} = \xi_n f(\xi_n)$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 1-valószínűséggel divergens.

2.4.11. Feladat. Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók úgy, hogy $P(X_1 > 0) > 0$, (azaz $P(X_1 = 0) < 1$). Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n < x) < +\infty, \qquad x \geqslant 0,$$

ahol $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.4.12. Feladat. Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók úgy, hogy $P(X_1 > 0) > 0$, (azaz $P(X_1 = 0) < 1$). Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \geqslant x) = +\infty, \qquad x \geqslant 0,$$

ahol $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.4.13. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = \infty$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy ekkor $P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty\Big) = 1$ vagy $P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1$ teljesül.

2.4.14. Feladat. Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása:

$$P(X_1 = 1) = p, \qquad P(X_1 = 0) = 1 - p,$$

ahol $p \in (0, 1)$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$R_n := \begin{cases} \sup\Big\{k \geqslant 1 : X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{n+k-1} = 1\Big\} & \text{ha} \quad X_n = 1, \\ 0 & \text{ha} \quad X_n = 0. \end{cases}$$

(Azaz R_n az „n-edik pozícióban kezdődő tiszta 1-es sorozat hossza.”) Mutassuk meg, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log n} = \frac{1}{|\log p|}\Big) = 1.$$

2.4.15. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $P(X_1 = 0) < 1$ és $\mathbb{E}X_1 = 0$. Ekkor

$$P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1.$$

(Ez K. L. Chung és W. H. J. Fuchs egy tétele 1951-ből.) Azonban, ha X_i-k nem azonos eloszlásúak, akkor nem marad érvényben ez a tulajdonság. Adjunk erre egy (ellen)példát!

2.4.16. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ és $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor $h(\xi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(\xi)$.

2.4.17. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{1}{n} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x\Big) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ e^{-1/(\pi x)} & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

2.5. Karakterisztikus függvények, folytonossági tétel, gyenge konvergencia

2.5.1. Feladat. Melyek karakterisztikus függvények az alábbiak közül:

(a) $\frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$,

(b) e^{-t^4}, $t \in \mathbb{R}$,

(c) $\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

(d) $\cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

(e) $\frac{1+\cos(t)}{2}$, $t \in \mathbb{R}$?

2.5.2. Feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, η pedig (m, σ^2)-paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, ahol $m \in \mathbb{R}$, és $\sigma > 0$. Határozzuk meg ξ és η karakterisztikus függvényét!

2.5.3. Feladat. Legyen ξ (λ, p)-paraméterű Γ-eloszlású valószínűségi változó, ahol $\lambda > 0$ és $p > 0$. Határozzuk meg ξ karakterisztikus függvényét!

2.5.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy két független, azonos eloszlású valószínűségi változó különbsége nem lehet a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású.

2.5.5. Feladat. Mutassuk meg egy példával, hogy abból, hogy valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő a tagok karakterisztikus függvényeinek szorzatával, nem következik a tagok függetlensége.

2.5.6. Feladat. Legyen ξ az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg ξ karakterisztikus függvényét!

2.5.7. Feladat. Interpretáljuk karakterisztikus függvények segítségével a

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \neq 0,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{azonosságot!}$$

2.5.8. Feladat. Bizonyítsuk be valószínűségszámítási úton, hogy

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right), \quad t \neq 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

2.5.9. Feladat. Határozzuk meg valószínűségszámítási úton a következő integrál értékét:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^2 \cos(2x\nu)\, \mathsf{d}\nu, \quad x \in \mathbb{R},$$

ahol $\frac{\sin 0}{0} := 1$.

2.5.10. Feladat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Bin}(n, p_n)$, ahol $np_n \to \lambda \in (0, +\infty)$ és $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathrm{Pois}(\lambda)$, ha $n \to \infty$.

2.5.11. Feladat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Bin}(n, p_n)$, ahol $p_n \to p \in (0,1)$, és $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

2.5.12. Feladat. Legyen minden $\lambda \in (0, +\infty)$ esetén $\xi_\lambda \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Pois}(\lambda)$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{ha } \lambda \to \infty.$$

2.5.13. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármilyen $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left| e^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2} \right| \leqslant \frac{|y|^3}{6}.$$

2.5.14. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlásfüggvényét jelölje F. Legyen $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Az M_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók $n \to +\infty$ aszimptotikus viselkedése az $F(x)$ eloszlásfüggvény „felső farkának" aszimptotikájától függ. Bizonyítsuk be az alábbi határeloszlástételeket.

(i) Ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F(x) < 1$ és $\lim_{x\to\infty} x^\alpha(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített α, $b \in (0, +\infty)$ konstansokkal (azaz $1-F(x) \sim x^{-\alpha}$, amint $n \to +\infty$), akkor $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye

$$\begin{cases} e^{-bx^{-\alpha}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

(Az, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ ott jön be, hogy $b > 0$.)

(ii) Ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F(x) < 1$ és $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített $\lambda, b \in (0, +\infty)$ konstansokkal (azaz $1 - F(x) \sim e^{-\lambda x}$, amint $n \to +\infty$), akkor $M_n - \frac{\log n}{\lambda}$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye $\exp\{-be^{-\lambda x}\}$, $x \in \mathbb{R}$. (Az, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ egyrészt ott jön be, hogy $b > 0$, másrészt, pedig, ha $b = 0$ lenne, akkor nem kapnánk eloszlásfüggvényt.)

2.5.15. Feladat. Tekintsünk egy érmét, melyet, ha feldobunk, akkor p valószínűséggel esik a fej, ill. $1-p$ valószínűséggel az írás oldalára. Egymás után dobáljuk ezt az érmét, és jelölje N az ahhoz szükséges dobások számát, hogy megjelenjen a dobássorozatban a k-adik fej, ahol $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Mutassuk meg, hogy $2Np \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma(k, \frac{1}{2})$, amint $p \to 0$.

2.5.16. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ abszolút folytonos valószínűségi változók, f_n, $n \in \mathbb{N}$, illetve f sűrűségfüggvényekkel. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$.

2.5.17. Feladat. Adjunk példát olyan abszolút folytonos ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ valószínűségi változókra (ξ is abszolút folytonos), hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$, de $f_{\xi_n}(x)$ nem tart $f_\xi(x)$-hez egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban sem, ahol $f_\xi(x) > 0$. (Ez a feladat arra példa, hogy az 2.5.16. Feladat megfordítása nem igaz.)

2.5.18. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények sorozatára fennáll, hogy $F_n(x) \to \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ahol $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos eloszlásfüggvény, akkor bármilyen $x_n \to x \in \mathbb{R}$ sorozat esetén $F_n(x_n) \to \Phi(x)$, ha $n \to +\infty$. (A bizonyításban azt nem használjuk ki, hogy Φ eloszlásfüggvény, csak azt, hogy folytonos. Ez ott lehet érdekes, ahol Φ konstans.)

2.5.19. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ valószínűségi változók, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$. Mutassuk meg, hogy bármilyen $x_n \to +\infty$ sorozat esetén $F_{\xi_n}(x_n) \to 1$, illetve bármilyen $x_n \to -\infty$ sorozat esetén $F_{\xi_n}(x_n) \to 0$.

2.5.20. Feladat. Tegyük fel, hogy a Z_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó sorozatnak van határeloszlása, melyet Z-vel fogunk jelölni, azaz $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, ha $n \to \infty$. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n))$ létezéséből nem következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \mathbb{E}g(Z).$$

(Azaz abban a tételben, ami a gyenge konvergencia átfogalmazásairól szól fontos a korlátosság feltétele (is). Ha g korlátos is lenne, úgy már igaz lenne a dolog.)

2.6. Centrális határeloszlás-tétel

2.6.1. Feladat. Legyen adott egy $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ háromszögrendszer. Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) az $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ háromszögrendszer infinitezimális,

(ii) tetszőleges $k_n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozatra teljesül, hogy $X_{n,k_n} \xrightarrow{st} 0$, ha $n \to +\infty$,

(iii) tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_{n,k}(t) - 1| = 0,$$

ahol $\varphi_{n,k}(t) = \mathbb{E}e^{itX_{n,k}}$, $t \in \mathbb{R}$,

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left(\frac{|X_{n,k}|}{1 + |X_{n,k}|}\right) = 0.$$

2.6.2. Feladat. Legyen adott egy $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ háromszögrendszer. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$, $\mathbb{E}X_{n,k}^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n$, és

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{D}^2 X_{n,k} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy az $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ háromszögrendszer infinitezimális.

2.6.3. Feladat. Legyenek X_k, $k \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X_1 = 0, \mathbb{E}X_1^2 < +\infty$ és $\sigma := \sqrt{\mathbb{D}^2 X_1} > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\left\{\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

infinitezimális háromszögrendszer.

2.6.4. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan független valószínűségi változók, melyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 2^n)$. Legyen $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}^2 S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

de nem teljesül a Lindeberg-feltétel.

2.6.5. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $\{X_{n,k} : k = 1, \dots, n\}$ olyan független valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n$ esetén $\mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} < +\infty$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} = 0,$$

ahol $D_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n \mathbb{D}^2 X_{n,k}}$. (Ez utóbbi az ún. Ljapunov-feltétel.) Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}^2 S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

ahol $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$.

2.6.6. Feladat. Legalább hányszor kell dobni egy szabályos érmével, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől (1/2-től)? (A központi határeloszlás tétel segítségével oldjuk meg a feladatot!)

2.6.7. Feladat. Legyenek $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(\xi_j^{(n)} = \sqrt{n}) = P(\xi_j^{(n)} = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2n}, \qquad P(\xi_j^{(n)} = 0) = \frac{n-1}{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Határozzuk meg az

$$\eta_n := \frac{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n\mathbb{D}^2\xi_1^{(n)}}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

valószínűségi változó sorozat határeloszlását, amint $n \to \infty$.

2.6.8. Feladat. Legyenek a ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozat elemei q_n-paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók, ahol $q_n \to 0$, ha $n \to +\infty$. Határozzuk meg az $\eta_n := q_n\xi_n$, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó sorozat határeloszlását!

2.6.9. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Mutassuk meg a karakterisztikus függvények módszerével, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2}\, \mathsf{d}u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.6.10. Feladat. Adjunk példát olyan ξ_k, $k \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változókra, melyekre nem teljesül a centrális határeloszlás tétel! Mi áll az ilyen példák hátterében?

2.7. Feltételes várható érték és martingálok

2.7.1. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező és X olyan valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ olyan rész-σ-algebra, hogy $\mathcal{F}$ független $\sigma(X)$-től. Létezik-e olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre $P(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = c) = 1$?

2.7.2. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Létezik-e olyan X valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra, hogy X L^1-normája kisebb, mint $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$ L^1-normája?

2.7.3. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor martingál, ha

(i) $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ adaptált az $\{\mathcal{F}_n^\xi, n \in \mathbb{N}\}$ filtrációra nézve,

(ii) $\mathbb{E}|\xi_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) = \xi_n$ P-m.m., $n \in \mathbb{N}$.

2.7.4. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, nemnegatív valószínűségi változók, melyek ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak definiálva és $\mathbb{E}X_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Igaz-e, hogy $M_n := \prod_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$ martingál az $\mathcal{F}_n := \sigma(X_i, i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$ filtrációra nézve?

2.7.5. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, ahol λ a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en. Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ egy Borel-mérhető függvény. Határozzuk meg f-nek a $\{[0,1/3), [1/3,2/3), [2/3,1]\}$ partíció által generált σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értékét!

2.7.6. Feladat. Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ egységkörlapon. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X^4 \,|\, Y)$ feltételes várható értéket!

2.7.7. Feladat. Legyenek X, Y és Z független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$, $\mu > 0$, illetve $\nu > 0$ paraméterekkel. A feltételes várható érték tulajdonságait használva határozzuk meg a $P(X < Y < Z)$ valószínűséget!

2.7.8. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Legyen $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \geqslant 0$ és $S_0 := 0$. (Ekkor S_n felfogható a számegyenes egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan bolyongó részecske helyzetének az n. lépés után.) Mutassuk meg, hogy

(a) $\{S_n, n \geqslant 0\}$ martingál,

(b) $\{S_n^2 - n, n \geqslant 0\}$ martingál,

(c) $\{e^{S_n}(\cosh(1))^{-n}, n \geqslant 0\}$ martingál,

(d) $\left\{\frac{\cos(\lambda(S_n - a))}{(\cos(\lambda))^n}, n \geqslant 0\right\}$ martingál a $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 0$, filtrációra nézve, ahol $a, \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\cos(\lambda) \neq 0$,

(e) $\{\sum_{i=1}^n S_i - \frac{1}{3}S_n^3, n \geqslant 0\}$ martingál a $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 0$, filtrációra nézve!

2.7.9. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melyre $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ egy olyan rész-σ-algebra sorozat, hogy $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ martingál (a természetes filtrációjára nézve).

2.7.10. Feladat. Adott a síkon egy háromszög. Vegyünk fel az oldalain egy-egy pontot véletlenszerűen, egymástól függetlenül, majd az általuk meghatározott háromszöget nagyítsuk a kétszeresére. Az új háromszöggel ismételjük meg az eljárást, és így tovább. Jelölje T_n az n-edik lépésben kapott háromszög területét. Mutassuk meg, hogy $\{T_n : n \geqslant 0\}$ martingál, ahol T_0 a megadott háromszög területét jelöli.

2.7.11. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \geqslant 1$ és $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geqslant 1$. Mutassuk meg, hogy

$$\left\{\frac{n! e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}}, n \geqslant 1\right\}$$

martingál az $\{\mathcal{F}_n^X, n \geqslant 1\}$ filtrációra nézve.

2.7.12. Feladat. Tekintsünk egy egérkét, aki a sík egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan bolyong oly módon, hogy a $(0,0)$-ból indul és minden egész koordinátájú pontból ennek mind a 4 lehetséges egész koordinátájú szomszédjába $1/4$ valószínűséggel ugorhat. Jelölje S_n az egérke helyzetét az n. lépés után ($S_0 = (0,0)$). Mutassuk meg, hogy

$$\left\{\|S_n\|^2 - n, n \geqslant 0\right\}$$

martingál, ahol $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2.7.13. Feladat. Tekintsünk egy egérkét, aki a számegyenes egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan bolyong oly módon, hogy a 0-ból indul és minden egész koordinátájú pontból ennek mind a két lehetséges egész koordinátájú szomszédjába $1/2$ valószínűséggel ugorhat. Jelölje S_n az egérke helyzetét az n. lépés után ($S_0 = 0$). Mutassuk meg, hogy minden $t \in [0,1)$ esetén

$$\left\{Y_n := t^{n-S_n}(1 + \sqrt{1-t^2})^{S_n}, n \geqslant 0\right\}$$

martingál.

2.7.14. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(X_1 = -2) = \frac{1}{3}, \quad P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_1 = 4) = \frac{1}{6}.$$

Legyen $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \geqslant 0$ és $S_0 = 0$.

(i) $\mathbb{E}S_n =?$, $D^2 S_n =?$,

(ii) A nagy számok erős törvénye alapján mit mondhatunk az $\{S_n, n \geqslant 0\}$ sorozatról?

(iii) Keressük meg az összes olyan $\theta \in \mathbb{R}$ értéket, melyre $\{e^{\theta S_n}, n \geqslant 0\}$ martingál az $\mathcal{F}_n := \sigma(S_i, 0 \leqslant i \leqslant n)$, $n \geqslant 0$ filtrációra nézve!

2.7.15. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független valószínűségi változók

$$X_n = \begin{cases} 1 & (2n)^{-1} \text{ valószínűséggel,} \\ 0 & 1 - n^{-1} \text{ valószínűséggel,} \\ -1 & (2n)^{-1} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Legyen $Y_1 := X_1$, és $n \geqslant 2$ esetén,

$$Y_n := \begin{cases} X_n & \text{ha } Y_{n-1} = 0, \\ nY_{n-1}|X_n| & \text{ha } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál! Mutassuk meg, hogy Y_n sztochasztikusan konvergál 0-hoz, ha $n \to \infty$.

2.7.16. Feladat. Legyenek $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független valószínűségi változók, hogy

$$Z_n = \begin{cases} a_n & \frac{n^{-2}}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ 0 & 1 - n^{-2} \text{ valószínűséggel,} \\ -a_n & \frac{n^{-2}}{2} \text{ valószínűséggel,} \end{cases}$$

ahol $a_1 := 2$ és $a_n := 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j$, $n \geqslant 2$. Mutassuk meg, hogy $Y_n := \sum_{j=1}^{n} Z_j$, $n \geqslant 1$, martingál! Mutassuk meg, hogy az $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n$ határérték 1 valószínűséggel létezik, noha nem létezik olyan $M \in \mathbb{R}$, melyre $\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

2.7.17. Feladat. Legyenek $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}|X| < +\infty$, $\mathbb{E}|Y| < +\infty$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X \mid Y) = Y$ és $\mathbb{E}(Y \mid X) = X$. Mutassuk meg, hogy $P(X = Y) = 1$!

2.7.18. Feladat. **(Teljes szórásnégyzet tétele)** Legyenek X és Y valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(\operatorname{Var}(X \mid Y)) + \operatorname{Var}(\mathbb{E}(X \mid Y)).$$

2.7.19. Feladat. Adjunk példát olyan ξ és η valószínűségi változókra, hogy $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ konstans 1-valószínűséggel, de ξ és η nem függetlenek.

2.7.20. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású, pozitív valószínűségi változók F (közös) eloszlásfüggvénnyel, hogy $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}X_1 < +\infty$. (Ekkor X_n, $n \in \mathbb{N}$-re gondolhatunk úgy, mint egy termékre vonatkozóan az egymást követő árajánlatok.) Legyen $A > 0$ rögzített és

$$N := \min\{k \geqslant 1 \mid X_k \geqslant A\}.$$

Legyen $\alpha := P(X_1 \geqslant A)$ és tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$.

(i) Mutassuk meg, hogy $P(N < +\infty) = 1$.

(ii) Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}X_N = \alpha^{-1} \int_A^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x) = \mathbb{E}(X_1 \mid X_1 \geqslant A).$$

(Interpretáció: az veheti meg a terméket, akinek árajánlata először nagyobb vagy egyenlő, mint A, és X_N a ,,nyertes" árajánlat.)

(iii) Feltételezve, hogy a közös eloszlás $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlás, mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_N = A + 1/\lambda$. (Azaz ekkor $\mathbb{E}X_N = A + \mathbb{E}X_1$.)

(iv) Mutassuk meg, hogy X_N és N függetlenek!

2.8. Többdimenziós normális eloszlás

2.8.1. Feladat. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és tekintsünk egy k-dimenziós normális eloszlású ξ valószínűségi változót, melynek várható érték vektora $m \in \mathbb{R}^k$ és kovariancia mátrixa D. Ismert, hogy ha D nemelfajult, azaz $\det(D) \neq 0$, akkor ξ abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det(D)}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle D^{-1}(x-m), (x-m)\big\rangle\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Legyen a továbbiakban $k = 2$, $m \in \mathbb{R}^2$ és D egy (2×2)-es invertálható kovarianciamátrix. Írjuk fel f_ξ-t ξ koordinátái várható értékeinek, szórásainak és korrelációs együtthatójának függvényeként mátrix műveletek nélküli alakban!

2.8.2. Feladat. Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ egy 2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó $m \in \mathbb{R}^2$ várható érték vektorral és D invertálható kovarianciamátrixxal. Határozzuk meg ξ_1-nek a $\xi_2 = x_2$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlását, ahol $x_2 \in \mathbb{R}$.

2.8.3. Feladat. Adjunk példát olyan (ξ, η) 2-dimenziós valószínűségi vektorváltozóra, melynek koordinátái normális eloszlásúak, de (ξ, η) nem normális eloszlású.

2.8.4. Feladat. Legyen (X_1, X_2, X_3, X_4) 4-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható érték vektora $m := (10, 0, -10, 1)^\top$ és kovariancia mátrixa

$$D := \begin{pmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük le, hogy (X_1, X_2, X_3, X_4) abszolút folytonos eloszlású és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

2.8.5. Feladat. Legyen (X, Y, Z) 3-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x,y,z) := \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{8}\Big(2x^2+4y^2-2y(z+5)+(z+5)^2\Big)\right\}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Határozzuk meg (X, Y, Z) kovariancia mátrixát!

2.8.6. Feladat. Ledobunk a $[-1, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint 2700 db pontot. Adjunk jó közelítő becslést egy standard normális eloszlástáblázat segítségével annak a valószínűségére, hogy a kapott pontok értékeinek az összege nagyobb, mint 15, és négyzetösszege nagyobb, mint 880. (A feladat úgy értendő, hogy annak a valószínűségét kell kiszámítani, hogy mind a két esemény bekövetkezik.)

2.8.7. Feladat. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók ugyanazzal a várható értékkel és szórásnégyzettel (azaz $\xi_1, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlásúak is). Mutassuk meg, hogy $\overline{\xi} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k$ és $(\xi_1 - \overline{\xi}, \ldots, \xi_n - \overline{\xi})$ függetlenek, továbbá, hogy $(\xi_1 - \overline{\xi}, \ldots, \xi_n - \overline{\xi})$ eloszlása nem függ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ közös várható értékétől.

2.8.8. Feladat. Legyen (X, Y, Z) egy 3-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek 0 várható érték vektora és kovarianciamátrixa a következő alakú

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_3 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_2 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $\rho_1 = \operatorname{corr}(X, Y)$, $\rho_2 = \operatorname{corr}(Y, Z)$ és $\rho_3 = \operatorname{corr}(X, Z)$. Mutassuk meg, hogy

$$P(X>0, Y>0, Z>0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\Big(\arcsin(\rho_1) + \arcsin(\rho_2) + \arcsin(\rho_3)\Big).$$

(Mivel $|\rho_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3$, kapjuk, hogy $\arcsin(\rho_i)$, $i = 1, 2, 3$, értelmezett.)

2.8.9. Feladat. Minden $p \in \mathbb{N}$ esetén legyen ξ_p egy p-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, vezessük be továbbá tetszőleges $a \in \mathbb{R}^p$ esetén a $H_p(a) := \mathbb{E}|\xi_p + a|$ jelölést. Mutassuk meg, hogy $p > 1$ esetén

(i)

$$H_p(a) = (p-1)\int_0^\infty H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}}\right) \frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}} \, \mathsf{d}r,$$

(ii)

$$H_p(a) = \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}} H_1(0) \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{2}\right)^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{(-1)^{p+2r-2}+1}{2}} \frac{(p+2r-1)!!}{(p+2r-2)!!},$$

ahol $\lambda := \sum_{i=1}^p a_i^2$.

3. Valószínűségszámítás 2. felmérő feladatsorok

3.1. 2001. év példái

3.1.1. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy a következő halmaz esemény:

$$\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}.$$

3.1.2. Feladat. Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású $\frac{1}{2}$ paraméterrel.

3.1.3. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

3.1.4. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha ξ_n tart ξ-hez sztochasztikusan, illetve ha η_n tart η-hoz sztochasztikusan, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart $a\xi + b\eta$-hoz sztochasztikusan.

3.1.5. Feladat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén P_n az a valószínűségi mérték $[0,1]$-en, mely $\frac{1}{n}$ súlyt helyez az $\frac{i-1}{n}$, $i = 1, \cdots, n$ pontok mindegyikébe. Mutassuk meg, hogy P_n gyengén konvergál a $[0,1]$-en értelmezett Lebesgue-mértékhez.

3.2. 2003. év példái

3.2.1. Feladat. (2003, II./A1) Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \to \xi$ és $\xi_n \to \eta$ sztochasztikusan, akkor $P(\xi = \eta) = 1$.

3.2.2. Feladat. (2003, II./A2) Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $P(\xi = k) = P(\eta = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$ eloszlással. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $n = 0, 1, \ldots$ és $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén

$$P\big(\xi = k \,|\, \xi + \eta = n\big) = \frac{1}{n+1}.$$

3.2.3. Feladat. (2003, II./A3) Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Bizonyítandó, hogy

$$P\Big(\big\{|\xi_n| > n \text{ véges sok } n \in \mathbb{N}\text{-re}\big\}\Big) = 1.$$

3.2.4. Feladat. (2003, II./A4) Bizonyítandó, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_n binomiális eloszlású (n, p_n) paraméterekkel, $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ és $p_n \to p \in (0,1)$, akkor $\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, amint $n \to \infty$.

3.2.5. Feladat. (2003, II./B1) Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ sztochasztikusan és $P(\xi = \eta) = 1$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

3.2.6. Feladat. (2003, II./B2) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $\mathbb{E}\xi_k = 0$, $\mathbb{E}\xi_k^2 = 1$ és $\mathbb{E}\xi_k^4 < +\infty$, ha $k = 1, \dots, n$. Legyen $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy $\mathbb{E}(S_n^3) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k^3)$ és $\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k^4) + 3k(k-1)$.

3.2.7. Feladat. (2003, II./B3) Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Bizonyítandó, hogy

$$P\Big(\Big\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0\Big\}\Big) = 1.$$

3.2.8. Feladat. (2003, II./B4) Bizonyítandó, hogy ha minden $\lambda \in (0, +\infty)$ esetén ξ_λ Poisson eloszlású λ paraméterrel, akkor $\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, amint $\lambda \to +\infty$.

3.3. 2004. év példái

3.3.1. Feladat. (2004, I./A1) Legyenek X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók, közös sűrűségfüggvényük $f(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét!

3.3.2. Feladat. (2004, I./A2) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz és $P(\xi = \eta) = 1$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

3.3.3. Feladat. (2004, I./A3) Mutassuk meg, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikusan korlátos, azaz

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} P(|\xi_n| > R) = 0,$$

valamint η_n tart sztochasztikusan 0-hoz, akkor $\xi_n\eta_n$ tart sztochasztikusan 0-hoz.

3.3.4. Feladat. (2004, I./A4) Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók és $p > 0$ olyan, hogy $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $P(\xi_n \to 0) = 1$.

3.3.5. Feladat. (2004, I./B1) Legyenek X és Y független, a $[-1/2, 1/2]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét!

3.3.6. Feladat. (2004, I./B2) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart sztochasztikusan $a\xi + b\eta$-hoz.

3.3.7. Feladat. (2004, I./B3) Legyen c_n, $n \in \mathbb{N}$ egy konvergens valós számsorozat, ν_n, $n \in \mathbb{N}$ pedig pozitív egész értékű valószínűségi változók sorozata, hogy $P(\nu_n \to \infty) = 1$. Mutassuk meg, hogy c_{ν_n} tart sztochasztikusan a c_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozat határértékéhez.

3.3.8. Feladat. (2004, I./B4) Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók és $p > 0$ olyan, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $P(\xi_n \to 0) = 1$.

3.3.9. Feladat. (2004, II./A1) Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

3.3.10. Feladat. (2004, II./A2) Legyen X egy nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$.

3.3.11. Feladat. (2004, II./A3) Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\right) = 1.$$

3.3.12. Feladat. (2004, II./A4) Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x\to\infty} x^\alpha(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített $\alpha, b \in (0, +\infty)$ konstansokkal. Mutassuk meg, hogy $n^{-1/\alpha} M_n$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye

$$\begin{cases} e^{-bx^{-\alpha}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

3.3.13. Feladat. (2004, II./A5) Legyenek $X_n, n \in \mathbb{Z}_+$ független, azonos eloszlású (valós) valószínűségi változók, hogy $P(X_1 \geqslant 1) = 1$. Tekintsük az alábbi („véletlen együtthatós") hatványsort

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölje R ezen hatványsor konvergenciasugarát. Mutassuk meg, hogy $P(R \in \{0, 1\}) = 1$.

3.3.14. Feladat. (2004, II./B1) Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1.$$

3.3.15. Feladat. (2004, II./B2) Legyen X egy nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$.

3.3.16. Feladat. (2004, II./B3) Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\right) = 1.$$

3.3.17. Feladat. (2004, II./B4) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített $\lambda, b \in (0, +\infty)$ konstansokkal. Mutassuk meg, hogy $M_n - \frac{\ln n}{\lambda}$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye $\exp\{-be^{-\lambda x}\}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.3.18. Feladat. (2004, II./B5) Legyenek $X_n, n \in \mathbb{Z}_+$ független, azonos eloszlású (valós) valószínűségi változók, hogy $P(X_1 \geqslant 1) = 1$. Tekintsük az alábbi („véletlen együtthatós") hatványsort

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölje R ezen hatványsor konvergenciasugarát. Mutassuk meg, hogy $P(R \in \{0, 1\}) = 1$.

3.4. 2005. év példái

3.4.1. Feladat. (2005, I./1) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta := \frac{\xi}{1+\xi}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét!

3.4.2. Feladat. (2005, I./2) Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 3$ és $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{D}^2\eta = 9$. Határozzuk meg $\xi + \eta$ és $\xi \cdot \eta$ korrelációs együtthatóját!

3.4.3. Feladat. (2005, I./3) A konvolúciós képletet felhasználva mutassuk meg, hogy k db független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege k-adrendű, λ paraméterű gamma eloszlású.

3.4.4. Feladat. (2005, I./4) Legyenek ξ és η független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $\xi + \eta$ momentumgeneráló függvényét!

3.4.5. Feladat. (2005, I./5) Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, akkor $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\xi_n^2 \to \mathbb{E}\xi^2$.

3.4.6. Feladat. (2005, II./1) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart sztochasztikusan $a\xi + b\eta$-hoz.

3.4.7. Feladat. (2005, II./2) Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

3.4.8. Feladat. (2005, II./3) Az inverziós formulát felhasználva mutassuk meg, hogy tetszőleges $a > 0$, $b > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \pi \min(a, b).$$

3.4.9. Feladat. (2005, II./4) Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Feltételezzük, hogy X_1 karakterisztikus függvénye φ_{X_1} differenciálható 0-ban és $\varphi'_{X_1}(0) = i\mu$, ahol $\mu \in \mathbb{R}$. A folytonossági tételt felhasználva mutassuk meg, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

3.4.10. Feladat. (2005, II./5) Legyen X egy olyan nemnegatív valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$. (Segítség: Markov-egyenlőtlenség.)

3.5. 2006. év példái

3.5.1. Feladat. (2006, I./1) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. A konvolúciós képletet felhasználva mutassuk meg, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású $\frac{1}{2}$ paraméterrel.

3.5.2. Feladat. (2006, I./2) Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, hogy ξ p-edrendű, λ paraméterű gamma eloszlású és η p-edrendű, $\frac{\lambda}{2}$ paraméterű gamma eloszlású, ahol $p > 0, \lambda > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}(\xi + \eta)^3 = \frac{9p(p+1)(3p+2)}{\lambda^3}.$$

3.5.3. Feladat. (2006, I./3) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(-1, 2)$ intervallumon. Legyen $\eta := \xi^3$. Határozzuk meg η eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

3.5.4. Feladat. (2006, I./4) Legyenek X és Y diszkrét valószínűségi változók, hogy

$$P(X = x, Y = y) = \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)}, \qquad x, y \in \mathbb{N},$$

ahol $C > 0$ konstans. (Itt $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.)

(i) Határozzuk meg C értékét!

(ii) Határozzuk meg X és Y eloszlását!

(iii) Határozzuk meg X várható értékét!

3.5.5. Feladat. (2006, I./5) Legyenek X és Y független valószínűségi változók, hogy X exponenciális eloszlású λ paraméterrel és Y exponenciális eloszlású μ paraméterrel, ahol $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Legyen továbbá $U := \min(X, Y)$.

(i) Határozzuk meg a $P(U = X)$ valószínűséget!

(ii) Határozzuk meg U várható értékét!

3.5.6. Feladat. (2006, I./6) (i) Mikor nevezünk egy ξ valószínűségi változót diszkrét eloszlásúnak, illetve abszolút folytonos eloszlásúnak?

(ii) Mit értünk egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényén?

3.5.7. Feladat. (2006, II./1) Legyenek η_1 és η_2 független, 1-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\log\big(\eta_1/\eta_2\big)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \frac{1}{1 + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3.5.8. Feladat. (2006, II./2) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg ξ karakterisztikus függvényét!

3.5.9. Feladat. (2006, II./3) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen ξ_n n-edrendű, p_n-paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, ahol $np_n \to \lambda \in (0, +\infty)$ és $p_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Pois}(\lambda)$, ha $n \to \infty$.

3.5.10. Feladat. (2006, II./4) Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ egy 2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó $m \in \mathbb{R}^2$ várható érték vektorral és D invertálható kovarianciamátrixxal. Határozzuk meg ξ_1-nek a $\xi_2 = x_2$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlását, ahol $x_2 \in \mathbb{R}$.

3.5.11. Feladat. (2006, II./5) Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(4, 4)$, $(6, 4)$, $(6, 6)$ és $(4, 6)$ csúcspontokkal rendelkező négyzeten. Legyen $A := (1, 2)$ és $B := (\xi, \eta)$, jelölje továbbá P az x tengely azon pontját, melyre $AP + PB$ minimális. Határozzuk meg P várható értékét! (Itt AP, illetve PB az A és P, ill. a P és B pontok által meghatározott szakasz hosszát jelöli.)

3.5.12. Feladat. (2006, II./6) Legyen (X, Y) abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó az alábbi sűrűségfüggvénnyel

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)) & \text{ha } \ |x| < 1 \ \text{ és } \ |y| < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy

(i) X és Y nem függetlenek,

(ii) $\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{X+Y}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. (Itt φ karakterisztikus függvényt jelöl.)

3.6. 2009. év példái

3.6.1. Feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Létezik-e $\frac{1}{\xi^2}$ várható értéke? Feltéve, hogy igen, véges-e ez a várható érték?

3.6.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart sztochasztikusan $a\xi + b\eta$-hoz.

3.6.3. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, melyekre

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad P(\xi_n = n^2) = P(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{2n^2}.$$

Igaz-e, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozat 1-valószínűséggel konvergál 0-hoz? Igaz-e, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozat L_1-ben konvergál 0-hoz?

3.6.4. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók, melyekre

$$P(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, de

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -1\right) = 1.$$

3.6.5. Feladat. Legyenek a ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozat elemei q_n-paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók, ahol $q_n \to 0$, ha $n \to +\infty$. Határozzuk meg az $\eta_n := q_n\xi_n$, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó sorozat határeloszlását! (Feltételezzük, hogy $q_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$.)

3.6.6. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen ξ_n normális eloszlású valószínűségi változó $(n, 1)$-paraméterekkel. Feszes-e a $\{P_{\xi_n}, n \in \mathbb{N}\}$ mértékcsalád, ahol P_{ξ_n} a ξ_n valószínűségi változó eloszlását jelöli?