Diffusion bridges and affine processes

Habilitációs cikkgyűjtemény tézisei

Dr. Barczy Mátyás
Debreceni Egyetem, Informatikai Kar
Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszék

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen
2015

1 Diffusion bridges

This part is based on the articles Barczy and Kern [5], Barczy and Pap [8], Barczy and Iglói [4] and Barczy et al. [6].

1.1 Representations of multidimensional linear process bridges

In Barczy and Kern [5], we deal with deriving bridges from general multidimensional linear processes giving their integral representations (in terms of a standard Wiener process) and their so-called anticipative representations. Our results are also specialized for the one-dimensional case.

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}_+$ denote the set of positive integers, real numbers and non-negative real numbers, respectively. For all $n, m \in \mathbb{N}$, let $\mathbb{R}^{n\times m}$ and I_n denote the set of $n \times m$ matrices with real entries and the $n \times n$ identity matrix, respectively. For all $d, p \in \mathbb{N}$, let us consider a general d-dimensional linear process given by the linear stochastic differential equation (SDE)

$$\mathrm{d}\mathbf{Z}_t = \big(Q(t)\mathbf{Z}_t + \mathbf{r}(t)\big)\,\mathrm{d}t + \Sigma(t)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.1.1}$$

with continuous functions $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\Sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times p}$ and $\mathbf{r} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, where $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$ is a p-dimensional standard Wiener process on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ satisfying the usual conditions. It is known that there exists a strong solution of the SDE (1.1.1), namely

$$\mathbf{Z}_t = \Phi(t)\left[\mathbf{Z}_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\Sigma(s)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_s\right], \qquad t \geqslant 0,$$

where $\mathbf{Z}_0$ is independent of the Wiener process $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$, Φ is a solution to the deterministic matrix differential equation $\Phi'(t) = Q(t)\Phi(t)$, $t \geqslant 0$, with $\Phi(0) = I_d$, and strong uniqueness for the SDE (1.1.1) holds. The unique solution of the above matrix differential equation can be given as $\Phi(t) = E(t, 0)$, $t \geqslant 0$, in terms of the evolution matrices (also known as state transition matrices)

$$E(t,s) = I_d + \int_s^t Q(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{k-1}} Q(t_1)\cdots Q(t_k)\,\mathrm{d}t_k \mathrm{d}t_{k-1}\cdots \mathrm{d}t_1$$

for $s, t \geqslant 0$. One can check that the unique strong solution of the SDE (1.1.1) can now be written as

$$\mathbf{Z}_t = E(t,0)\mathbf{Z}_0 + \int_0^t E(t,s)\mathbf{r}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t E(t,s)\Sigma(s)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_s, \qquad t \geqslant 0.$$

Here and in what follows we assume that $\mathbf{Z}_0$ has a Gauss distribution independent of the Wiener process $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$, and we will call the Gauss-Markov process process $(\mathbf{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ a d-dimensional linear process. For any $0 \leqslant s \leqslant t$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ let us define

$$\mathbf{m}^+_{\mathbf{x}}(s,t) := \mathbf{x} + \int_s^t E(s,u)\mathbf{r}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{and} \quad \mathbf{m}^-_{\mathbf{x}}(s,t) := \mathbf{x} - \int_s^t E(t,u)\mathbf{r}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Then for any $0 \leqslant s < t$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ the conditional distribution of $\mathbf{Z}_t$ given $\mathbf{Z}_s = \mathbf{x}$ is Gauss with mean

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}}(s,t) := E(t,s)\mathbf{m}_{\mathbf{x}}^{+}(s,t) = E(t,s)\mathbf{x} + \int_s^t E(t,u)\mathbf{r}(u)\mathrm{d}u,$$

and with covariance matrix of Kalman type

$$\kappa(s,t) := \int_s^t E(t,u)\Sigma(u)\Sigma(u)^\top E(t,u)^\top \,\mathrm{d}u.$$

The matrices $\kappa(s,t)$ are symmetric and positive semi-definite for all $0 \leqslant s < t$, and in what follows we put the following assumption:

$$\kappa(s,t) \text{ is positive definite for all } 0 \leqslant s < t. \tag{1.1.2}$$

Generalizing the formula (2.7) in Fitzsimmons, Pitman and Yor [12] to multi-dimensional non time-homogeneous Markov processes, for fixed $T > 0$ we are looking for a Markov process $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ with initial distribution $\mathbb{P}(\mathbf{U}_0 = \mathbf{a}) = 1$ and with transition densities

$$p_{s,t}^{\mathbf{U}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{p_{s,t}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, p_{t,T}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{y},\mathbf{b})}{p_{s,T}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{b})}, \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leqslant s < t < T, \tag{1.1.3}$$

provided that such a process exists. To properly speak of $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ as a process bridge, we shall study the limit behavior of $\mathbf{U}_t$ as $t \uparrow T$, namely, we shall show that $\mathbf{U}_t \to \mathbf{b} =: \mathbf{U}_T$ almost surely and also in L^2 as $t \uparrow T$ (see Theorem 1.1.1).

For $T > 0$, $0 \leqslant s < t < T$ and $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, let us define

$$\begin{aligned}
\Gamma(s,t) &:= E(s,t)\kappa(s,t) = \int_s^t E(s,u)\Sigma(u)\Sigma(u)^\top E(t,u)^\top \,\mathrm{d}u,\\
\Sigma(s,t) &:= \Gamma(t,T)\Gamma(s,T)^{-1}\Gamma(s,t),
\end{aligned}$$

and

$$\mathbf{n}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(s,t) := \Gamma(t,T)\Gamma(s,T)^{-1}\mathbf{m}_{\mathbf{a}}^{+}(s,t) + \Gamma(s,t)^\top \big(\Gamma(s,T)^\top\big)^{-1}\mathbf{m}_{\mathbf{b}}^{-}(t,T).$$

The next result is about the existence of a Markov process $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ with the desired properties.

Theorem 1.1.1 ([5]) *Let us suppose that condition* (1.1.2) *holds. For fixed* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ *and* $T > 0$, *let the process* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T)}$ *be given by*

$$\mathbf{U}_t := \mathbf{n}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(0,t) + \Gamma(t,T)\int_0^t \Gamma(u,T)^{-1}\Sigma(u)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_u, \quad t \in [0,T). \tag{1.1.4}$$

Then for any $t \in [0,T)$ *the distribution of* $\mathbf{U}_t$ *is Gauss with mean* $\mathbf{n}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(0,t)$ *and covariance matrix* $\Sigma(0,t)$. *Especially,* $\mathbf{U}_t \to \mathbf{b}$ *almost surely (and hence in probability) and in* L^2 *as* $t \uparrow T$. *Hence the process* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T)}$ *can be extended to an almost surely (and hence stochastically) and* L^2*-continuous process* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ *with* $\mathbf{U}_0 = \mathbf{a}$ *and* $\mathbf{U}_T = \mathbf{b}$. *Moreover,* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ *is a Gauss-Markov process and for any* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ *and* $0 \leqslant s < t < T$ *the transition density* $\mathbb{R}^d \ni \mathbf{y} \mapsto p_{s,t}^{\mathbf{U}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *of* $\mathbf{U}_t$ *given* $\mathbf{U}_s = \mathbf{x}$ *is given by*

$$p_{s,t}^{\mathbf{U}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det\Sigma(s,t)}}\,\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big\langle \Sigma(s,t)^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{n}_{\mathbf{x},\mathbf{b}}(s,t)),\mathbf{y}-\mathbf{n}_{\mathbf{x},\mathbf{b}}(s,t)\Big\rangle\Big\},$$

which coincides with $p_{s,t}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, p_{t,T}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{y},\mathbf{b})/p_{s,T}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{b})$.

Definition 1.1.2 ([5]) *Let $(\mathbf{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ be the d-dimensional linear process given by the SDE* (1.1.1) *with an initial Gauss random variable $\mathbf{Z}_0$ independent of $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$ and let us assume that condition* (1.1.2) *holds. For fixed $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ and $T > 0$, the process $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ defined in Theorem 1.1.1 is called a linear process bridge from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$ over $[0, T]$ derived from $\mathbf{Z}$. More generally, we call any almost surely continuous (Gauss) process on the time interval $[0, T]$ having the same finite-dimensional distributions as $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ a multidimensional linear process bridge from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$ over $[0, T]$ derived from $\mathbf{Z}$.*

Note that Definition 1.1.2 can be reformulated alternatively in a way that by a bridge from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$ over $[0, T]$ derived from $\mathbf{Z}$ we mean any almost surely continuous Gauss-Markov process $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ with $\mathbf{U}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{U}_T = \mathbf{b}$ and with transition densities $(p^{\mathbf{U}}_{s,t})_{0\leqslant s<t<T}$ satisfying (1.1.3). Note also that the law of $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ on $\big(C([0, T]), \mathcal{B}(C([0, T]))\big)$ is uniquely determined. Formula (1.1.4) can be considered as an integral representation of the linear process bridge $\mathbf{U}$.

In the next theorem we present an SDE satisfied by the bridge $\mathbf{U}$.

Theorem 1.1.3 ([5]) *Let us suppose that condition* (1.1.2) *holds. The process $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T)}$ defined by* (1.1.4) *is a strong solution of the linear SDE*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{U}_t =& \Big[\big(Q(t) - \Sigma(t)\Sigma(t)^\top E(T, t)^\top \Gamma(t, T)^{-1}\big)\mathbf{U}_t \\ &+ \Sigma(t)\Sigma(t)^\top \big(\Gamma(t, T)^\top\big)^{-1} \mathbf{m}^-_{\mathbf{b}}(t, T) + \mathbf{r}(t)\Big]\mathrm{d}t + \Sigma(t)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_t \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

for $t \in [0, T)$ and with initial condition $\mathbf{U}_0 = \mathbf{a}$, and strong uniqueness for the SDE (1.1.5) *holds.*

Now we turn to give alternative representations of the bridge. The next theorem is about the existence of a so-called anticipative representation of the bridge which is a weak solution to the bridge SDE (1.1.5).

Theorem 1.1.4 ([5]) *Let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ and $T > 0$ be fixed. Let $(\mathbf{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ be the linear process given by the SDE* (1.1.1) *with initial condition $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ and let us assume that condition* (1.1.2) *holds. Then the process $(\mathbf{Y}_t)_{t\in[0,T]}$ given by*

$$\mathbf{Y}_t := \Gamma(t, T)\Gamma(0, T)^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{Z}_t - \Gamma(0, t)^\top \big(\Gamma(0, T)^\top\big)^{-1} (\mathbf{Z}_T - \mathbf{b}) \tag{1.1.6}$$

for $t \in [0, T]$ coincides in law the linear process bridge $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$ over $[0, T]$ derived from $\mathbf{Z}$.

In Barczy and Kern [5], we present a usual conditioning property for multidimensional linear processes (see [5, Proposition 2.8]) as well, and one can find a Section 3 in which we specialize our results for the one-dimensional case; especially, we study one-dimensional Ornstein-Uhlenbeck bridges.

1.2 Explicit formulas for Laplace transforms of certain functionals of some time inhomogeneous diffusions

In Barczy and Pap [8], we deal with deriving explicit formulas for Laplace transforms of certain functionals of some time inhomogeneous diffusions. These functionals play an important role in theory of parameter estimation for these processes. Several contributions have already been appeared containing explicit formulae for Laplace transforms of functionals of diffusion processes, but most of the literature concern time homogeneous diffusion processes.

Let $T \in (0, \infty]$ be fixed. Let $b : [0, T) \to \mathbb{R}$ and $\sigma : [0, T) \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable functions. Suppose that $\sigma(t) > 0$ for all $t \in [0, T)$, and $b(t) \neq 0$ for all $t \in [0, T)$ (and hence $b(t) > 0$ for all $t \in [0, T)$ or $b(t) < 0$ for all $t \in [0, T)$). For all $\alpha \in \mathbb{R}$, consider the process $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ given by the stochastic differential equation (SDE)

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(\alpha)} = \alpha\, b(t) X_t^{(\alpha)}\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}B_t, \qquad t \in [0, T), \\ X_0^{(\alpha)} = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

The SDE (1.2.1) is a special case of Hull–White (or extended Vasicek) model. Assuming

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{b(t)}{\sigma(t)^2}\right) = -2K\frac{b(t)^2}{\sigma(t)^2}, \qquad t \in [0, T), \tag{1.2.2}$$

with some $K \in \mathbb{R}$, we derive an explicit formula for the joint Laplace transform of

$$\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{and} \qquad (X_t^{(\alpha)})^2 \tag{1.2.3}$$

for all $t \in [0, T)$ and for all $\alpha \in \mathbb{R}$, see Theorem 1.2.1. The random variables in (1.2.3) appear in the maximum likelihood estimator (MLE) $\widehat{\alpha}_t$ of α based on continuous time observations $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$. This is the reason why it is useful to calculate their joint Laplace transform explicitly. On the role of the condition (1.2.2), see Barczy and Pap [8, Remark 4]. The drift and diffusion coefficients of the SDE (1.2.1) satisfy the local Lipschitz condition and the linear growth condition, and hence it has a pathwise unique strong solution

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t \sigma(s) \exp\left\{\alpha \int_s^t b(u)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0, T)$$

having continuous sample paths. Note also that for all $s \in [0, T)$, $X_s^{(\alpha)}$ is normally distributed with mean 0 and with variance

$$V(s; \alpha) := \mathbb{E}\left(X_s^{(\alpha)}\right)^2 = \int_0^s \sigma(u)^2 \exp\left\{2\alpha \int_u^s b(v)\,\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u, \qquad s \in [0, T),$$

and then, by the conditions on b and σ, $V(s; \alpha) > 0$ for all $s \in (0, T)$. The differential equation (1.2.2) leads to a Bernoulli type one having solution

$$b(t) = \frac{\sigma(t)^2}{2\left(K\int_0^t \sigma(s)^2\,\mathrm{d}s + C\right)}, \qquad t \in [0, T), \tag{1.2.4}$$

where $C \in \mathbb{R}$ is such that the denominator $K\int_0^t \sigma(s)^2\,\mathrm{d}s + C \neq 0$ for all $t \in [0, T)$.

Theorem 1.2.1 ([8]) *Let $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ be the process given by the SDE* (1.2.1) *where b is given by* (1.2.4)*. Then for all $\mu>0$, $\nu\geqslant 0$, and $t\in[0,T)$, we have*

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\mu\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s-\nu[X_t^{(\alpha)}]^2\right\}$$

$$=\frac{B_{K,C}(t)^{\frac{K-\alpha}{4}}}{\sqrt{\cosh\left(\frac{\sqrt{2\mu+(\alpha-K)^2}}{2}\ln(B_{K,C}(t))\right)-\frac{\alpha-K-4\nu\left(K\int_0^t\sigma(s)^2\,\mathrm{d}s+C\right)}{\sqrt{2\mu+(\alpha-K)^2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{2\mu+(\alpha-K)^2}}{2}\ln(B_{K,C}(t))\right)}},$$

where

$$B_{K,C}(t):=\begin{cases}\left(1+\frac{K}{C}\int_0^t\sigma(s)^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{K}} & \text{if } K\neq 0,\\ \exp\left\{\frac{1}{C}\int_0^t\sigma(s)^2\,\mathrm{d}s\right\} & \text{if } K=0,\end{cases}\qquad t\in[0,T).$$

For all $\alpha\in\mathbb{R}$ and $t\in(0,T)$, let $\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}$ denote the distribution of the process $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ on $\big(C([0,t]),\mathcal{B}(C([0,t]))\big)$, where $C([0,t])$ and $\mathcal{B}(C([0,t]))$ denote the set of all continuous real valued functions defined on $[0,t]$ and the Borel σ-field on $C([0,t])$, respectively. The measures $\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}$ and $\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}$ are equivalent for all $\alpha\in\mathbb{R}$ and for all $t\in(0,T)$, and

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}}\left(X^{(\alpha)}\big|_{[0,t]}\right)=\exp\left\{\alpha\int_0^t\frac{b(s)}{\sigma(s)^2}X_s^{(\alpha)}\,\mathrm{d}X_s^{(\alpha)}-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^t\frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Here $\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}$ is nothing else but the Wiener measure on $\big(C([0,t]),\mathcal{B}(C([0,t]))\big)$.

For all $t\in(0,T)$, the MLE $\widehat{\alpha}_t$ of the parameter α based on the observations $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ is defined by

$$\widehat{\alpha}_t:=\arg\max_{\alpha\in\mathbb{R}}\ln\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}}\left(X^{(\alpha)}\big|_{[0,t]}\right)\right).$$

One can prove $\mathbb{P}\left(\int_0^t\frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s>0\right)=1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $t\in(0,T)$, and hence for all $t\in(0,T)$, there exists a unique MLE $\widehat{\alpha}_t$ of the parameter α based on the observations $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ given by

$$\widehat{\alpha}_t=\frac{\int_0^t\frac{b(s)}{\sigma(s)^2}X_s^{(\alpha)}\,\mathrm{d}X_s^{(\alpha)}}{\int_0^t\frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s},\qquad t\in(0,T).$$

Using the SDE (1.2.1) we obtain

$$\widehat{\alpha}_t-\alpha=\frac{\int_0^t\frac{b(s)}{\sigma(s)}X_s^{(\alpha)}\,\mathrm{d}B_s}{\int_0^t\frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s},\qquad t\in(0,T).$$

For all $t\in(0,T)$, the Fisher information for α contained in the observation $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$, is defined by

$$I_\alpha(t):=\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}}\left(X^{(\alpha)}\big|_{[0,\,t]}\right)\right)\right)^2=\int_0^t\frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}\,\mathbb{E}\left(X_s^{(\alpha)}\right)^2\mathrm{d}s.$$

Note that if the function $b : [0,T) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is given by (1.2.4) and if we suppose also that $K \neq 0$, $\frac{C}{K} < 0$, then one can check that (see Barczy and Pap [8, page 415])

$$C = -K \lim_{t \uparrow T} \int_0^t \sigma(u)^2 \, \mathrm{d}u =: -K \int_0^T \sigma(u)^2 \, \mathrm{d}u \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

and hence

$$b(t) = \frac{\sigma(t)^2}{-2K \int_t^T \sigma(u)^2 \, \mathrm{d}u}, \qquad t \in [0,T). \tag{1.2.5}$$

Theorem 1.2.2 ([8]) *Let $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ be the process given by the SDE* (1.2.1)*, where b is given by* (1.2.5) *with some $K \neq 0$ and we suppose that $\int_0^T \sigma(s)^2 \, \mathrm{d}s < \infty$. Then*

$$\sqrt{I_\alpha(t)}\,(\widehat{\alpha}_t - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathcal{N}(0,1) & \text{if } \operatorname{sign}(\alpha - K) = \operatorname{sign}(K), \\ -\frac{\operatorname{sign}(K)}{\sqrt{2}} \frac{\int_0^1 W_s \, \mathrm{d}W_s}{\int_0^1 (W_s)^2 \, \mathrm{d}s} & \text{if } \alpha = K, \end{cases}$$

as $t \uparrow T$, where $(W_s)_{s\in[0,1]}$ is a standard Wiener process. In fact, in case of $\alpha = K$, for all $t \in (0,T)$,

$$\sqrt{I_K(t)}\,(\widehat{\alpha}_t - K) \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{\operatorname{sign}(K)}{2\sqrt{2}} \frac{(W_1)^2 - 1}{\int_0^1 (W_s)^2 \, \mathrm{d}s} = -\frac{\operatorname{sign}(K)}{\sqrt{2}} \frac{\int_0^1 W_s \, \mathrm{d}W_s}{\int_0^1 (W_s)^2 \, \mathrm{d}s}.$$

The next theorem is about the asymptotic behavior of the MLE of $\alpha = K$, $K \neq 0$ using an appropriate *random* normalizing factor.

Theorem 1.2.3 ([8]) *Let $(X_t^{(K)})_{t\in[0,T)}$ be the process given by the SDE* (1.2.1)*, where b is given by* (1.2.5) *with some $K \neq 0$ and we suppose that $\int_0^T \sigma(s)^2 \, \mathrm{d}s < \infty$. Then for all $t \in (0,T)$,*

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t \frac{b(u)^2}{\sigma(u)^2} (X_u^{(K)})^2 \, \mathrm{d}u \right)^{\frac{1}{2}} (\widehat{\alpha}_t - K) \\ &\qquad \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\operatorname{sign}(K) \frac{\int_0^1 W_u \, \mathrm{d}W_u}{\left(\int_0^1 (W_u)^2 \, \mathrm{d}u \right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\operatorname{sign}(K)}{2} \frac{(W_1)^2 - 1}{\left(\int_0^1 (W_u)^2 \, \mathrm{d}u \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

The next theorem is about the strong consistency of the MLE of α.

Theorem 1.2.4 ([8]) *Let $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ be the process given by the SDE* (1.2.1)*, where b is given by* (1.2.5) *with some $K \neq 0$ and we suppose that $\int_0^T \sigma(s)^2 \, \mathrm{d}s < \infty$. Then the maximum likelihood estimator of α is strongly consistent, i.e., for all $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \uparrow T} \widehat{\alpha}_t = \alpha \right) = 1.$$

In Section 4 in Barczy and Pap [8], we specialize our results to α-Wiener bridges as well. For more details on α-Wiener bridges, see Subsection 1.3.

1.3 Karhunen-Loève expansions of alpha-Wiener bridges

In Barczy and Iglói [4], we study Karhunen-Loève (KL) expansions of so-called alpha-Wiener bridges, also known as scaled Wiener bridges. There are few Gauss processes of interest for which the (KL) expansion is explicitly known. Some examples are those of the Wiener process, the Ornstein–Uhlenbeck process and the Wiener bridge. Recently, there is a renewed interest in this field: some KL expansions were provided for weighted Wiener processes and weighted Wiener bridges with weighting function having the form t^β. Let $0 < S < T < \infty$ and $0 < \alpha < \infty$ be arbitrarily fixed and let $(B_t)_{t\geqslant 0}$ be a standard Wiener process on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Let us consider the stochastic differential equation (SDE)

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(\alpha)} = -\dfrac{\alpha}{T-t}\, X_t^{(\alpha)}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, & t \in [0,T), \\ X_0^{(\alpha)} = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

It has a pathwise unique strong solution given by

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^\alpha \mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0,T). \tag{1.3.2}$$

The process $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ given by (1.3.2) is called an α-Wiener bridge or a scaled Brownian bridge (from 0 to 0 on the time interval $[0,T]$). These kind of processes have been used to model the arbitrage profit associated with a given futures contract in the absence of transaction costs. The essence of these models is that the coefficient of $X_t^{(\alpha)}$ in the drift term in (1.3.1) represents some kind of mean reversion, a stabilizing force that keeps pulling the process towards its mean (zero in this reduced form), and the absolute value of this force is increasing proportionally to the inverse of the remaining time $T-t$, with the rate constant α. In Barczy and Pap [7], [8, Section 4] we studied α-Wiener bridges from several points of view, e.g., singularity of probability measures induced by the process $X^{(\alpha)}$ with different values of α, sample path properties, Laplace transforms of certain functionals of $X^{(\alpha)}$ and maximum likelihood estimation of α.

The process $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ is Gauss and for all $t \in [0,T)$, $\mathbb{E}\, X_t^{(\alpha)} = 0$ and the covariance function of $X^{(\alpha)}$ given in Barczy and Pap [7, Lemma 2.1] takes the form

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(s,t) &:= \operatorname{Cov}\left(X_s^{(\alpha)}, X_t^{(\alpha)}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{(T-s)^\alpha(T-t)^\alpha}{1-2\alpha}\left(T^{1-2\alpha} - (T-(s\wedge t))^{1-2\alpha}\right) & \text{if } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{(T-s)(T-t)}\, \ln\!\left(\frac{T}{T-(s\wedge t)}\right) & \text{if } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

for all $s, t \in [0,T)$, where $s\wedge t := \min(s,t)$. By Barczy and Pap [7, Lemma 3.1], the α-Wiener bridge $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ has an almost surely continuous extension $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ to the time interval $[0,T]$ such that $X_T^{(\alpha)} = 0$ with probability one. The possibility of such an extension is based on that the parameter α is positive and on a strong law of large numbers for square integrable local martingales. We note here also that (1.3.1) and (1.3.2) continue to hold for $\alpha \leqslant 0$ as well.

However, there does not exist an almost surely continuous extension of the process $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ onto $[0,T]$ which would take some constant at time T with probability one (i.e., which would be a bridge), and this is why the range of the parameter α is restricted to positive values. Note also that the α-Wiener bridge $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ is L^2-continuous, and we also have $R^{(\alpha)} \in L^2([0,T]^2)$. So, the integral operator associated to the kernel function $R^{(\alpha)}$, i.e., the operator $A_{R^{(\alpha)}} : L^2([0,T]) \to L^2([0,T])$,

$$(A_{R^{(\alpha)}}(\phi))(t) := \int_0^T R^{(\alpha)}(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,T], \qquad \phi \in L^2([0,T]),$$

is of the Hilbert–Schmidt type, thus $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ has a KL expansion based on $[0,T]$:

$$X_t^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k^{(\alpha)}}\, \xi_k e_k^{(\alpha)}(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3.3}$$

where $\xi_k,\ k \in \mathbb{N}$, are independent standard normally distributed random variables, $\lambda_k^{(\alpha)},\ k \in \mathbb{N}$, are the non-zero eigenvalues of the integral operator $A_{R^{(\alpha)}}$ and $e_k^{(\alpha)}(t),\ t \in [0,T],\ k \in \mathbb{N}$, are the corresponding normed eigenfunctions, which are pairwise orthogonal in $L^2([0,T])$. Observe that (1.3.3) has infinitely many terms, and the normed eigenfunctions are unique only up to sign. The series in (1.3.3) converges in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ to $X_t^{(\alpha)}$, uniformly on $[0,T]$, i.e.,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\left|X_t^{(\alpha)} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k^{(\alpha)}}\, \xi_k e_k^{(\alpha)}(t)\right|^2\right) \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Moreover, since $R^{(\alpha)}$ is continuous on $[0,T]^2$, the eigenfunctions corresponding to non-zero eigenvalues are also continuous on $[0,T]$. Further, since the terms on the right-hand side of (1.3.3) are independent normally distributed random variables and $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ has continuous sample paths with probability one, the series converges even uniformly on $[0,T]$ with probability one.

Next, we recall the notion of Bessel functions of the first kind which plays a key role in the KL expansions we will obtain. They can be defined as

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad x \in (0,\infty),\ \nu \in \mathbb{R},$$

where $\Gamma(z)$ for $z < 0$, $z \notin \mathbb{Z}$, is defined by a recursive application of the rule $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, $z < 0$, $z \notin \mathbb{Z}$, and we use the convention that $1/\Gamma(-k) := 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, yielding that the first n terms in the series of $J_\nu(x)$ vanish if $\nu = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

In all what follows we will put $\nu := \alpha - 1/2$, where $\alpha > 0$. Next we present our main theorem.

Theorem 1.3.1 ([4]) *Let $\alpha > 0$, $\nu := \alpha - 1/2$, and $z_k^{(\nu)}$, $k \in \mathbb{N}$, be the (positive) zeros of J_ν. Then in the KL expansion (1.3.3) of the α-Wiener bridge*

$(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ the eigenvalues and the corresponding normed eigenfunctions are

$$\lambda_k^{(\alpha)} = \frac{T^2}{(z_k^{(\nu)})^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} e_k^{(\alpha)}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)}\,\frac{J_\nu\big(z_k^{(\nu)}(1-t/T)\big)}{\big|J_{\nu+1}\big(z_k^{(\nu)}\big)\big|} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)}\,\frac{J_\nu\big(z_k^{(\nu)}(1-t/T)\big)}{\big|J_{\nu-1}\big(z_k^{(\nu)}\big)\big|}, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

where we take the continuous extension of $e_k^{(\alpha)}$ at $t=T$ for $-1/2<\nu<0$, i.e., $e_k^{(\alpha)}(T)=0$ for $\alpha<1/2$.

In Remarks 2.2 and 2.3 in Barczy and Iglói [4] we investigated the special cases of Theorem 1.3.1 for $\alpha \downarrow 0$ (standard Wiener process) and $\alpha = 1$ (Wiener bridge). Further, Theorem 2.5 in Barczy and Iglói [4] describes a weighted KL expansion of the α-Wiener bridge $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,S]}$ with $S\in(0,T)$.

Next we present some applications of the KL expansion of α-Wiener bridge $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$.

Proposition 1.3.2 ([4]) *Let $\alpha>0$ and $\nu := \alpha - 1/2$. Then*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}t > x\right) = \frac{2^{1-\nu/2}}{\pi\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k+1}\int_{z_{2k-1}^{(\nu)}}^{z_{2k}^{(\nu)}} u^{\nu/2-1}\frac{\mathrm{e}^{-xu^2/(2T^2)}}{\sqrt{|J_\nu(u)|}}\,\mathrm{d}u$$

for all $x>0$.

Corollary 1.3.3 ([4]) *Let $\alpha>0$, $\nu := \alpha-1/2$ and $z_k^{(\nu)}$, $k\in\mathbb{N}$, be the positive zeros of J_ν. Then*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}t > x\Big) &= \big(1+o(1)\big)\frac{2^{1-\nu/2}T\big(z_1^{(\nu)}\big)^{(\nu-3)/2}}{\sqrt{\pi\,\Gamma(\nu+1)J_{\nu+1}\big(z_1^{(\nu)}\big)}}\; x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-(z_1^{(\nu)})^2\frac{x}{2T^2}} \\ &= \big(1+o(1)\big)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{T}{z_1^{(\nu)}}\prod_{k=2}^\infty\left(1-\frac{(z_1^{(\nu)})^2}{(z_k^{(\nu)})^2}\right)^{-1/2} x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-(z_1^{(\nu)})^2\frac{x}{2T^2}} \end{aligned}$$

as $x\to\infty$.

Corollary 1.3.4 ([4]) *Let $\alpha>0$ and $\nu := \alpha-1/2$. Then there exists some constant $c>0$ such that*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}t < \varepsilon\right) = \big(c+o(1)\big)\varepsilon^{1/4-\nu/2}\mathrm{e}^{-T^2/(8\varepsilon)}$$

as $\varepsilon\downarrow 0$.

1.4 Operator scaled Wiener bridges

In Barczy et al. [6], we deal with a multidimensional generalization of the so-called α-Wiener bridges. For fixed $T > 0$ and given matrices $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ and $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times m}$, a d-dimensional process $(X_t)_{t\in[0,T)}$ is given by the stochastic differential equation (SDE)

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{T-t} A X_t \,\mathrm{d}t + \Sigma\,\mathrm{d}B_t, \quad t \in [0,T), \tag{1.4.1}$$

with initial condition $X_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$, where $(B_t)_{t\in[0,T)}$ is an m-dimensional standard Wiener process defined on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T)}, \mathbb{P})$ with the completion $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T)}$ of the canonical filtration of $(B_t)_{t\in[0,T)}$. Note that in case $m = d$ and if A and Σ are both the $d \times d$ identity matrix, then the process $(X)_{t\in[0,T)}$ is nothing else but the usual d-dimensional Wiener bridge over $[0,T]$. In Subsection 1.3, we detailed that one-dimensional α-Wiener bridges are used to model the arbitrage profit associated with a given futures contract in the absence of transaction costs. The model is also meaningful in a multidimensional context when a finite number of contracts is considered with possible dependencies between the contracts. Operator scaled Wiener bridges offer a tool for modeling the arbitrage profit in this multidimensional setting.

The SDE (1.4.1) with initial condition $X_0 = 0$ has a pathwise unique strong solution $(X_t)_{t\in[0,T)}$ given by the d-dimensional integral representation

$$X_t = \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^A \Sigma\,\mathrm{d}B_s \quad \text{for } t \in [0,T), \tag{1.4.2}$$

where r^A is defined by the exponential operator

$$r^A = \mathrm{e}^{A\log r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log r)^k}{k!} A^k \quad \text{for } r > 0. \tag{1.4.3}$$

Note that $(X_t)_{t\in[0,T)}$ is a Gauss process with almost surely continuous sample paths. Later on, we will frequently assume that Σ has rank d (and consequently $m \geqslant d$), but the assumption will always be stated explicitly. Note that this is only a minor restriction, since otherwise the d-dimensional Gauss driving process $(\Sigma B_t)_{t\in[0,T)}$ in (1.4.2) has linearly dependent coordinates.

Let $\operatorname{ReSpec}(A) := \{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \operatorname{Spec}(A)\}$ be the collection of distinct real parts of the eigenvalues of the matrix A, where $\operatorname{Spec}(A)$ denotes the set of eigenvalues of A. If there exists $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ with $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, then the process $(X_t)_{t\in[0,T)}$ defined by (1.4.2) with initial condition $X_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$ does not fulfill that X_t converges to some deterministic d-dimensional vector almost surely as $t \uparrow T$ in general. This fact is known for the one-dimensional situation $d = 1$, for an explicit multidimensional example, see Barczy et al. [6, Example 3.1].

One of our main results runs as follows.

Theorem 1.4.1 ([6]) *Let us suppose that Σ has full rank d (and consequently $m \geqslant d$). If $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0,\infty)$, then the process*

$$\widehat{X}_t := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^A \Sigma\,\mathrm{d}B_s & \text{if } t \in [0,T), \\ 0 & \text{if } t = T \end{cases}$$

is a centered Gauss process with almost surely continuous sample paths.

Note that the condition $\mathrm{ReSpec}(A) \subseteq (0, \infty)$ is equivalent to $t^A \to 0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ as $t \downarrow 0$. We call the attention that the condition that Σ has full rank d in Theorem 1.4.1 is needed only for the case $\mathrm{ReSpec}(A) \cap [1/2, \infty) \neq \emptyset$. Provided that the conditions of Theorem 1.4.1 hold, we will call the process $(\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ an operator scaled Wiener bridge associated to the matrices A and Σ over the time interval $[0, T]$.

Next we study asymptotic behavior of the sample paths of operator scaled Wiener bridges. The next result is a partial generalization of Theorem 3.4 in Barczy and Pap [7].

Proposition 1.4.2 ([6]) *If* $\mathrm{ReSpec}(A) \subseteq (0, 1/2)$*, then*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}(T-t)^{-A}X_t = M_T\right) = 1,$$

where M_T is a d-dimensional normally distributed random variable. Consequently, for all $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ with $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A$, we have

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}(T-t)^{-\widetilde{A}}X_t = 0\right) = 1 \;\; \textit{if} \;\; \mathrm{ReSpec}(A-\widetilde{A}) \subseteq (0,\infty),$$
$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}\|(T-t)^{-\widetilde{A}}X_t\| = \infty\right) = 1 \; \textit{if} \;\; \mathrm{ReSpec}(A-\widetilde{A}) \subseteq (-\infty, 0).$$

In order to formualte our next result we need to introduce a spectral decomposition of the process $(X_t)_{t\in[0,T)}$. Factor the minimal polynomial f of A into $f(\lambda) = f_1(\lambda)\cdots f_p(\lambda)$, $\lambda \in \mathsf{C}$, with $p \leqslant d$ such that every root of f_j has real part a_j, where $a_1 < \cdots < a_p$ denote the distinct real parts of the eigenvalues of A, and C is the set of complex numbers. Note that f, $f_1, \dots, f_p$ are polynomials with real coefficients. According to the primary decomposition theorem of linear algebra we can decompose $\mathbb{R}^d$ into a direct sum $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$, where each $V_j := \mathrm{Ker}(f_j(A))$ is an A-invariant subspace. Let us denote the dimension of V_j by d_j, $j = 1, \dots, p$. Now, in an appropriate basis, say $\{b_i^{(j)} : i = 1, \dots, d_j,\ j = 1, \dots, p\}$, A can be represented as a block-diagonal matrix $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_p$, where every eigenvalue of A_j has real part a_j. For this reason, we will call each matrix A_j *real spectrally simple*, i.e., all its eigenvalues have the same real part. We can further choose a unique inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\mathbb{R}^d$ such that the basis $\{b_i^{(j)} : i = 1, \dots, d_j,\ j = 1, \dots, p\}$ is orthonormal, and consequently, the subspaces V_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, are mutually orthogonal. For $x = x_1 + \cdots + x_p$ with $x_j \in V_j$, $j = 1, \dots, p$, let $\pi_j(x)$ be the coordinates of x_j with respect to the basis $\{b_i^{(j)} : i = 1, \dots, d_j\}$ of V_j. Then $\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d_j}$ is a linear projection mapping. To conclude, for every $x \in \mathbb{R}^d$ there exist unique $x_j \in V_j$, $j = 1, \dots, p$, such that $x = x_1 + \cdots + x_p = (\pi_1(x), \dots, \pi_p(x))$ and $t^A x = (t^{A_1}\pi_1(x), \dots, t^{A_p}\pi_p(x))$ for all $t > 0$. Moreover, for our multidimensional process we have $X_t = (X_t^{[1]}, \dots, X_t^{[p]})$, where $(X_t^{[j]} = \pi_j(X_t))_{t\in[0,T)}$ is again of the same structure (1.4.2). Namely, for every $j = 1, \dots, p$, the j-th spectral component of $(X_t)_{t\in[0,T)}$ can almost surely be represented as

$$X_t^{[j]} = \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^{A_j} \Sigma_j \,\mathrm{d}B_s \qquad \text{for } t \in [0, T),$$

where $\Sigma_j \in \mathbb{R}^{d_j\times m}$ is given by $\pi_j(\Sigma y) = \Sigma_j y$ for $y \in \mathbb{R}^m$.

Theorem 1.4.3 ([6]) *If* $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0,\infty)$ *and* Σ *has full rank* d *(and consequently* $m \geqslant d$*), then for all* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}(T-t)^{-\min(a_j,1/2)+\varepsilon}\|X_t^{[j]}\| = 0\right) = 1,$$
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\uparrow T}(T-t)^{-\min(a_j,1/2)-\varepsilon}\|X_t^{[j]}\| = \infty\right) = 1, \tag{1.4.4}$$

where $a_1 < \cdots < a_p$ *denote the distinct real parts of the eigenvalues of* A *and* $(X_t^{[j]})_{t\in[0,T)}$, $j = 1,\ldots,p$, *are the corresponding spectral components of* $(X_t)_{t\in[0,T)}$. *Further, if* $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0,1/2)$, *then* (1.4.4) *can be strengthened to*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}(T-t)^{-a_j-\varepsilon}\|X_t^{[j]}\| = \infty\right) = 1.$$

Finally, we present a result on uniqueness in law of operator scaled Wiener bridges (for a more detailed discussion, see Barczy et al. [6, Section 5]).

Proposition 1.4.4 ([6]) *Let* A, $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *and* $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times m}$, $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d\times\widetilde{m}}$ *be such that* $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0,1/2)$, $\operatorname{ReSpec}(\widetilde{A}) \subseteq (0,1/2)$ *and* Σ, $\widetilde{\Sigma}$ *have full rank* d *(and consequently* $m \geqslant d$ *and* $\widetilde{m} \geqslant d$*). If the bridges associated to the matrices* A *and* Σ, *and* $\widetilde{A}$ *and* $\widetilde{\Sigma}$ *induce the same law on the space of real-valued continuous functions on* $[0,T)$, *then* $\operatorname{ReSpec}(A) = \operatorname{ReSpec}(\widetilde{A})$.

2 Affine processes

This part is based on the articles Barczy et al. [1], [2], [3] and Barczy and Pap [9].

2.1 On parameter estimation for critical affine processes

In Barczy et al. [1], first we provide a simple set of sufficient conditions for the weak convergence of scaled affine processes with state space $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$. Roughly speaking, given a family of affine processes $(Y^{(\theta)}(t), X^{(\theta)}(t))_{t\geqslant 0}$, $\theta > 0$, such that the corresponding admissible parameters converge in an appropriate way (see Theorem 2.1.3), the scaled process $\big(\theta^{-1}Y^{(\theta)}(\theta t), \theta^{-1}X^{(\theta)}(\theta t)\big)_{t\geqslant 0}$ converge weakly towards an affine diffusion process as $\theta\to\infty$. We specialize our result for one-dimensional continuous state and continuous time branching processes with immigration as well. Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_{++}$, and C denote the sets of positive integers, non-negative integers, real numbers, non-negative real numbers, non-positive real numbers, positive real numbers and complex numbers, respectively. Let $U := \{z_1 + iz_2 : z_1 \in \mathbb{R}_-, z_2 \in \mathbb{R}\} \times (i\mathbb{R}^d)$. By $C_c^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ $(C_c^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d))$ we denote the set of twice (infinitely) continuously differentiable complex-valued functions on $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ with compact support, where $d\in\mathbb{N}$. The set of càdlàg functions from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ will be denoted by $\mathsf{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$. Next, we recall the definition of affine processes with state space $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ based on Duffie et al. [11].

Definition 2.1.1 ([11]) *A transition semigroup* $(P_t)_{t\geqslant 0}$ *with state space* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ *is called a (general) affine semigroup if its characteristic function has the* *representation*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\langle u,\xi\rangle} P_t(x,\mathrm{d}\xi) = \mathrm{e}^{\langle x,\psi(t,u)\rangle+\phi(t,u)} \tag{2.1.1}$$

for $x \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, $u \in U$ *and* $t \geqslant 0$, *where* $\psi(t,\cdot)$ *is a continuous* C^{1+d}*-valued function on* U *and* $\phi(t,\cdot)$ *is a continuous* C*-valued function on* U *satisfying* $\phi(t,0)=0$. *The affine semigroup* $(P_t)_{t\geqslant0}$ *defined by* (2.1.1) *is called regular if it is stochastically continuous (equivalently, for all* $u \in U$, *the functions* $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \Psi(t,u)$ *and* $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \phi(t,u)$ *are continuous) and* $\partial_1\psi(0,u)$ *and* $\partial_1\phi(0,u)$ *exist for all* $u \in U$ *and are continuous at* $u = 0$ *(where* $\partial_1\psi$ *and* $\partial_1\phi$ *denote the partial derivatives of* ψ *and* ϕ, *respectively, with respect to the first variable).*

Definition 2.1.2 ([11]) *A set of parameters* (a,α,b,β,m,μ) *is called admissible if*

(i) $a = (a_{i,j})_{i,j=1}^{1+d} \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$ *is a symmetric positive semidefinite matrix with* $a_{1,1}=0$ *(hence* $a_{1,k}=a_{k,1}=0$ *for all* $k \in \{2,\dots,1+d\}$*),*

(ii) $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{1+d} \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$ *is a symmetric positive semidefinite matrix,*

(iii) $b = (b_i)_{i=1}^{1+d} \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$,

(iv) $\beta = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^{1+d} \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$ *with* $\beta_{1,j}=0$ *for all* $j \in \{2,\dots,1+d\}$,

(v) $m(\mathrm{d}\xi) = m(\mathrm{d}\xi_1,\mathrm{d}\xi_2)$ *is a* σ*-finite measure on* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ *supported by* $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)\setminus\{(0,0)\}$ *such that* $\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\left[\xi_1 + (\|\xi_2\|\wedge\|\xi_2\|^2)\right] m(\mathrm{d}\xi) < \infty$,

(vi) $\mu(\mathrm{d}\xi) = \mu(\mathrm{d}\xi_1,\mathrm{d}\xi_2)$ *is a* σ*-finite measure on* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ *supported by* $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)\setminus\{(0,0)\}$ *such that* $\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\|\xi\|\wedge\|\xi\|^2\mu(\mathrm{d}\xi) < \infty$.

Due to Duffie et al. [11, Theorem 2.7], there exist affine processes with state space $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ for admissible sets of parameters (a,α,b,β,m,μ). One of our main results runs as follows.

Theorem 2.1.3 ([1]) *For all* $\theta \in \mathbb{R}_{++}$, *let* $(Y^{(\theta)}(t),X^{(\theta)}(t))_{t\geqslant0}$ *be a* $(1+d)$*-dimensional affine process with state space* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ *and with admissible parameters* $(a^{(\theta)},\alpha^{(\theta)},b^{(\theta)},\beta^{(\theta)},m,\mu)$ *such that additionally*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\|\xi\|\,m(\mathrm{d}\xi) < \infty \qquad \text{and} \qquad \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\|\xi\|^2\,\mu(\mathrm{d}\xi) < \infty.$$

If there exist $a,\alpha,\beta \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$, $b \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, *and a random vector* $(Y(0),X(0))$ *with values in* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ *such that*

$$\theta^{-1}a^{(\theta)} \to a, \qquad \alpha^{(\theta)} \to \alpha, \qquad b^{(\theta)} \to b, \qquad \theta\beta^{(\theta)} \to \beta,$$
$$\theta^{-1}(Y^{(\theta)}(0),X^{(\theta)}(0)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y(0),X(0))$$

as $\theta \to \infty$, *then*

$$\left(\theta^{-1}Y^{(\theta)}(\theta t),\theta^{-1}X^{(\theta)}(\theta t)\right)_{t\geqslant0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y(t),X(t))_{t\geqslant0}$$

in $\mathsf{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ *as* $\theta \to \infty$, *where* $(Y(t), X(t))_{t \geqslant 0}$ *is a* $(1+d)$-*dimensional affine diffusion process with state space* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *and with the set of admissible parameters* $(a, \widetilde{\alpha}, \widetilde{b}, \beta, 0, 0)$, *where* $\widetilde{\alpha} := \alpha + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \xi\xi^\top \mu(\mathrm{d}\xi)$, *and* $\widetilde{b} = (\widetilde{b}_i)_{i=1}^{1+d}$ *with* $\widetilde{b}_i := b_i$ *for* $i \in \{2, \ldots, 1+d\}$ *and* $\widetilde{b}_1 := b_1 + \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \xi_1 \, m(\mathrm{d}\xi)$.

In Barczy et al. [1, Corolloary 2.1] one find a corollary of Theorem 2.1.3 which states weak convergence of appropriately normalized one-dimensional continuous state and continuous time branching processes with immigration.

The scaling Theorem 2.1.3 is applied to study the asymptotic behavior of least squares and conditional least squares estimators of θ and m of a critical two-dimensional affine diffusion process given by

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \theta X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t, \end{cases} \qquad t \geqslant 0, \tag{2.1.2}$$

where $a \in \mathbb{R}_{++}$ and $b, \theta, m \in \mathbb{R}$, see Theorem 2.1.5. In what follows we define criticality of the affine process given by the SDE (2.1.2).

Definition 2.1.4 ([1]) *Let* $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ *be an affine diffusion process given by the SDE* (2.1.2) *satisfying* $\mathbb{P}(Y_0 \geqslant 0) = 1$. *We call* $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ *subcritical, critical or supercritical if the spectral radius of the matrix*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-bt} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta t} \end{pmatrix}$$

is less than 1, *equal to* 1 *or greater than* 1, *respectively.*

Definition 2.1.4 is motivated by the asymptotic behaviour of $\mathbb{E}(Y_t, X_t)$ as $t \to \infty$, for more details, see Barczy et al. [1, Proposition 3.2].

Note that, since the spectral radius of the matrix given in Definition 2.1.4 is $\max(\mathrm{e}^{-bt}, \mathrm{e}^{-\theta t})$, the affine process given in Definition 2.1.4 is

$$\begin{aligned} \text{subcritical} \quad & \text{if } b > 0 \text{ and } \theta > 0, \\ \text{critical} \quad & \text{if } b = 0,\ \theta \geqslant 0 \text{ or } b \geqslant 0,\ \theta = 0, \\ \text{supercritical} \quad & \text{if } b < 0 \text{ or } \theta < 0. \end{aligned}$$

We will always suppose that

$$\begin{aligned} \text{Condition (C):} \quad & (b, \theta) = (0, 0),\ \mathbb{P}(Y_0 \geqslant 0) = 1, \\ & \mathbb{E}(Y_0) < \infty, \text{ and } \mathbb{E}(X_0^2) < \infty. \end{aligned}$$

For some explanations why we study only this special case, see Remarks 3.1-3.3 in Barczy et al. [1]. The least squares estimator (LSE) of (θ, m) based on the observations X_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, can be obtained by solving the extremum problem

$$(\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}}, \widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}}) := \operatorname*{arg\,min}_{(\theta, m) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1} - (m - \theta X_{i-1}))^2.$$

One can check that

$$\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}} = -\frac{n \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1}) X_{i-1} - \sum_{i=1}^n X_{i-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})}{n \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2}, \tag{2.1.3}$$

and

$$\widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1}) - \sum_{i=1}^n X_{i-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1}) X_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2} \tag{2.1.4}$$

provided that $n \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2 > 0$.

Theorem 2.1.5 ([1]) *Let us assume that Condition (C) holds. Then*

$$\mathbb{P}\left(n \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1} \right)^2 > 0 \right) = 1 \qquad \textit{for all} \ \ n \geqslant 2,$$

and there exists a unique LSE $(\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}}, \widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}})$ *which has the form given in* (2.1.3) *and* (2.1.4)*. Further,*

$$n\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}} \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{\int_0^1 \mathcal{X}_t \, \mathrm{d}\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_1 \int_0^1 \mathcal{X}_t \, \mathrm{d}t}{\int_0^1 \mathcal{X}_t^2 \, \mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \, \mathrm{d}t \right)^2} \qquad \textit{as} \ \ n \to \infty,$$

and

$$\widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\mathcal{X}_1 \int_0^1 \mathcal{X}_t^2 \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \mathcal{X}_t \, \mathrm{d}t \int_0^1 \mathcal{X}_t \, \mathrm{d}\mathcal{X}_t}{\int_0^1 \mathcal{X}_t^2 \, \mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t \, \mathrm{d}t \right)^2} \qquad \textit{as} \ \ n \to \infty,$$

where $(\mathcal{X}_t)_{t \geqslant 0}$ *is the second coordinate of a two-dimensional affine process* $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{X}_t)_{t \geqslant 0}$ *given by the unique strong solution of the SDE*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathcal{Y}_t = a \, \mathrm{d}t + \sqrt{\mathcal{Y}_t} \, \mathrm{d}\mathcal{W}_t, \\ \mathrm{d}\mathcal{X}_t = m \, \mathrm{d}t + \sqrt{\mathcal{Y}_t} \, \mathrm{d}\mathcal{B}_t, \end{cases} \qquad t \geqslant 0,$$

with initial value $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{X}_0) = (0, 0)$*, where* $(\mathcal{W}_t)_{t \geqslant 0}$ *and* $(\mathcal{B}_t)_{t \geqslant 0}$ *are independent standard Wiener processes.*

Barczy et al. [1] describes the asymptotic behaviour of LSE of θ when m is known (see Barczy et al. [1, Theorem 3.1]) and conditional LSE of (θ, m) (see Barczy et al. [1, Theorem 3.3]) as well.

2.2 Stationarity and ergodicity for an affine two-factor model

In Barczy et al. [2], we consider the following two-dimensional affine process (affine two-factor model)

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t) \, \mathrm{d}t + \sqrt[\alpha]{Y_{t-}} \, \mathrm{d}L_t, & t \geqslant 0, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \theta X_t) \, \mathrm{d}t + \sqrt{Y_t} \, \mathrm{d}B_t, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

where $a > 0$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (1, 2]$, $(L_t)_{t \geqslant 0}$ is a spectrally positive α-stable Lévy process with Lévy measure $C_\alpha z^{-1-\alpha} \mathbf{1}_{\{z > 0\}}$ with $C_\alpha := (\alpha \Gamma(-\alpha))^{-1}$

(where Γ denotes the Gamma function) in case $\alpha \in (1,2)$, a standard Wiener process in case $\alpha = 2$, and $(B_t)_{t\geqslant 0}$ is an independent standard Wiener process. In case of $\alpha \in (1,2)$, L admits Lévy-Khintchine representation

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{iuL_1}) = \exp\left\{\int_0^\infty (\mathrm{e}^{iuz} - 1 - iuz) C_\alpha z^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}z\right\} = \exp\left\{\frac{1}{\alpha}(-iu)^\alpha\right\}$$

for $u \in \mathbb{R}$. Note that in case of $\alpha = 2$, the process Y is the so-called Cox-Ingersol-Ross (CIR) process; while in case of $\alpha \in (1,2)$, Y is called the α-root process. The process (Y, X) given by (2.2.1) is a special affine process, see Theorem 2.2.1. We point out that Chen and Joslin [10] have found several applications of the model (2.2.1) with $\alpha = 2$ in financial mathematics, see their equations (25) and (26). The article Barczy et al. [2] is devoted to study the existence of a unique stationary distribution and ergodicity of the affine process given by the SDE (2.2.1). For the existing results on stationarity and ergodicity of affine processes, see the beginning of Sections 3 and 4 in Barczy et al. [2].

Our first result is about the existence and uniqueness of a strong solution of the SDE (2.2.1).

Theorem 2.2.1 ([2]) *Let (η_0, ζ_0) be a random vector independent of the process $(L_t, B_t)_{t\geqslant 0}$ satisfying $\mathbb{P}(\eta_0 \geqslant 0) = 1$. Then for all $a > 0$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$ and $\alpha \in (1,2]$, there is a (pathwise) unique strong solution $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ of the SDE (2.2.1) such that $\mathbb{P}((Y_0, X_0) = (\eta_0, \zeta_0)) = 1$ and $\mathbb{P}(Y_t \geqslant 0,\ \forall\, t \geqslant 0) = 1$. Further, we have*

$$Y_t = \mathrm{e}^{-b(t-s)}\left(Y_s + a\int_s^t \mathrm{e}^{-b(s-u)}\,\mathrm{d}u + \int_s^t \mathrm{e}^{-b(s-u)}\sqrt[\alpha]{Y_{u-}}\,\mathrm{d}L_u\right)$$

for $0 \leqslant s \leqslant t$, and

$$X_t = \mathrm{e}^{-\theta(t-s)}\left(X_s + m\int_s^t \mathrm{e}^{-\theta(s-u)}\,\mathrm{d}u + \int_s^t \mathrm{e}^{-\theta(s-u)}\sqrt{Y_u}\,\mathrm{d}B_u\right)$$

for $0 \leqslant s \leqslant t$. Moreover, $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ is a regular affine process with infinitesimal generator

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}f)(y,x) &= (a - by)f_1'(y,x) + (m - \theta x)f_2'(y,x) + \frac{1}{2}yf_{2,2}''(y,x)\\ &\quad + y\int_0^\infty \Big(f(y+z,x) - f(y,x) - zf_1'(y,x)\Big)C_\alpha z^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

in case of $\alpha \in (1,2)$, and

$$(\mathcal{A}f)(y,x) = (a - by)f_1'(y,x) + (m - \theta x)f_2'(y,x) + \frac{1}{2}y(f_{1,1}''(y,x) + f_{2,2}''(y,x))$$

in case of $\alpha = 2$, where $(y,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, and f_i', $i = 1,2$, and $f_{i,j}''$, $i,j \in \{1,2\}$, denote the first and second order partial derivatives of f with respect to its i-th and i-th and j-th variables.

The following result states the existence of a unique stationary distribution of the affine process given by the SDE (2.2.1) for both cases $\alpha \in (1,2)$ and $\alpha = 2$.

Theorem 2.2.2 ([2]) *Let us consider the two-dimensional affine model* (2.2.1) *with* $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, *and with a random initial value* (η_0, ζ_0) *independent of* $(L_t, B_t)_{t \geqslant 0}$ *satisfying* $\mathbb{P}(\eta_0 \geqslant 0) = 1$. *Then*

(i) $(Y_t, X_t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_\infty, X_\infty)$ *as* $t \to \infty$, *and the distribution of* (Y_∞, X_∞) *is given by*

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Y_\infty + i\lambda_2 X_\infty}\right) = \exp\left\{-a \int_0^\infty v_s(\lambda_1, \lambda_2)\,\mathrm{d}s + i\frac{m}{\theta}\lambda_2\right\} \tag{2.2.2}$$

for $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, *where* $v_t(\lambda_1, \lambda_2)$, $t \geqslant 0$, *is the unique non-negative solution of the (deterministic) differential equation*

$$\begin{cases} \frac{\partial v_t}{\partial t}(\lambda_1, \lambda_2) = -bv_t(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{\alpha}(v_t(\lambda_1, \lambda_2))^\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\theta t}\lambda_2^2, & t \geqslant 0, \\ v_0(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

(ii) *supposing that the random initial value* (η_0, ζ_0) *has the same distribution as* (Y_∞, X_∞) *given in part (i), we have* $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ *is strictly stationary.*

The following result states the ergodicity of the affine diffusion process given by the SDE (2.2.1) with $\alpha = 2$.

Theorem 2.2.3 ([2]) *Let us consider the two-dimensional affine diffusion model* (2.2.1) *with* $\alpha = 2$, $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, *and with a random initial value* (η_0, ζ_0) *independent of* $(L_t, B_t)_{t \geqslant 0}$ *satisfying* $\mathbb{P}(\eta_0 \geqslant 0) = 1$. *Then, for all Borel measurable functions* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *such that* $\mathbb{E}\,|f(Y_\infty, X_\infty)| < \infty$, *we have*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(Y_s, X_s)\,\mathrm{d}s = \mathbb{E}\,f(Y_\infty, X_\infty)\right) = 1,$$

where the distribution of (Y_∞, X_∞) *is given by* (2.2.2) *and* (2.2.3) *with* $\alpha = 2$.

In the next theorem we collected several facts about the limiting random variable (Y_∞, X_∞) in the case of $\alpha = 2$.

Theorem 2.2.4 ([2]) *The random variable* (Y_∞, X_∞) *given by* (2.2.2) *and* (2.2.3) *with* $\alpha = 2$ *is absolutely continuous, the Laplace transform of* Y_∞ *takes the form*

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Y_\infty}) = \left(1 + \frac{\lambda_1}{2b}\right)^{-2a}, \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}_+,$$

yielding that Y_∞ *has Gamma distribution with parameters* $2a$ *and* $2b$. *Further, all the (mixed) moments of* (Y_∞, X_∞) *of any order are finite, i.e., we have* $\mathbb{E}(Y_\infty^n |X_\infty|^p) < \infty$ *for all* $n, p \in \mathbb{Z}_+$, *and especially,*

$$\mathbb{E}(Y_\infty) = \frac{a}{b}, \qquad \mathbb{E}(X_\infty) = \frac{m}{\theta},$$
$$\mathbb{E}(Y_\infty^2) = \frac{a(2a+1)}{2b^2}, \qquad \mathbb{E}(Y_\infty X_\infty) = \frac{ma}{\theta b}, \qquad \mathbb{E}(X_\infty^2) = \frac{a\theta + 2bm^2}{2b\theta^2},$$
$$\mathbb{E}(Y_\infty X_\infty^2) = \frac{a}{(b+2\theta)2b^2\theta^2}\big(\theta(ab + 2a\theta + \theta) + 2m^2 b(2\theta + b)\big).$$

2.3 Parameter estimation for a subcritical affine two-factor model

In Barczy et al. [3], we consider the following two-dimensional affine process (affine two factor model)

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}L_t, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \theta X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t, \end{cases} \qquad t \geqslant 0, \tag{2.3.1}$$

where $a > 0$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, and $(L_t)_{t\geqslant 0}$ and $(B_t)_{t\geqslant 0}$ are independent standard Wiener processes. Note that the SDE (2.3.1) is nothing else but the SDE (2.2.1) with $\alpha = 2$, or the SDE (2.1.2). The process (Y, X) given by (2.3.1) is a special affine diffusion process, see Theorem 2.2.1. The article Barczy et al. [3] is devoted to estimate the parameters a, b, m and θ from some continuously observed real data set. We study the asymptotic behaviour of he maximum likelihood estimator (MLE) of (a, b, m, θ) using some continuously observed real data set $(Y_t, X_t)_{t\in[0,T]}$, where $T > 0$, and the least squares estimator (LSE) of (m, θ) using some continuously observed real data set $(X_t)_{t\in[0,T]}$, where $T > 0$. Here we present only the results for the MLE of (a, b, m, θ); for the LSE of (m, θ), see Barczy et al. [3, Sections 4, 6 and 8]. For a classification of the affine diffusion process given by the SDE (2.3.1), see Definition 2.1.4. We will denote by $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}$ the probability measure on the measurable space $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})))$ induced by the process $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ corresponding to the parameters (a, b, m, θ). Here $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ denotes the set of continuous $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-valued functions defined on $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ is the Borel σ-algebra on it, and we suppose that the space $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})))$ is endowed with the natural filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geqslant 0}$, given by $\mathcal{A}_t := \varphi_t^{-1}(\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})))$, where $\varphi_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ is the mapping $\varphi_t(f)(s) := f(t \wedge s)$, $s \geqslant 0$. For all $T > 0$, let $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta),T} := \mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}\,|_{\mathcal{A}_T}$ be the restriction of $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}$ to $\mathcal{A}_T$.

Lemma 2.3.1 ([3]) *Let* $a \geqslant 1/2$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, $T > 0$, *and suppose that* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$. *Let* $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}$ *and* $\mathbb{P}_{(1,0,0,0)}$ *denote the probability measures induced by the unique strong solutions of the SDE* (2.3.1) *corresponding to the parameters* (a, b, m, θ) *and* $(1, 0, 0, 0)$ *with the same initial value* (Y_0, X_0), *respectively. Then* $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta),T}$ *and* $\mathbb{P}_{(1,0,0,0),T}$ *are absolutely continuous with respect to each other, and the Radon-Nykodim derivative of* $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta),T}$ *with respect to* $\mathbb{P}_{(1,0,0,0),T}$ *(so called likelihood ratio) takes the form*

$$\begin{aligned} L_T^{(a,b,m,\theta),(1,0,0,0)}((Y_s, X_s)_{s\in[0,T]}) = \exp\Bigg\{ &\int_0^T \left(\frac{a - bY_s - 1}{Y_s}\,\mathrm{d}Y_s + \frac{m - \theta X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}X_s \right) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(a - bY_s - 1)(a - bY_s + 1) + (m - \theta X_s)^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \Bigg\}, \end{aligned}$$

where $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ *denotes the unique strong solution of the SDE* (2.3.1) *corresponding to the parameters* (a, b, m, θ) *and the initial value* (Y_0, X_0).

By maximizing $\log L_T^{(a,b,m,\theta),(1,0,0,0)}$ in $(a,b,m,\theta) \in \mathbb{R}^4$, the MLE of the parameters (a,b,m,θ) based on the observations $(Y_t, X_t)_{t\in[0,T]}$ takes the form

$$\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}Y_s - T(Y_T - Y_0)}{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - T^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.2}$$

$$\widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{T\int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}Y_s - (Y_T - Y_0)\int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s}{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - T^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.3}$$

$$\widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}X_s - \int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}X_s}{\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}s\right)^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.4}$$

$$\widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{\int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}X_s - \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}X_s}{\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}s\right)^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.5}$$

provided that $\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}s\right)^2 > 0$ and $\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - T^2 > 0$.

The next lemma is about the existence of $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$.

Lemma 2.3.2 ([3]) *If* $a \geqslant \frac{1}{2}$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, *and* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$, *then*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - T^2 \in (0,\infty)\right) = 1 \qquad \text{for all } T > 0,$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}s\right)^2 \in (0,\infty)\right) = 1 \qquad \text{for all } T > 0,$$

and hence there exists a unique MLE $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ *which has the form given in* (2.3.2), (2.3.3) (2.3.4) *and* (2.3.5).

The next result is about the strong consistency of $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ in the subcritical case.

Theorem 2.3.3 ([3]) *If* $a > \frac{1}{2}$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, *and* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$, *then the MLE of* (a,b,m,θ) *is strongly consistent:*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty}(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}}) = (a,b,m,\theta)\right) = 1.$$

The asymptotic behaviour of the MLE $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ in the subcritical case is described as follows.

Theorem 2.3.4 ([3]) *If* $a > 1/2$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, *and* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$, *then the MLE of* (a,b,m,θ) *is asymptotically normal, i.e.,*

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}} - a \\ \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}} - b \\ \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}} - m \\ \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}} - \theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4\left(0, \Sigma^{\mathrm{MLE}}\right) \qquad \text{as } T \to \infty,$$

where $\mathcal{N}_4\left(0, \Sigma^{\mathrm{MLE}}\right)$ *denotes a* 4*-dimensional normally distribution with mean vector* $0 \in \mathbb{R}^4$ *and with covariance matrix* $\Sigma^{\mathrm{MLE}} := \operatorname{diag}(\Sigma_1^{\mathrm{MLE}}, \Sigma_2^{\mathrm{MLE}})$ *with blockdiagonals given by*

$$\Sigma_1^{\mathrm{MLE}} := \frac{1}{\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right)\mathbb{E}(Y_\infty) - 1} D_1, \quad D_1 := \begin{bmatrix} \mathbb{E}(Y_\infty) & 1 \\ 1 & \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_2^{\mathrm{MLE}} := \frac{1}{\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right)\mathbb{E}\left(\frac{X_\infty^2}{Y_\infty}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_\infty}{Y_\infty}\right)\right)^2} D_2, \quad D_2 := \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left(\frac{X_\infty^2}{Y_\infty}\right) & \mathbb{E}\left(\frac{X_\infty}{Y_\infty}\right) \\ \mathbb{E}\left(\frac{X_\infty}{Y_\infty}\right) & \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right) \end{bmatrix}.$$

2.4 Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for Heston models based on continuous time observations

In Barczy and Pap [9], we consider a Heston model

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}X_t = (\alpha - \beta Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{Y_t}\big(\varrho\,\mathrm{d}W_t + \sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}B_t\big), \end{cases} \qquad t \geqslant 0, \tag{2.4.1}$$

where $a > 0$, $b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\varrho \in (-1, 1)$ and $(W_t, B_t)_{t\geqslant 0}$ is a two-dimensional standard Wiener process, and we study maximum likelihood estimator (MLE) of (a, b, α, β) based on continuous time observations $(X_t)_{t\in[0,T]}$ with $T > 0$, starting the process (Y, X) from some known non-random initial value $(y_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

In what follows let $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_{++}$, $\mathbb{R}_-$ and $\mathbb{R}_{--}$ denote the sets of positive integers, non-negative integers, real numbers, non-negative real numbers, positive real numbers, non-positive real numbers and negative real numbers, respectively.

Proposition 2.4.1 ([9]) *Let* $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ *be the unique strong solution of the SDE* (2.4.1) *satisfying* $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_+) = 1$ *and* $\mathbb{E}(Y_0) < \infty$, $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$. *Then*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}(Y_t) \\ \mathbb{E}(X_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-bt} & 0 \\ -\beta\int_0^t \mathrm{e}^{-bu}\,\mathrm{d}u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}(Y_0) \\ \mathbb{E}(X_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t \mathrm{e}^{-bu}\,\mathrm{d}u & 0 \\ -\beta\int_0^t \big(\int_0^u \mathrm{e}^{-bv}\,\mathrm{d}v\big)\,\mathrm{d}u & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix}$$

for $t \in \mathbb{R}_+$. *Consequently, if* $b \in \mathbb{R}_{++}$, *then*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(Y_t) = \frac{a}{b}, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-1}\,\mathbb{E}(X_t) = \alpha - \frac{\beta a}{b},$$

if $b = 0$, *then*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\,\mathbb{E}(Y_t) = a, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-2}\,\mathbb{E}(X_t) = -\frac{1}{2}\beta a,$$

if $b \in \mathbb{R}_{--}$, *then*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0) - \frac{a}{b}, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}(X_t) = \frac{\beta}{b}\,\mathbb{E}(Y_0) - \frac{\beta a}{b^2}.$$

Based on the asymptotic behavior of the expectation $(\mathbb{E}(Y_t), \mathbb{E}(X_t))$ as $t \to \infty$, we introduce a classification of the Heston process given by the SDE (2.4.1).

Definition 2.4.2 ([9]) *Let $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ be the unique strong solution of the SDE (2.4.1) satisfying $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_+) = 1$. We call $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ subcritical, critical or supercritical if $b \in \mathbb{R}_{++}$, $b = 0$ or $b \in \mathbb{R}_{--}$, respectively.*

One can check that the MLE of (a, b, α, β) based on the observations $(X_t)_{t\in[0,T]}$ takes the form

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_T \\ \widehat{b}_T \\ \widehat{\alpha}_T \\ \widehat{\beta}_T \end{bmatrix} = \frac{1}{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} - T^2} \begin{bmatrix} \int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}Y_s}{Y_s} - T(Y_T - y_0) \\ T \int_0^T \frac{\mathrm{d}Y_s}{Y_s} - (Y_T - y_0) \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} \\ \int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}X_s}{Y_s} - T(X_T - x_0) \\ T \int_0^T \frac{\mathrm{d}X_s}{Y_s} - (X_T - x_0) \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} \end{bmatrix},$$

provided that $\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} > T^2$.

The next lemma is about the existence of $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$.

Lemma 2.4.3 ([9]) *If $a \in \big[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\big)$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}_{++}$, and $Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}_{++}$, then*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s > T^2\right) = 1 \qquad \text{for all } T \in \mathbb{R}_{++},$$

and hence, supposing also that $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, and $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, there exists a unique MLE $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$ for all $T \in \mathbb{R}_{++}$.

Here we point out that under the conditions of Lemma 2.4.3, we have $\mathbb{P}(Y_t > 0, \ \forall\, t \in \mathbb{R}_+) = 1$. Next, we present results on the consistency of the MLE $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$.

Theorem 2.4.4 ([9]) *If $b \in \mathbb{R}_{++}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, and $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, then the MLE of (a, b, α, β) is strongly consistent, i.e., $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big) \xrightarrow{\text{a.s.}} (a, b, \alpha, \beta)$ as $T \to \infty$, whenever $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, and it is weakly consistent, i.e., $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} (a, b, \alpha, \beta)$ as $T \to \infty$, whenever $a = \frac{\sigma_1^2}{2}$.*

Theorem 2.4.5 ([9]) *If $a \in \left[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b \in \mathbb{R}_{--}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, and $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, then the MLE of b is strongly consistent, i.e., $\widehat{b}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} b$ as $T \to \infty$.*

We note that for critical Heston models with $a \in (\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty)$, weak consistency of the MLE of (a, b, α, β) will be a consequence of Theorem 2.4.7. For supercritical Heston models with $a \in \big[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\big)$, it will turn out that the MLE of a and α is not even weakly consistent, but the MLE of β is weakly consistent, see Theorem 2.4.8.

Next we present our results on the asymptotic behavior of $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$.

Theorem 2.4.6 ([9]) *If* $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$*,* $b \in \mathbb{R}_{++}$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$*,* $\varrho \in (-1, 1)$*, and* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$*, then the MLE of* (a, b, α, β) *is asymptotically normal, i.e.,*

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{b}_T - b \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \widehat{\beta}_T - \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4 \left(\mathbf{0}, \boldsymbol{S} \otimes \begin{bmatrix} \frac{2b}{2a - \sigma_1^2} & -1 \\ -1 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}^{-1} \right) \qquad \text{as } T \to \infty,$$

where $\otimes$ *denotes tensor product of matrices and* $\boldsymbol{S}$ *is defined by*

$$\boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \tag{2.4.2}$$

With a random scaling, we have

$$\frac{1}{\left(\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s}\right)^{1/2}} \left(\boldsymbol{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} & -T \\ 0 & \left(\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} - T^2\right)^{1/2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{b}_T - b \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \widehat{\beta}_T - \beta \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4 \left(\mathbf{0}, \boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{I}_2 \right) \qquad \text{as } T \to \infty.$$

Theorem 2.4.7 ([9]) *If* $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$*,* $b = 0$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$*,* $\varrho \in (-1, 1)$ *and* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$*, then*

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\log T}(\widehat{a}_T - a) \\ \sqrt{\log T}(\widehat{\alpha}_T - \alpha) \\ T\widehat{b}_T \\ T(\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \left(a - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)^{1/2} \boldsymbol{S}^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \\ \frac{a - \mathcal{Y}_1}{\int_0^1 \mathcal{Y}_s \,\mathrm{d}s} \\ \frac{\alpha - \mathcal{X}_1}{\int_0^1 \mathcal{Y}_s \,\mathrm{d}s} \end{bmatrix} \qquad \text{as } T \to \infty,$$

where $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{X}_t)_{t \geqslant 0}$ *is the unique strong solution of the SDE*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathcal{Y}_t = a \,\mathrm{d}t + \sigma_1 \sqrt{\mathcal{Y}_t} \,\mathrm{d}\mathcal{W}_t, \\ \mathrm{d}\mathcal{X}_t = \alpha \,\mathrm{d}t + \sigma_2 \sqrt{\mathcal{Y}_t} \big(\varrho \,\mathrm{d}\mathcal{W}_t + \sqrt{1 - \varrho^2} \,\mathrm{d}\mathcal{B}_t\big), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

with initial value $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{X}_0) = (0, 0)$*, where* $(\mathcal{W}_t, \mathcal{B}_t)_{t \geqslant 0}$ *is a two-dimensional standard Wiener process,* $\boldsymbol{Z}_2$ *is a two-dimensional standard normally distributed random vector independent of* $\big(\mathcal{Y}_1, \int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}t, \mathcal{X}_1\big)$*,* $\boldsymbol{S}$ *is defined in* (2.4.2)*, and* $\boldsymbol{S}^{1/2}$ *denotes its uniquely determined symmetric, positive definite square root.*
With a random scaling, we have

$$\begin{bmatrix} \left(\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s}\right)^{1/2} (\widehat{a}_T - a) \\ \left(\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s}\right)^{1/2} (\widehat{\alpha}_T - \alpha) \\ \left(\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \widehat{b}_T \\ \left(\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} (\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \\ \frac{a - \mathcal{Y}_1}{\left(\int_0^1 \mathcal{Y}_s \,\mathrm{d}s\right)^{1/2}} \\ \frac{\alpha - \mathcal{X}_1}{\left(\int_0^1 \mathcal{Y}_s \,\mathrm{d}s\right)^{1/2}} \end{bmatrix} \qquad \text{as } T \to \infty.$$

Theorem 2.4.8 ([9]) *If* $a \in \left[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b \in \mathbb{R}_{--}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, *and* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, *then*

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \mathrm{e}^{-bT/2}(\widehat{b}_T - b) \\ \mathrm{e}^{-bT/2}(\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{V}} \\ \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \widetilde{\mathcal{V}} + \sigma_2 \sqrt{1 - \varrho^2} \left(\int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u \right)^{-1/2} Z_1 \\ \left(-\frac{\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}}{b} \right)^{-1/2} \boldsymbol{S}^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix}$$

as $T \to \infty$, *where* $(\widetilde{\mathcal{Y}}_t)_{t \geqslant 0}$ *is a CIR process given by the SDE* $\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Y}}_t = a\mathrm{d}t + \sigma_1 \sqrt{\widetilde{\mathcal{Y}}_t} \, \mathrm{d}\mathcal{W}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, *with initial value* $\widetilde{\mathcal{Y}}_0 = y_0$, *where* $(\mathcal{W}_t)_{t \geqslant 0}$ *is a standard Wiener process,*

$$\widetilde{\mathcal{V}} := \frac{\log \widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b} - \log y_0}{\int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u} + \frac{\sigma_1^2}{2} - a,$$

Z_1 *is a one-dimensional standard normally distributed random variable,* $\boldsymbol{Z}_2$ *is a two-dimensional standard normally distributed random vector such that* Z_1, $\boldsymbol{Z}_2$ *and* $(\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}, \int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u)$ *are independent, and* $\boldsymbol{S}$ *is defined in* (2.4.2). *With a random scaling, we have*

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \left(\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} (\widehat{b}_T - b) \\ \left(\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} (\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{V}} \\ \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \widetilde{\mathcal{V}} + \sigma_2 \sqrt{1 - \varrho^2} \left(\int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u \right)^{-1/2} Z_1 \\ \boldsymbol{S}^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix}$$

as $T \to \infty$.

1. Diffúziós hidak

Ez a rész a Barczy és Kern [5], Barczy és Pap [8], Barczy és Iglói [4] és a Barczy et al. [6] dolgozatokon alapul.

1.1. Többdimenziós lineáris folyamatokból származtatott hidak reprezentációi

A Barczy és Kern [5] dolgozatban többdimenziós lineáris folyamatokból származtatunk hidakat, megadva azok integrál reprezentációját (egy standard Wiener folyamat segítségével) és ún. anticipatív reprezentációját is. Eredményeinket az egydimenziós esetben külön megfogalmazzuk.

Jelölje $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ill. $\mathbb{R}_+$ a pozitív egész, valós, ill. nemnegatív valós számok halmazát. Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbb{R}^{n\times m}$, ill. I_n az $n \times m$-es valós elemű mátrixok halmaza, illetve az $n \times n$-es egységmátrix. Tetszőleges $d, p \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlettel (SDE) megadott d-dimenziós lineáris folyamatot

$$\mathrm{d}\mathbf{Z}_t = \big(Q(t)\mathbf{Z}_t + \mathbf{r}(t)\big)\,\mathrm{d}t + \Sigma(t)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.1.1}$$

ahol $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\Sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times p}$ és $\mathbf{r} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ folytonos függvények, $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$ egy p-dimenziós standard Wiener folyamat egy $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mezőn, mely teljesíti a szokásos feltételeket. Ismert, hogy az (1.1.1) SDE-nek létezik egyértelmű erős megoldása, nevezetesen

$$\mathbf{Z}_t = \Phi(t)\left[\mathbf{Z}_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{r}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\Sigma(s)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_s\right], \qquad t \geqslant 0,$$

ahol $\mathbf{Z}_0$ a $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$ Wiener folyamattól független d-dimenziós valószínűségi vektorváltozó, Φ a $\Phi'(t) = Q(t)\Phi(t)$, $t \geqslant 0$, $\Phi(0) = I_d$, determinisztikus mátrix differenciálegyenlet megoldása. Ezen mátrix differenciálegyenlet egyértelmű megoldása felírható $\Phi(t) = E(t, 0)$, $t \geqslant 0$, alakban ún. evolúciós mátrixok (állapotátmenet mátrixok) segítségével:

$$E(t,s) = I_d + \int_s^t Q(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\int_s^t\int_s^{t_1}\cdots\int_s^{t_{k-1}} Q(t_1)\cdots Q(t_k)\,\mathrm{d}t_k\mathrm{d}t_{k-1}\cdots\mathrm{d}t_1$$

ahol $s, t \geqslant 0$. Ellenőrizhető, hogy az (1.1.1) SDE egyértelmű erős megoldására teljesül, hogy

$$\mathbf{Z}_t = E(t,0)\mathbf{Z}_0 + \int_0^t E(t,s)\mathbf{r}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t E(t,s)\Sigma(s)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_s, \qquad t \geqslant 0.$$

Itt és a továbbiakban feltételezzük, hogy $\mathbf{Z}_0$ normális eloszású, mely független a $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$ Wiener folyamattól; a $(\mathbf{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ Gauss-Markov folyamatot pedig d-dimenziós lineáris folyamatnak fogjuk hívni. Tetszőleges $0 \leqslant s \leqslant t$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ esetén vezessük be az alábbi jelöléseket

$$\mathbf{m}^+_{\mathbf{x}}(s,t) := \mathbf{x} + \int_s^t E(s,u)\mathbf{r}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{és} \quad \mathbf{m}^-_{\mathbf{x}}(s,t) := \mathbf{x} - \int_s^t E(t,u)\mathbf{r}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Tetszőleges $0 \leqslant s < t$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ esetén $\mathbf{Z}_t$-nek a $\mathbf{Z}_s = \mathbf{x}$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható érték vektora

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}}(s,t) := E(t,s)\mathbf{m}_{\mathbf{x}}^{+}(s,t) = E(t,s)\mathbf{x} + \int_s^t E(t,u)\mathbf{r}(u)\mathrm{d}u,$$

ill. Kálmán-típusú kovariancia mátrixa

$$\kappa(s,t) := \int_s^t E(t,u)\Sigma(u)\Sigma(u)^\top E(t,u)^\top \,\mathrm{d}u.$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén a $\kappa(s,t)$ mátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit. A továbbiakban feltételezzük, hogy

$$\kappa(s,t) \text{ pozitív definit minden } 0 \leqslant s < t \text{ esetén.} \tag{1.1.2}$$

Fitzsimmons, Pitman és Yor [12] (2.7) formuláját többdimenziós idő-inhomogén Markov folyamatokra általánosítva, rögzített $T > 0$ esetén egy olyan $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ Markov folyamatot keresünk, melynek kezdeti eloszlása $\mathbb{P}(\mathbf{U}_0 = \mathbf{a}) = 1$, átmenetvalószínűségei pedig

$$p_{s,t}^{\mathbf{U}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{p_{s,t}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, p_{t,T}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{y},\mathbf{b})}{p_{s,T}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{b})}, \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leqslant s < t < T, \tag{1.1.3}$$

feltéve, hogy ilyen folyamat létezik. Az alábbiakban megvizsgáljuk a $\lim_{t\uparrow T} \mathbf{U}_t$ határérték létezését is, nevezetesen, megmutatjuk majd, hogy $\mathbf{U}_t \to \mathbf{b} =: \mathbf{U}_T$ majdnem biztosan és L^2-ben is, amint $t \uparrow T$ (lásd, 1.1.1. Tétel).

Tetszőleges $T > 0$, $0 \leqslant s < t < T$ és $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, esetén vezessük be az alábbi jelöléseket

$$\Gamma(s,t) := E(s,t)\kappa(s,t) = \int_s^t E(s,u)\Sigma(u)\Sigma(u)^\top E(t,u)^\top \,\mathrm{d}u,$$
$$\Sigma(s,t) := \Gamma(t,T)\Gamma(s,T)^{-1}\Gamma(s,t),$$

és

$$\mathbf{n}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(s,t) := \Gamma(t,T)\Gamma(s,T)^{-1}\mathbf{m}_{\mathbf{a}}^{+}(s,t) + \Gamma(s,t)^\top \left(\Gamma(s,T)^\top\right)^{-1}\mathbf{m}_{\mathbf{b}}^{-}(t,T).$$

Az alábbi eredmény egy megfelelő tulajdonságokkal rendelkező $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ Markov folyamat létezését állítja.

1.1.1. Tétel ([5]). *Tegyük fel, hogy az* (1.1.2) *feltétel teljesül. Rögzített* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ *és* $T > 0$ *esetén vezessük be az alábbi* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T)}$ *folyamatot:*

$$\mathbf{U}_t := \mathbf{n}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(0,t) + \Gamma(t,T)\int_0^t \Gamma(u,T)^{-1}\Sigma(u)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_u, \quad t \in [0,T). \tag{1.1.4}$$

Ekkor tetszőleges $t \in [0,T)$ *esetén* $\mathbf{U}_t$ *normális eloszlású* $\mathbf{n}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(0,t)$ *várható érték vektorral és* $\Sigma(0,t)$ *kovariancia mátrixxal, illetve* $\mathbf{U}_t \to \mathbf{b}$ *majdnem biztosan (és így sztochasztikusan is) és* L^2*-ben, amint* $t \uparrow T$*. Így az* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T)}$ *folyamat kiterjeszthető egy olyan majdnem biztosan (és így sztochasztikusan) és* L^2*-folytonos* $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ *sztochasztikus folyamattá, melyre* $\mathbf{U}_0 = \mathbf{a}$ *és* $\mathbf{U}_T = \mathbf{b}$*.*

Továbbá, $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ egy Gauss-Markov folyamat, és tetszőleges $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ és $0\leqslant s<t<T$ esetén $\mathbf{U}_t$-nek az $\mathbf{U}_s=\mathbf{x}$ feltételre vonatkozó $\mathbb{R}^d\ni\mathbf{y}\mapsto p^{\mathbf{U}}_{s,t}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ átmenetvalószínűségi sűrűségfüggvénye

$$p^{\mathbf{U}}_{s,t}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\det\Sigma(s,t)}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big\langle\Sigma(s,t)^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{n}_{\mathbf{x},\mathbf{b}}(s,t)),\mathbf{y}-\mathbf{n}_{\mathbf{x},\mathbf{b}}(s,t)\Big\rangle\Big\},$$

mely nem más, mint $p^{\mathbf{Z}}_{s,t}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,p^{\mathbf{Z}}_{t,T}(\mathbf{y},\mathbf{b})/p^{\mathbf{Z}}_{s,T}(\mathbf{x},\mathbf{b})$.

1.1.2. Definíció ([5]). *Legyen $(\mathbf{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ egy, az (1.1.1) SDE-vel adott olyan d-dimenziós lineáris folyamat, ahol $\mathbf{Z}_0$ normális eloszlású, független a $(\mathbf{B}_t)_{t\geqslant 0}$ Wiener folyamattól, és tegyük fel, hogy teljesül az (1.1.2) feltétel. Rögzített $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ és $T>0$ esetén, az 1.1.1. Tételben definiált $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ folyamatot $\mathbf{a}$-ból $\mathbf{b}$-be tartó, a $[0,T]$ intervallumon vett, $\mathbf{Z}$-ből származtatott többdimneziós lineáris hídfolyamatnak hívjuk. Általánosabban, minden olyan majdnem biztosan folytonos, $[0,T]$-n értelmezett (Gauss) folyamatot $\mathbf{a}$-ból $\mathbf{b}$-be tartó, a $[0,T]$ intervallumon vett, $\mathbf{Z}$-ből származtatott többdimneziós lineáris hídfolyamatnak hívunk, melynek végesdimenziós eloszlásai megegyeznek $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ végesdimenziós eloszlásaival.*

Az 1.1.2. Definíciót átfogalmazhatjuk oly módon is, hogy $\mathbf{a}$-ból $\mathbf{b}$-be tartó, a $[0,T]$ intervallumon vett, $\mathbf{Z}$-ből származtatott többdimenziós lineáris hídfolyamat alatt tetszőleges olyan majdnem biztosan folytonos $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$ Gauss-Markov folyamatot értünk, melyre $\mathbf{U}_0=\mathbf{a}$, $\mathbf{U}_T=\mathbf{b}$ és a $(p^{\mathbf{U}}_{s,t})_{0\leqslant s<t<T}$ átmenet valószínűségi sűrűségfüggvényre teljesül (1.1.3). Vegyük észre, hogy $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T]}$-nek a $\big(C([0,T]),\mathcal{B}(C([0,T]))\big)$ téren vett eloszlása egyértelműen meghatározott, az (1.1.4) formulát pedig tekinthetjük $\mathbf{U}$ integrál reprezentációjának.

A következőkben megadunk egy, az $\mathbf{U}$ hídfolyamat által kielégített SDE-t.

1.1.3. Tétel ([5]). *Tegyük fel, hogy az (1.1.2) feltétel teljesül. Ekkor az (1.1.4)-beli $(\mathbf{U}_t)_{t\in[0,T)}$ folyamat egyértelmű erős megoldása az alábbi lineáris SDE-nek*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{U}_t=&\Big[\big(Q(t)-\Sigma(t)\Sigma(t)^\top E(T,t)^\top\Gamma(t,T)^{-1}\big)\mathbf{U}_t\\&+\Sigma(t)\Sigma(t)^\top\big(\Gamma(t,T)^\top\big)^{-1}\mathbf{m}^-_{\mathbf{b}}(t,T)+\mathbf{r}(t)\Big]\mathrm{d}t+\Sigma(t)\,\mathrm{d}\mathbf{B}_t,\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

ahol $t\in[0,T)$ és a kezdeti feltétel $\mathbf{U}_0=\mathbf{a}$.

Az alábbiakban a hídfolyamat egy alternatív reprezentációját adjuk meg, az ún. anticipatív reprezentációt, mely gyenge megoldása az (1.1.5) SDE-nek.

1.1.4. Tétel ([5]). *Legyenek $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ és $T>0$ rögzítettek. Legyen továbbá $(\mathbf{Z}_t)_{t\geqslant 0}$ egy, az (1.1.1) SDE-vel megadott lineáris folyamat, melyre $\mathbf{Z}_0=\mathbf{0}$, és tegyük fel, hogy teljesül az (1.1.2) feltétel. Ekkor az $(\mathbf{Y}_t)_{t\in[0,T]}$,*

$$\mathbf{Y}_t:=\Gamma(t,T)\Gamma(0,T)^{-1}\mathbf{a}+\mathbf{Z}_t-\Gamma(0,t)^\top\big(\Gamma(0,T)^\top\big)^{-1}(\mathbf{Z}_T-\mathbf{b})\tag{1.1.6}$$

ahol $t\in[0,T]$, folyamat eloszlása megegyezik az $\mathbf{a}$-ból $\mathbf{b}$-be tartó, a $[0,T]$ intervallumon vett, $\mathbf{Z}$-ből származtatott többdimneziós lineáris hídfolyamat eloszlásával.

A Barczy és Kern [5] dolgozatban megmutatjuk továbbá, hogy a tekintett lineáris folyamatok alkalmas feltételes eloszlásai megegyeznek a belőlük származtatott hídfolyamat megfelelő végesdimenziós eloszlásaival (lásd, [5, Proposition 2.8]), az [5]-beli 3. Fejezetben pedig az egydimenziós esetre specializáljuk az eredményeinket, külön tárgyalva az egydimenziós Ornstein-Uhlenbeck hidakat.

1.2. Idő-inhomogén diffúziós folyamatok bizonyos funkcionáljainak Laplace transzformáltja

A Barczy és Pap [8] dolgozatban bizonyos idő-inhomogén diffúziós folyamatok bizonyos funkcionáljainak Laplace transzformáltjára származtatunk explicit formulát. Ezek a funkcionálok fontos szerepet játszanak a szóban forgó diffúziós folyamatok paramétereinek becslésében. Diffúziós folyamatok funkcionáljai Laplace transzformáltjának meghatározása régóta aktív kutatási terület, azonban a szakirodalom döntő része időhomogén diffúziós folyamatokkal foglalkozik.

Legyen $T \in (0, \infty]$ rögzített. Legyenek továbbá $b : [0, T) \to \mathbb{R}$ és $\sigma : [0, T) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $\sigma(t) > 0$ és $b(t) \neq 0$ minden $t \in [0, T)$ esetén (és így $b(t) > 0$, $t \in [0, T)$ vagy $b(t) < 0$, $t \in [0, T)$). Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén legyen $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) egyértelmű erős megoldása

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(\alpha)} = \alpha\, b(t) X_t^{(\alpha)}\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}B_t, & t \in [0, T), \\ X_0^{(\alpha)} = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Az (1.2.1) SDE nem más, mint egy speciális Hull–White (vagy általános Vasicek) modell. Feltételezve, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{b(t)}{\sigma(t)^2}\right) = -2K\frac{b(t)^2}{\sigma(t)^2}, \qquad t \in [0, T), \tag{1.2.2}$$

valamilyen $K \in \mathbb{R}$ esetén, explicit formulát származtatunk az

$$\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{és} \qquad (X_t^{(\alpha)})^2 \tag{1.2.3}$$

valószínűségi változók együttes Laplace transzformáltjára tetszőleges $t \in [0, T)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén, lásd 1.2.1. Tétel. Ezen valószínűségi változók az α paraméter $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ folytonos idejű mintára vonatkozó $\widehat{\alpha}_t$ maximum likelihood becslésében (MLE) szerepelnek, ezért foglalkozunk a közös Laplace transzformáltjuk explicit meghatározásával. Az (1.2.2) feltétel szerepét illetően lásd Barczy és Pap [8, Remark 4]-et. Az (1.2.1) SDE drift-, ill. diffúziós együtthatója teljesíti a lokális Lipschitz-, ill. lineáris növekedési feltételt, így egyértelműen létezik trajektóriánként egyértelmű erős megoldás

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t \sigma(s)\exp\left\{\alpha\int_s^t b(u)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0, T),$$

melynek trajektóriái folytonosak. Vegyük észre, hogy tetszőleges $s \in [0, T)$ esetén $X_s^{(\alpha)}$ normális eloszlású 0 várható értékkel és

$$V(s;\alpha) := \mathbb{E}\left(X_s^{(\alpha)}\right)^2 = \int_0^s \sigma(u)^2\exp\left\{2\alpha\int_u^s b(v)\,\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u, \qquad s \in [0, T),$$

szórásnégyzettel, ahol, a b-re és σ-ra vonatkozó feltételek alapján, $V(s;\alpha) > 0$ minden $s \in (0, T)$ esetén. Az (1.2.2) differenciálegyenlet egy olyan Bernoulli típusú differenciálegyenletre vezet, melynek megoldása

$$b(t) = \frac{\sigma(t)^2}{2\left(K\int_0^t \sigma(s)^2\,\mathrm{d}s + C\right)}, \qquad t \in [0, T), \tag{1.2.4}$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $K\int_0^t \sigma(s)^2\,\mathrm{d}s + C \neq 0$ tetszőleges $t \in [0, T)$ esetén.

1.2.1. Tétel ([8]). *Legyen* $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ *az* (1.2.1) *SDE-vel megadott folyamat, ahol* b *az* (1.2.4)*-ben megadott alakú. Ekkor minden* $\mu > 0$, $\nu \geqslant 0$ *és* $t \in [0,T)$ *esetén*

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\mu\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s - \nu[X_t^{(\alpha)}]^2\right\}$$

$$= \frac{B_{K,C}(t)^{\frac{K-\alpha}{4}}}{\sqrt{\cosh\left(\frac{\sqrt{2\mu+(\alpha-K)^2}}{2}\ln(B_{K,C}(t))\right) - \frac{\alpha-K-4\nu\left(K\int_0^t\sigma(s)^2\,\mathrm{d}s+C\right)}{\sqrt{2\mu+(\alpha-K)^2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{2\mu+(\alpha-K)^2}}{2}\ln(B_{K,C}(t))\right)}},$$

ahol

$$B_{K,C}(t) := \begin{cases} \left(1 + \frac{K}{C}\int_0^t \sigma(s)^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{K}} & \textit{ha}\ \ K \neq 0,\\ \exp\left\{\frac{1}{C}\int_0^t \sigma(s)^2\,\mathrm{d}s\right\} & \textit{ha}\ \ K = 0, \end{cases} \qquad t \in [0,T).$$

Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $t \in (0,T)$ esetén jelölje $\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}$ az $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ folyamat eloszlását a $\big(C([0,t]), \mathcal{B}(C([0,t]))\big)$ téren, ahol $C([0,t])$, ill. $\mathcal{B}(C([0,t]))$ a $[0,t]$ intervallumon értelmezett folytonos valós értékű függvények halmazát, ill. a $C([0,t])$-n levő Borel σ-algebrát jelöli. A $\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}$ és $\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}$ mértékek tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $t \in (0,T)$ esetén ekvivalensek, és

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}}\left(X^{(\alpha)}\big|_{[0,t]}\right) = \exp\left\{\alpha\int_0^t \frac{b(s)}{\sigma(s)^2}X_s^{(\alpha)}\,\mathrm{d}X_s^{(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy $\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}$ nem más, mint a $\big(C([0,t]), \mathcal{B}(C([0,t]))\big)$ mérhető téren a Wiener mérték.

Tetszőleges $t \in (0,T)$ esetén az α paraméternek az $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ folytonos idejű mintára vonatkozó $\widehat{\alpha}_t$ ML becslése az alábbi extrémum probléma egy megoldása

$$\widehat{\alpha}_t := \arg\max_{\alpha\in\mathbb{R}} \ln\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}}\left(X^{(\alpha)}\big|_{[0,t]}\right)\right).$$

Megmutatható, hogy $\mathbb{P}\left(\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s > 0\right) = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in (0,T)$, és így tetszőleges $t \in (0,T)$ esetén egyértelműen létezik az α paraméternek az $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ folytonos idejű mintára vonatkozó $\widehat{\alpha}_t$ ML becslése, nevezetesen

$$\widehat{\alpha}_t = \frac{\int_0^t \frac{b(s)}{\sigma(s)^2}X_s^{(\alpha)}\,\mathrm{d}X_s^{(\alpha)}}{\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s}, \qquad t \in (0,T).$$

Az (1.2.1) SDE alapján

$$\widehat{\alpha}_t - \alpha = \frac{\int_0^t \frac{b(s)}{\sigma(s)}X_s^{(\alpha)}\,\mathrm{d}B_s}{\int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}(X_s^{(\alpha)})^2\,\mathrm{d}s}, \qquad t \in (0,T).$$

Tetszőleges $t \in (0,T)$ esetén az α paraméterre vonatkozó, $(X_s^{(\alpha)})_{s\in[0,\,t]}$ megfigyelésen alapuló Fisher-féle információ alatt az

$$I_\alpha(t) := \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(\alpha)},\,t}}{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{X^{(0)},\,t}}\left(X^{(\alpha)}\big|_{[0,\,t]}\right)\right)\right)^2 = \int_0^t \frac{b(s)^2}{\sigma(s)^2}\,\mathbb{E}\left(X_s^{(\alpha)}\right)^2\mathrm{d}s$$

mennyiséget értjük.

Megjegyezzük, hogy ha a $b : [0,T) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény az (1.2.4)-beli és ha feltételezzük, hogy $K \neq 0$, $\frac{C}{K} < 0$, akkor ellenőrizhető, hogy (lásd Barczy és Pap [8, page 415])

$$C = -K \lim_{t\uparrow T} \int_0^t \sigma(u)^2 \,\mathrm{d}u =: -K \int_0^T \sigma(u)^2 \,\mathrm{d}u \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

és így

$$b(t) = \frac{\sigma(t)^2}{-2K \int_t^T \sigma(u)^2 \,\mathrm{d}u}, \qquad t \in [0,T). \tag{1.2.5}$$

1.2.2. Tétel ([8]). *Legyen* $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ *egy, az* (1.2.1) *SDE-vel adott sztochasztikus folyamat, ahol b az* (1.2.5)*-beli valamilyen* $K \neq 0$ *konstanssal és tegyük fel, hogy* $\int_0^T \sigma(s)^2 \,\mathrm{d}s < \infty$. *Ekkor*

$$\sqrt{I_\alpha(t)}\,(\widehat{\alpha}_t - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathcal{N}(0,1) & \text{ha } \operatorname{sign}(\alpha - K) = \operatorname{sign}(K), \\ -\frac{\operatorname{sign}(K)}{\sqrt{2}} \frac{\int_0^1 W_s \,\mathrm{d}W_s}{\int_0^1 (W_s)^2 \,\mathrm{d}s} & \text{ha } \alpha = K, \end{cases}$$

amint $t \uparrow T$, *ahol* $(W_s)_{s\in[0,1]}$ *egy standard Wiener folyamat. Az* $\alpha = K$ *esetben valójában tetszőleges* $t \in (0,T)$ *esetén*

$$\sqrt{I_K(t)}\,(\widehat{\alpha}_t - K) \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{\operatorname{sign}(K)}{2\sqrt{2}} \frac{(W_1)^2 - 1}{\int_0^1 (W_s)^2 \,\mathrm{d}s} = -\frac{\operatorname{sign}(K)}{\sqrt{2}} \frac{\int_0^1 W_s \,\mathrm{d}W_s}{\int_0^1 (W_s)^2 \,\mathrm{d}s}.$$

A következő tétel az $\alpha = K$, $K \neq 0$, paraméter ML becslésének aszimptotikus viselkedését írja le alkalmas *véletlen* normálás mellett.

1.2.3. Tétel ([8]). *Legyen* $(X_t^{(K)})_{t\in[0,T)}$ *egy, az* (1.2.1) *SDE-vel adott sztochasztikus folyamat, ahol b az* (1.2.5)*-beli valamilyen* $K \neq 0$ *konstanssal és tegyük fel, hogy* $\int_0^T \sigma(s)^2 \,\mathrm{d}s < \infty$. *Ekkor minden* $t \in (0,T)$ *esetén*

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t \frac{b(u)^2}{\sigma(u)^2} (X_u^{(K)})^2 \,\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} (\widehat{\alpha}_t - K) \\
&\qquad \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\operatorname{sign}(K) \frac{\int_0^1 W_u \,\mathrm{d}W_u}{\left(\int_0^1 (W_u)^2 \,\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\operatorname{sign}(K)}{2} \frac{(W_1)^2 - 1}{\left(\int_0^1 (W_u)^2 \,\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

A következő tétel az α paraméter ML becslésének erős konzisztenciájáról szól.

1.2.4. Tétel ([8]). *Legyen* $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ *egy, az* (1.2.1) *SDE-vel adott sztochasztikus folyamat, ahol b az* (1.2.5)*-beli valamilyen* $K \neq 0$ *konstanssal és tegyük fel, hogy* $\int_0^T \sigma(s)^2 \,\mathrm{d}s < \infty$. *Ekkor az* α *paraméter ML becslése erősen konzisztens, azaz tetszőleges* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T} \widehat{\alpha}_t = \alpha\right) = 1.$$

A Barczy és Pap [8] dolgozat 4. Fejezetében specializáljuk az eredményeinket ún. α-Wiener hidakra is. Az α-Wiener hidakról részletesebben az 1.3. Alfejezetben szólunk.

1.3. Alpha-Wiener hidak Karhunen-Loève sorfejtései

A Barczy és Iglói [4] dolgozatban ún. alpha-Wiener hidak (másnéven skálázott Wiener hidak) Karhunen-Loève (KL) sorfejtéseivel foglalkozunk. Kevés olyan érdeklődésre számot tartó Gauss folyamat van, melynek a KL sorfejtése explicit módon ismert. Ilyen például a Wiener folyamat, az Ornstein–Uhlenbeck folyamat vagy a Wiener híd. Gauss folyamatok explicit KL sorfejtésének meghatározása jelenleg is kutatott terület, példaként említhetjük a t^β függvénnyel, mint súlyfüggvénnyel súlyozott Wiener folyamat és Wiener híd esetét. Legyen a továbbiakban $0 < S < T < \infty$ és $0 < \alpha < \infty$ rögzített, és legyen $(B_t)_{t\geqslant 0}$ egy standard Wiener folyamat az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Tekintsük az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletet (SDE)

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(\alpha)} = -\dfrac{\alpha}{T-t}\, X_t^{(\alpha)}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, & t \in [0,T), \\ X_0^{(\alpha)} = 0, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

melynek egyértelmű erős megoldása

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^\alpha \mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0,T). \tag{1.3.2}$$

Az (1.3.2)-beli $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ folyamatot (0-ból 0-ba tartó, a $[0,T]$ intervallumon vett) α-Wiener hídnak vagy skálázott Wiener hídnak hívjuk. Ezen folyamatokat bizonyos határidőügyeletekkel kapcsolatos arbitrázs nyereség modellezésére használják tranzakcióköltség nélküli piacokon. Az (1.3.1) modell lényege, hogy a drift együtthatóban $X_t^{(\alpha)}$-nak az együtthatója arra hivatott, hogy a folyamatot a T időpontra visszahúzza a várható értékébe (esetünkben 0-ba), a visszahúzás erejének abszolút értéke arányos a hátralevő $T-t$ idő reciprokával konstans α arányossági tényezővel. A Barczy és Pap [7], [8, Section 4] dolgozatokban több aspektusból is tanulmányozzuk az α-Wiener hidakat: különböző α paraméterekhez tartozó $X^{(\alpha)}$ folyamatok által indukált valószínűségi mértékek szingularitása, $X^{(\alpha)}$ pályatulajdonságai, $X^{(\alpha)}$ bizonyos funkcionáljainak Laplace transzformáltja, és az α paraméter maximum likelihood becslése.

Az $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ folyamat egy Gauss folyamat, és tetszőleges $t \in [0,T)$ esetén $\mathbb{E}\, X_t^{(\alpha)} = 0$, illetve, Barczy és Pap [7, Lemma 2.1] alapján, $X^{(\alpha)}$ kovariancia függvénye

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(s,t) &:= \operatorname{Cov}\left(X_s^{(\alpha)}, X_t^{(\alpha)}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{(T-s)^\alpha (T-t)^\alpha}{1-2\alpha}\left(T^{1-2\alpha} - (T-(s\wedge t))^{1-2\alpha}\right) & \text{ha } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{(T-s)(T-t)}\,\ln\left(\frac{T}{T-(s\wedge t)}\right) & \text{ha } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

tetszőleges $s,t \in [0,T)$ esetén, ahol $s \wedge t := \min(s,t)$. Barczy és Pap [7, Lemma 3.1] alapján egy $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$ α-Wiener híd kiterjeszthető a $[0,T]$ intervallumra egy majdnem biztosan folytonos $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ folyamattá, melyre $X_T^{(\alpha)} = 0$ majdnem biztosan. Ez a kiterjeszthetőség azon alapszik, hogy az α paraméter pozitív és egy, a négyzetesen integrálható lokális martingálokra vonatkozó nagy számok erős törvényét jól használhatjuk. Megjegyezzük, hogy

(1.3.1) és (1.3.2) az $\alpha \leqslant 0$ esetben is teljesül. Azonban, ekkor nem létezik $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T)}$-nak olyan majdnem biztosan folytonos kiterjesztése a $[0,T]$ intervallumra, mely a T időpontban valamely konstans értéket venne fel egy valószínűséggel (azaz hídfolyamat lenne), ez az oka annak, hogy az α paramétert pozitívnak választjuk. Vegyük észre, hogy az $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ α-Wiener híd L^2-folytonos és $R^{(\alpha)} \in L^2([0,T]^2)$. Így, az $R^{(\alpha)}$-hoz, mint magfüggvényhez tartozó integráloperátor, azaz az $A_{R^{(\alpha)}} : L^2([0,T]) \to L^2([0,T])$,

$$(A_{R^{(\alpha)}}(\phi))(t) := \int_0^T R^{(\alpha)}(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T], \qquad \phi \in L^2([0,T]),$$

operátor Hilbert–Schmidt típusú, és ezért $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$-nak a $[0,T]$-re vonatkozó KL sorfejtése:

$$X_t^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k^{(\alpha)}}\,\xi_k e_k^{(\alpha)}(t), \quad t\in[0,T], \tag{1.3.3}$$

ahol ξ_k, $k\in\mathbb{N}$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók, $\lambda_k^{(\alpha)}$, $k\in\mathbb{N}$, az $A_{R^{(\alpha)}}$ integráloperátor nem-nulla sajátértékei, az $e_k^{(\alpha)}(t)$, $t\in[0,T]$, $k\in\mathbb{N}$, függvények pedig a megfelelő normált sajátfüggvények, melyek páronként ortogonálisak $L^2([0,T])$-ben. Felhívjuk a figyelmet, hogy (1.3.3)-nak végtelen sok tagja van, és a normált sajátfüggvények előjeltől eltekintve egyértelműek. Az (1.3.3)-beli sor konvergál $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$-ben $X_t^{(\alpha)}$-hez a $[0,T]$ intervallumon egyenletesen, azaz

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\left|X_t^{(\alpha)} - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\lambda_k^{(\alpha)}}\,\xi_k e_k^{(\alpha)}(t)\right|^2\right) \to 0 \qquad \text{ha } n\to\infty.$$

Továbbá, mivel $R^{(\alpha)}$ folytonos $[0,T]^2$-n, a nem-nulla sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények folytonosak $[0,T]$-n, illetve, mivel az (1.3.3) jobb oldalán levő sor tagjai független normális eloszlásúak és $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ majdnem minden trajektóriája folytonos, a szóban forgó sor egy valószínűséggel is konvergál a $[0,T]$ intervallumon egyenletesen.

Az alábbiakban felidézzük az elsőfajú Bessel függvények definícióját, mert ezek szerepelnek a későbbiekben megadott KL sorfejtésekben:

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad x\in(0,\infty),\ \nu\in\mathbb{R},$$

ahol $\Gamma(z)$, $z<0$, $z\notin\mathbb{Z}$, a $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, $z<0$, $z\notin\mathbb{Z}$, szabály rekurzív alkalmazásával definiált, és azzal a konvencióval élünk, hogy $1/\Gamma(-k) := 0$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Így a $J_\nu(x)$ sor első n tagja eltűnik, ha $\nu=-n$, $n\in\mathbb{N}$.

Az alábbiakban rendre a $\nu := \alpha - 1/2$ választással élünk, ahol $\alpha>0$.

1.3.1. Tétel ([4]). *Legyen $\alpha>0$, $\nu:=\alpha-1/2$, és legyenek $z_k^{(\nu)}$, $k\in\mathbb{N}$, a J_ν (pozitív) zérushelyei. Ekkor az $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ α-Wiener híd (1.3.3) KL* *sorfejtésében szereplő sajátértékek és megfelelő normált sajátfüggvények:*

$$\lambda_k^{(\alpha)} = \frac{T^2}{(z_k^{(\nu)})^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} e_k^{(\alpha)}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \frac{J_\nu\big(z_k^{(\nu)}(1 - t/T)\big)}{\big|J_{\nu+1}\big(z_k^{(\nu)}\big)\big|} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \frac{J_\nu\big(z_k^{(\nu)}(1 - t/T)\big)}{\big|J_{\nu-1}\big(z_k^{(\nu)}\big)\big|}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

ahol $-1/2 < \nu < 0$ esetén $e_k^{(\alpha)}$-nak a folytonos kiterjesztését vesszük $t = T$-ben, azaz $e_k^{(\alpha)}(T) = 0$, ha $\alpha < 1/2$.

A Barczy és Iglói [4] dolgozat 2.2. és 2.3. Megjegyzéseiben az 1.3.1. Tétel speciális eseteit vizsgáljuk: $\alpha \downarrow 0$ (standard Wiener folyamat) és $\alpha = 1$ (Wiener híd). Megjegyezzük továbbá, hogy a Barczy és Iglói [4] dolgozat 2.5. Tétele $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,S]}$ egy súlyozott KL sorfejtését adja meg, ahol $S \in (0, T)$.

Az alábbiakban $(X_t^{(\alpha)})_{t\in[0,T]}$ KL sorfejtésének néhány alkalmazását tárgyaljuk.

1.3.2. Állítás ([4]). *Legyen $\alpha > 0$ és $\nu := \alpha - 1/2$. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 \,\mathrm{d}t > x\right) = \frac{2^{1-\nu/2}}{\pi\sqrt{\Gamma(\nu+1)}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{z_{2k-1}^{(\nu)}}^{z_{2k}^{(\nu)}} u^{\nu/2-1} \frac{\mathrm{e}^{-xu^2/(2T^2)}}{\sqrt{\big|J_\nu(u)\big|}} \,\mathrm{d}u$$

minden $x > 0$ esetén.

1.3.3. Következmény ([4]). *Legyen $\alpha > 0$, $\nu := \alpha - 1/2$ és legyenek $z_k^{(\nu)}$, $k \in \mathbb{N}$, a J_ν (pozitív) zérushelyei. Ekkor*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 \,\mathrm{d}t > x\Big) &= \big(1 + o(1)\big) \frac{2^{1-\nu/2} T \big(z_1^{(\nu)}\big)^{(\nu-3)/2}}{\sqrt{\pi\,\Gamma(\nu+1) J_{\nu+1}\big(z_1^{(\nu)}\big)}} \, x^{-1/2} \,\mathrm{e}^{-(z_1^{(\nu)})^2 \frac{x}{2T^2}} \\ &= \big(1 + o(1)\big) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T}{z_1^{(\nu)}} \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{(z_1^{(\nu)})^2}{(z_k^{(\nu)})^2}\right)^{-1/2} x^{-1/2} \,\mathrm{e}^{-(z_1^{(\nu)})^2 \frac{x}{2T^2}} \end{aligned}$$

ha $x \to \infty$.

1.3.4. Következmény ([4]). *Legyen $\alpha > 0$ és $\nu := \alpha - 1/2$. Ekkor létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 \,\mathrm{d}t < \varepsilon\right) = \big(c + o(1)\big) \varepsilon^{1/4-\nu/2} \mathrm{e}^{-T^2/(8\varepsilon)}$$

ha $\varepsilon \downarrow 0$.

1.4. Operátor skálázott Wiener hidak

A Barczy et al. [6] dolgozatban az ún. α-Wiener hidak többdimenziós általánosításaival foglalkozunk. Rögzített $T > 0$ és adott $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ és $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times m}$ mátrixok esetén tekintsünk egy d-dimenziós $(X_t)_{t\in[0,T)}$ folyamatot, mely az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) egyértelmű erős megoldása

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{T-t}AX_t\,\mathrm{d}t + \Sigma\,\mathrm{d}B_t, \quad t \in [0,T), \tag{1.4.1}$$

ahol $X_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$, $(B_t)_{t\in[0,T)}$ egy m-dimenziós standard Wiener folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T)}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mezőn és $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T)}$ a $(B_t)_{t\in[0,T)}$ által indukált természetes filtráció teljessé tettje. Megjegyezzük, hogy $m = d$ esetén, ha A és Σ is a $d\times d$-s egységmátrix, akkor az $(X)_{t\in[0,T)}$ folyamat nem más, mint a szokásos d-dimenziós Wiener híd a $[0,T]$ intervallumon. Az 1.3. Alfejezetben kifejtettük, hogy az egydimenziós α-Wiener hidakat határidőügyeletekkel kapcsolatos arbitrázs nyereség modellezésére használják tranzakcióköltség nélküli piacokon. Ez a modell értelmesen általánosítható többdimenzióra is, amikor is véges sok, egymástól esetlegesen függő határidőügyeletet tekintünk.

Ellenőrizhető, hogy az $X_0 = 0$ kezdeti feltétellel tekintett (1.4.1) SDE egyértelmű erős megoldása

$$X_t = \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^A \Sigma\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0,T), \tag{1.4.2}$$

ahol

$$r^A := \mathrm{e}^{A\log r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log r)^k}{k!}A^k, \qquad r > 0. \tag{1.4.3}$$

Az $(X_t)_{t\in[0,T)}$ folyamat egy Gauss folyamat, melynek majdnem minden trajektóriája folytonos. A későbbiekben gyakran fogjuk feltételezni, hogy a Σ mátrix rangja d (és így $m \geqslant d$), de mindig jelezzük majd, ha ezzel a feltételezéssel élünk. Ez egy enyhe megszorítás, ugyanis egyébként az (1.4.2)-beli d-dimenziós $(\Sigma B_t)_{t\in[0,T)}$ Gauss meghajtó folyamat koordinátái lineárisan függőek.

Jelölje $\mathrm{ReSpec}(A) := \{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}$ az A mátrix sajátértékei valós részeinek a halmazát, ahol $\mathrm{Spec}(A)$ az A sajátértékeinek a halmaza. Ha létezik olyan $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, melyre $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$, akkor az (1.4.2)-ben definiált, $X_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$ kezdeti értékű, $(X_t)_{t\in[0,T)}$ folyamatra általában nem teljesül, hogy X_t egy valószínűséggel konvergálna valamilyen determinisztikus d-dimenziós vektorhoz, amint $t \uparrow T$. Ez a tény az egydimenziós esetben ismert, egy explicit többdimenziós példát illetően lásd Barczy et al. [6, Example 3.1]-t.

Egyik fő eredményünk a következő.

1.4.1. Tétel ([6]). *Tegyük fel, hogy a Σ mátrix teljes d rangú (és így $m \geqslant d$). Ha* $\mathrm{ReSpec}(A) \subseteq (0,\infty)$*, akkor az*

$$\widehat{X}_t := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^A \Sigma\,\mathrm{d}B_s & \text{ha } t \in [0,T), \\ 0 & \text{ha } t = T \end{cases}$$

sztochasztikus folyamat egy centrált Gauss folyamat, melynek majdnem minden trajektóriája folytonos.

Megjegyezzük, hogy a $\mathrm{ReSpec}(A) \subseteq (0,\infty)$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $t^A \to 0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$, amint $t \downarrow 0$. Felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy az 1.4.1. Tételbeli azon feltétel, hogy Σ teljes d rangú a $\mathrm{ReSpec}(A) \cap [1/2,\infty) \neq \emptyset$ eset tárgyalásához szükséges. Az 1.4.1. Tétel feltételeinek teljesülése esetén, az $(\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ folyamatot az A és Σ mátrixokhoz tartozó, a $[0,T]$ intervallumon vett operátor skálázott Wiener hídnak hívjuk.

A következőkben operátor skálázott Wiener hídak trajektóriáinak aszimptotikus tulajdonságaival foglalkozunk. Az alábbi eredmény a Barczy és Pap [7] dolgozatbeli 3.4. Tétel részleges általánosítása.

1.4.2. Állítás ([6]). *Ha* $\mathrm{ReSpec}(A) \subseteq (0,1/2)$*, akkor*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}(T-t)^{-A}X_t = M_T\right) = 1,$$

ahol M_T *egy* d*-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Továbbá,*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}(T-t)^{-\widetilde{A}}X_t = 0\right) = 1 \quad ha\ \ \mathrm{ReSpec}(A-\widetilde{A}) \subseteq (0,\infty),$$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\uparrow T}\|(T-t)^{-\widetilde{A}}X_t\| = \infty\right) = 1 \quad ha\ \ \mathrm{ReSpec}(A-\widetilde{A}) \subseteq (-\infty,0)$$

minden olyan $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *mátrix esetén, melyre* $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A$*.*

Következő eredményünk megfogalmazásához szükséges az $(X_t)_{t\in[0,T)}$ folyamat egy spektrálfelbontását bevezetni. Tekintsük az A mátrix f minimál polinomjának $f(\lambda) = f_1(\lambda)\cdots f_p(\lambda)$, $\lambda \in \mathsf{C}$, felbontását, ahol $p \leqslant d$ és f_j minden gyökének valós része a_j, ahol $a_1 < \cdots < a_p$ jelöli A páronként különböző sajátértékeit, C pedig a komplex számok halmazát. Megjegyezzük, hogy f és $f_1,\ldots,f_p$ valós együtthatós polinomok. Lineáris algebrából ismert, hogy $\mathbb{R}^d$ felbontható $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ direkt összeg alakban, ahol minden $j = 1,\ldots,p$ esetén $V_j := \mathrm{Ker}(f_j(A))$ egy A-invariáns altér. Jelölje d_j a V_j altér dimenzióját, $j = 1,\ldots,p$. Ekkor, egy alkalmas bázisban, melyet jelöljünk $\{b_i^{(j)} : i = 1,\ldots,d_j,\ j = 1,\ldots,p\}$ módon, A reprezentálható blokkdiagonális mátrixként $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_p$ módon, ahol A_j minden sajátértékének valós része a_j. Mindezek miatt az A_j mátrixokat *valós spektrálisan egyszerű*-nek hívjuk (A_j minden sajátértékének ugyanaz a valós része). Megadható továbbá $\mathbb{R}^d$-n egyértelmű módon egy olyan $\langle\cdot,\cdot\rangle$ belsőszorzat, hogy a $\{b_i^{(j)} : i = 1,\ldots,d_j,\ j = 1,\ldots,p\}$ bázis ortonormált, következésképpen a V_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, alterek páronként ortogonálisak. Tetszőleges $x = x_1 + \cdots + x_p$ esetén, ahol $x_j \in V_j$, $j = 1,\ldots,p$, jelölje $\pi_j(x)$ az x_j koordinátáit a V_j altér $\{b_i^{(j)} : i = 1,\ldots,d_j\}$ bázisára vonatkozóan. Ekkor $\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d_j}$ egy lineáris projekció, és tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén egyértelműen léteznek olyan $x_j \in V_j$, $j = 1,\ldots,p$, vektorok, hogy $x = x_1+\cdots+x_p = (\pi_1(x),\ldots,\pi_p(x))$ és $t^A x = (t^{A_1}\pi_1(x),\ldots,t^{A_p}\pi_p(x))$ minden $t > 0$ esetén. Végezetül, $X_t = (X_t^{[1]},\ldots,X_t^{[p]})$, ahol az $(X_t^{[j]} = \pi_j(X_t))_{t\in[0,T)}$ sztochasztikus folyamat ugyanolyan alakú, mint (1.4.2). Nevezetesen, minden $j = 1,\ldots,p$ esetén $(X_t)_{t\in[0,T)}$ j-edik spektrális komponense reprezentálható (majdnem biztosan)

$$X_t^{[j]} = \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s}\right)^{A_j} \Sigma_j \,\mathrm{d}B_s \qquad t \in [0,T),$$

alakban, ahol a $\Sigma_j \in \mathbb{R}^{d_j \times m}$ mátrix az $\pi_j(\Sigma y) = \Sigma_j y$, $y \in \mathbb{R}^m$, összefüggés segítségével definiált.

1.4.3. Tétel ([6]). *Ha* $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0, \infty)$ *és* Σ *teljes* d *rangú (és így* $m \geqslant d$*), akkor minden* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t \uparrow T} (T-t)^{-\min(a_j, 1/2)+\varepsilon} \|X_t^{[j]}\| = 0\Big) = 1,$$
$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{t \uparrow T} (T-t)^{-\min(a_j, 1/2)-\varepsilon} \|X_t^{[j]}\| = \infty\Big) = 1, \tag{1.4.4}$$

ahol $a_1 < \cdots < a_p$ *az* A *sajátértékei páronként különböző valós részeit jelöli,* $(X_t^{[j]})_{t \in [0,T)}$, $j = 1, \ldots, p$, *pedig az ezeknek megfelelő spektrális komponensei* $(X_t)_{t \in [0,T)}$*-nek. Továbbá, ha* $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0, 1/2)$*, akkor* (1.4.4) *erősebb formában is igaz:*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t \uparrow T} (T-t)^{-a_j-\varepsilon} \|X_t^{[j]}\| = \infty\Big) = 1.$$

Végezetül az operátor skálázott hidak eloszlásának egyértelműségéről fogalmazunk meg egy eredményt (részletesebben lásd Barczy et al. [6, Section 5]).

1.4.4. Állítás ([6]). *Legyenek* A, $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ *és* $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times m}$, $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d \times \widetilde{m}}$ *olyan mátrixok, hogy* $\operatorname{ReSpec}(A) \subseteq (0, 1/2)$, $\operatorname{ReSpec}(\widetilde{A}) \subseteq (0, 1/2)$ *és* Σ, $\widetilde{\Sigma}$ *teljes* d *rangúak (következésképpen* $m \geqslant d$ *és* $\widetilde{m} \geqslant d$*). Ha az* A *és* Σ*, illetve az* $\widetilde{A}$ *és* $\widetilde{\Sigma}$ *mátrixokhoz tartozó operátor skálázott hidak által a* $[0, T)$ *intervallumon értelmezett folytonos valós értékű függvények terén indukált eloszlások egybeesnek, akkor* $\operatorname{ReSpec}(A) = \operatorname{ReSpec}(\widetilde{A})$.

2. Affin folyamatok

Ez a rész a Barczy et al. [1], [2], [3] és a Barczy és Pap [9] dolgozatokon alapul.

2.1. Kritikus affin folyamatok paraméterbecsléséről

A Barczy et al. [1] dolgozatban először $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ állapotterű skálázott affin folyamatok gyenge konvergenciájára adunk egy egyszerű elégséges feltételrendszert. Röviden szólva, tekintve affin folyamatoknak egy $(Y^{(\theta)}(t), X^{(\theta)}(t))_{t \geqslant 0}$, $\theta > 0$, családját, hogy a megfelelő ún. megengedett paraméterek alkalmas módon konvergálnak (lásd 2.1.3. Tétel), a $\big(\theta^{-1} Y^{(\theta)}(\theta t), \theta^{-1} X^{(\theta)}(\theta t)\big)_{t \geqslant 0}$ skálázott folyamat gyengén konvergál egy affin diffúziós folyamathoz, amint $\theta \to \infty$. Speciális esetként egydimenziós folytonos idejű és folytonos állapotterű bevándorlásos elágazó folyamatok esetén külön megfogalmazzuk a fenti eredményünket. Jelölje $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_{++}$, illetve C a pozitív egész számok, a nem-negatív egész számok, a valós számok, a nem-negatív valós számok, a nem-pozitív valós számok, a pozitív valós számok, illetve a komplex számok halmazát. Legyen $U := \{z_1 + iz_2 : z_1 \in \mathbb{R}_-, \, z_2 \in \mathbb{R}\} \times (i\mathbb{R}^d)$. Jelölje $C_c^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ $(C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d))$ az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$-n értelmezett komplex értékű, kompakt tartójú kétszer (végtelen sokszor) folytonosan differenciálható függvények halmazát, ahol $d \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}_+$-n értelmezett $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ értékű càdlàg függvények halmazát $\mathsf{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ jelöli. A következőkben felidézzük az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ állapotterű affin folyamatok definícióját Duffie et al. [11] alapján.

2.1.1. Definíció ([11]). *Egy* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *állapotterű* $(P_t)_{t \geqslant 0}$ *átmenetvalószínűségi félcsoportot (általános) affin félcsoportnak hívunk, ha karakterisztikus függvénye*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\langle u, \xi \rangle} P_t(x, \mathrm{d}\xi) = \mathrm{e}^{\langle x, \psi(t,u) \rangle + \phi(t,u)} \tag{2.1.1}$$

alakú minden $x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $u \in U$ *és* $t \geqslant 0$ *esetén, ahol* $\psi(t, \cdot)$ *egy folytonos* C^{1+d} *értékű függvény* U*-n,* $\phi(t, \cdot)$ *pedig egy folytonos* C *értékű fügyvény* U*-n, melyre* $\phi(t, 0) = 0$*. A (2.1.1)-beli* $(P_t)_{t \geqslant 0}$ *affin félcsoportot regulárisnak hívjuk, ha sztochasztikusan folytonos (ekvivalens módon, ha minden* $u \in U$ *esetén az* $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \Psi(t, u)$ *és* $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \phi(t, u)$ *függvények folytonosak) és a* $\partial_1 \psi(0, u)$ *és* $\partial_1 \phi(0, u)$ *parciális deriváltak léteznek tetszőleges* $u \in U$ *esetén és folytonosak* $u = 0$*-ban (ahol* $\partial_1 \psi$ *és* $\partial_1 \phi$ *jelöli* ψ *és* ϕ *parciális deriváltjait az első változó szerint).*

2.1.2. Definíció ([11]). *Az* $(a, \alpha, b, \beta, m, \mu)$ *paraméterhatost megengedettnek nevezzük, ha*

(i) $a = (a_{i,j})_{i,j=1}^{1+d} \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$ *egy szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix, melyre* $a_{1,1} = 0$ *(és így* $a_{1,k} = a_{k,1} = 0$, $k \in \{2, \ldots, 1+d\}$*),*

(ii) $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{1+d} \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$ *egy szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix,*

(iii) $b = (b_i)_{i=1}^{1+d} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,

(iv) $\beta = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^{1+d} \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$*, ahol* $\beta_{1,j} = 0$, $j \in \{2, \ldots, 1+d\}$*,*

(v) $m(\mathrm{d}\xi) = m(\mathrm{d}\xi_1, \mathrm{d}\xi_2)$ *egy* σ*-véges mérték* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$*-n, tartója része* $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(0,0)\}$*-nak és* $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \left[\xi_1 + (\|\xi_2\| \wedge \|\xi_2\|^2)\right] m(\mathrm{d}\xi) < \infty$,

(vi) $\mu(\mathrm{d}\xi) = \mu(\mathrm{d}\xi_1, \mathrm{d}\xi_2)$ *egy* σ*-véges mérték* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$*-n, tartója része* $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(0,0)\}$*-nak és* $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \|\xi\| \wedge \|\xi\|^2 \mu(\mathrm{d}\xi) < \infty$.

Duffie et al. [11, Theorem 2.7] alapján, megengedett $(a, \alpha, b, \beta, m, \mu)$ paraméterhatosok esetén létezik $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ állapotterű affin folyamat. Egyik fő eredményünk a következő.

2.1.3. Tétel ([1]). *Tetszőleges* $\theta \in \mathbb{R}_{++}$ *esetén legyen* $(Y^{(\theta)}(t), X^{(\theta)}(t))_{t \geqslant 0}$ *egy olyan* $(1+d)$*-dimenziós* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *állapotterű affin folyamat, melynek megengedett* $(a^{(\theta)}, \alpha^{(\theta)}, b^{(\theta)}, \beta^{(\theta)}, m, \mu)$ *paraméterhatosára*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \|\xi\| \, m(\mathrm{d}\xi) < \infty \qquad \text{és} \qquad \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \|\xi\|^2 \, \mu(\mathrm{d}\xi) < \infty.$$

Tegyük fel, hogy léteznek olyan $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{(1+d)\times(1+d)}$, $b \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$*, és egy olyan* $(Y(0), X(0))$ $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$*-értékű véletlen vektor, melyekre*

$$\theta^{-1} a^{(\theta)} \to a, \qquad \alpha^{(\theta)} \to \alpha, \qquad b^{(\theta)} \to b, \qquad \theta \beta^{(\theta)} \to \beta,$$
$$\theta^{-1}(Y^{(\theta)}(0), X^{(\theta)}(0)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y(0), X(0))$$

amint $\theta \to \infty$. *Ekkor*

$$\left(\theta^{-1}Y^{(\theta)}(\theta t), \theta^{-1}X^{(\theta)}(\theta t)\right)_{t\geqslant 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y(t), X(t))_{t\geqslant 0}$$

$\mathsf{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$*-ben amint* $\theta \to \infty$, *ahol* $(Y(t), X(t))_{t\geqslant 0}$ *egy olyan* $(1+d)$*-dimenziós* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *állapotterű affin diffúziós folyamat, melynek megengedett paraméterhatosa* $(a, \widetilde{\alpha}, \widetilde{b}, \beta, 0, 0)$, *ahol* $\widetilde{\alpha} := \alpha + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \xi\xi^\top \mu(\mathrm{d}\xi)$ *és* $\widetilde{b} = (\widetilde{b}_i)_{i=1}^{1+d}$, *ahol* $\widetilde{b}_i := b_i$, $i \in \{2, \ldots, 1+d\}$, *és* $\widetilde{b}_1 := b_1 + \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \xi_1 \, m(\mathrm{d}\xi)$.

A Barczy et al. [1] dolgozat 2.1. Következményében a 2.1.3. Tételt specializáljuk egydimenziós folytonos idejű, folytonos állapotterű bevándorlásos elágazó folyamatokra is.

A 2.1.3. skálázási Tételt felhasználjuk az alábbi kritikus kétdimenziós affin diffuziós folyamat θ és m paraméterei legkisebb-, ill. feltételes legkisebb négyzetes becslése aszimptotikus viselkedésének a leírásában:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \theta X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t, \end{cases} \qquad t \geqslant 0, \tag{2.1.2}$$

ahol $a \in \mathbb{R}_{++}$ és $b, \theta, m \in \mathbb{R}$, lásd 2.1.5. Tétel. Az alábbiakban először definiáljuk, hogy egy, a (2.1.2) SDE-vel adott affin folyamatot mikor nevezünk kritikusnak.

2.1.4. Definíció ([1]). *Legyen* $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ *egy, a* (2.1.2) *SDE-vel adott affin diffúziós folyamat, melyre* $\mathbb{P}(Y_0 \geqslant 0) = 1$. *Azt mondjuk, hogy* $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ *szubkritikus, kritikus, ill. szuperkritikus, ha az*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-bt} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta t} \end{pmatrix}$$

mátrix spektrálsugara kisebb, mint 1, *egyenlő* 1*-gyel, ill. nagyobb, mint* 1.

A 2.1.4. Definíciót az $\mathbb{E}(Y_t, X_t)$ várható érték vektor $t \to \infty$-beli aszimptotikus viselkedése motiválja, lásd Barczy et al. [1, Proposition 3.2]. Mivel a 2.1.4. Definícióbeli mátrix spektrálsugara $\max(\mathrm{e}^{-bt}, \mathrm{e}^{-\theta t})$, egy, a (2.1.2) SDE-vel adott affin diffúziós folyamat

$$\begin{aligned} \text{szubkritikus} \quad & \text{ha} \;\; b > 0 \;\; \text{és} \;\; \theta > 0, \\ \text{kritikus} \quad & \text{ha} \;\; b = 0, \;\; \theta \geqslant 0 \;\; \text{vagy} \;\; b \geqslant 0, \;\; \theta = 0, \\ \text{szuperkritikus} \quad & \text{ha} \;\; b < 0 \;\; \text{vagy} \;\; \theta < 0. \end{aligned}$$

Az alábbiakban mindvégig feltételezni fogjuk, hogy teljesül a

$$\text{(C) Feltétel:} \quad (b, \theta) = (0, 0), \; \mathbb{P}(Y_0 \geqslant 0) = 1, \\ \mathbb{E}(Y_0) < \infty \;\; \text{és} \;\; \mathbb{E}(X_0^2) < \infty.$$

A Barczy et al. [1] dolgozatbeli 3.1-3.3. Megjegyzésekben kitérünk arra, hogy miért csak ezt a speciális esetet tárgyaljuk. A (θ, m) paraméternek az X_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, mintára támaszkodó legkisebb négyzetes becslése (LSE) az alábbi extrémum probléma megoldása:

$$(\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}}, \widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}}) := \operatorname*{arg\,min}_{(\theta,m)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1} - (m - \theta X_{i-1}))^2.$$

Ellenőrizhető, hogy

$$\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}} = -\frac{n\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})X_{i-1} - \sum_{i=1}^n X_{i-1}\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})}{n\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2}, \qquad (2.1.3)$$

és

$$\widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1}) - \sum_{i=1}^n X_{i-1}\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})X_{i-1}}{n\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2} \qquad (2.1.4)$$

feltéve, hogy $n\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2 > 0$.

2.1.5. Tétel ([1]). *Tegyük fel, hogy teljesül a (C) Feltétel. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(n\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}\right)^2 > 0\right) = 1 \qquad \text{minden } n \geqslant 2 \text{ esetén,}$$

és egyértelműen létezik $(\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}}, \widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}})$ *LSE, melyre* (2.1.3) *és* (2.1.4) *fennáll. Továbbá,*

$$n\widehat{\theta}_n^{\mathrm{LSE}} \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} -\frac{\int_0^1 \mathcal{X}_t\,\mathrm{d}\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_1\int_0^1 \mathcal{X}_t\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 \mathcal{X}_t^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t\,\mathrm{d}t\right)^2} \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

és

$$\widehat{m}_n^{\mathrm{LSE}} \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{X}_1\int_0^1 \mathcal{X}_t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathcal{X}_t\,\mathrm{d}t\int_0^1 \mathcal{X}_t\,\mathrm{d}\mathcal{X}_t}{\int_0^1 \mathcal{X}_t^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \mathcal{X}_t\,\mathrm{d}t\right)^2} \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

ahol $(\mathcal{X}_t)_{t\geqslant 0}$ *az alábbi SDE-vel adott kétdimenziós* $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{X}_t)_{t\geqslant 0}$ *affin folyamat második koordinátája:*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathcal{Y}_t = a\,\mathrm{d}t + \sqrt{\mathcal{Y}_t}\,\mathrm{d}\mathcal{W}_t, \\ \mathrm{d}\mathcal{X}_t = m\,\mathrm{d}t + \sqrt{\mathcal{Y}_t}\,\mathrm{d}\mathcal{B}_t, \end{cases} \qquad t \geqslant 0,$$

ahol a kezdeti feltétel $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{X}_0) = (0, 0)$, *és* $(\mathcal{W}_t)_{t\geqslant 0}$ *és* $(\mathcal{B}_t)_{t\geqslant 0}$ *független standard Wiener folyamatok.*

A Barczy et al. [1] dolgozatban a θ paraméter LS becslésének aszimptotikus viselkedését is leírjuk, feltételezve, hogy m ismert (lásd Barczy et al. [1, Theorem 3.1]), illetve (θ, m) feltételes LS becslésének aszimptotikáját is megadjuk (lásd Barczy et al. [1, Theorem 3.3]).

2.2. Egy kétfaktoros affin folyamat stacionaritása és ergodicitása

A Barczy et al. [2] dolgozatban az alábbi kétdimenziós affin folyamatot (kétfaktoros affin modellt) vizsgáljuk

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt[\alpha]{Y_{t-}}\,\mathrm{d}L_t, & t \geqslant 0, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \theta X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t, & t \geqslant 0, \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

ahol $a > 0$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (1, 2]$, $(L_t)_{t \geqslant 0}$ egy spektrálisan pozitív α-stabilis Lévy folyamat $C_\alpha z^{-1-\alpha} \mathbf{1}_{\{z>0\}}$ Lévy mértékkel, ahol $C_\alpha := (\alpha \Gamma(-\alpha))^{-1}$ (itt Γ a Gamma függvényt jelöli) az $\alpha \in (1, 2)$ esetben, illetve egy standard Wiener folyamat az $\alpha = 2$ esetben, $(B_t)_{t \geqslant 0}$ pedig egy független standard Wiener folyamat. Az $\alpha \in (1, 2)$ esetben L Lévy-Khintchine reprezentációja:

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{iuL_1}) = \exp\left\{\int_0^\infty (\mathrm{e}^{iuz} - 1 - iuz) C_\alpha z^{-1-\alpha} \, \mathrm{d}z\right\} = \exp\left\{\frac{1}{\alpha}(-iu)^\alpha\right\},$$

ahol $u \in \mathbb{R}$. Az $\alpha = 2$ esetben az Y folyamat nem más, mint az ún. Cox-Ingersol-Ross (CIR) folyamat; az $\alpha \in (1, 2)$ esetben pedig Y az ún. α-gyök folyamat. A 2.2.1. Tételben kiderül majd, hogy (Y, X) valóban affin folyamat. Megjegyezzük, hogy az $\alpha = 2$ esetben Chen és Joslin [10, equations (25), (26)] a (2.2.1) modellnek számos pénzügyi matematikai alkalmazását találta. A Barczy et al. [2] dolgozatban a (2.2.1) SDE-vel megadott affin folyamat esetén vizsgáljuk az egyértelmű stacionárius eloszlás létezésének, illetve az ergodicitás kérdéskörét. Affin folyamatok stacionaritását és ergodicitását illeően az eddigi eredmények egy rövid összefoglalója található a Barczy et al. [2] dolgozat 3. és 4. Fejezeteinek a bevezetőiben.

Első eredményünk a (2.2.1) SDE egyértelmű erős megoldásának a létezéséről szól.

2.2.1. Tétel ([2]). *Legyen (η_0, ζ_0) egy olyan véletlen vektor, mely független az $(L_t, B_t)_{t \geqslant 0}$ sztochasztikus folyamattól és $\mathbb{P}(\eta_0 \geqslant 0) = 1$. Ekkor minden $a > 0$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in (1, 2]$ esetén egyértelműen létezik olyan trajektóriánként egyértelmű $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ erős megoldása a (2.2.1) SDE-nek, melyre $\mathbb{P}((Y_0, X_0) = (\eta_0, \zeta_0)) = 1$ és $\mathbb{P}(Y_t \geqslant 0, \ \forall\, t \geqslant 0) = 1$. Továbbá,*

$$Y_t = \mathrm{e}^{-b(t-s)}\left(Y_s + a\int_s^t \mathrm{e}^{-b(s-u)} \, \mathrm{d}u + \int_s^t \mathrm{e}^{-b(s-u)} \sqrt[\alpha]{Y_{u-}} \, \mathrm{d}L_u\right)$$

és

$$X_t = \mathrm{e}^{-\theta(t-s)}\left(X_s + m\int_s^t \mathrm{e}^{-\theta(s-u)} \, \mathrm{d}u + \int_s^t \mathrm{e}^{-\theta(s-u)} \sqrt{Y_u} \, \mathrm{d}B_u\right)$$

ahol $0 \leqslant s \leqslant t$. Az $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ folyamat egy reguláris affin folyamat, melynek infinitézimális generátora

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}f)(y, x) = {} & (a - by) f_1'(y, x) + (m - \theta x) f_2'(y, x) + \frac{1}{2} y f_{2,2}''(y, x) \\ & + y\int_0^\infty \Big(f(y + z, x) - f(y, x) - z f_1'(y, x)\Big) C_\alpha z^{-1-\alpha} \, \mathrm{d}z\end{aligned}$$

az $\alpha \in (1, 2)$ esetben, illetve

$$(\mathcal{A}f)(y, x) = (a - by) f_1'(y, x) + (m - \theta x) f_2'(y, x) + \frac{1}{2} y (f_{1,1}''(y, x) + f_{2,2}''(y, x))$$

az $\alpha = 2$ esetben, ahol $(y, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, és f_i', $i \in \{1, 2\}$, ill. $f_{i,j}''$, $i, j \in \{1, 2\}$, jelöli f első, ill. másodrendű parciális deriváltjait az i-edik, ill. i-edik és j-edik változók szerint.

A következő eredmény a (2.2.1) SDE-vel adott affin modell esetén az egyértelmű stacionárius eloszlás létezéséről szól mind az $\alpha \in (1,2)$ és $\alpha = 2$ esetekben.

2.2.2. Tétel ([2]). *Tekintsük a* (2.2.1) *kétdimenziós affin modellt, ahol* $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, *és a véletlen* (η_0, ζ_0) *kezdeti feltétel független* $(L_t, B_t)_{t \geqslant 0}$*-től, ill.* $\mathbb{P}(\eta_0 \geqslant 0) = 1$. *Ekkor*

(i) $(Y_t, X_t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_\infty, X_\infty)$ *amint* $t \to \infty$, *és* (Y_∞, X_∞) *együttes Laplace-Fourier transzformáltja*

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Y_\infty + i\lambda_2 X_\infty}\right) = \exp\left\{-a\int_0^\infty v_s(\lambda_1, \lambda_2)\,\mathrm{d}s + i\frac{m}{\theta}\lambda_2\right\} \tag{2.2.2}$$

minden $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *esetén, ahol* $v_t(\lambda_1, \lambda_2)$, $t \geqslant 0$, *az alábbi (determinisztikus) differenciálegyenlet egyértelmű nemnegatív megoldása*

$$\begin{cases} \frac{\partial v_t}{\partial t}(\lambda_1, \lambda_2) = -bv_t(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{\alpha}(v_t(\lambda_1, \lambda_2))^\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\theta t}\lambda_2^2, & t \geqslant 0, \\ v_0(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

(ii) *feltételezve, hogy a véletlen* (η_0, ζ_0) *kezdeti feltétel eloszlása megegyezik az (i) részben megadott* (Y_∞, X_∞) *eloszlásával, teljesül, hogy* $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ *erősen stacionárius.*

A következő eredmény a (2.2.1) SDE-vel adott affin diffúziós modell ergodicitásáról szól az $\alpha = 2$ esetben.

2.2.3. Tétel ([2]). *Tekintsük a* (2.2.1) *kétdimenziós affin diffúziós modellt, ahol* $\alpha = 2$, $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, *és a véletlen* (η_0, ζ_0) *kezdeti feltétel független* $(L_t, B_t)_{t \geqslant 0}$*-től, ill.* $\mathbb{P}(\eta_0 \geqslant 0) = 1$. *Ekkor minden olyan* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *Borel mérhető függvényre, melyre* $\mathbb{E}\,|f(Y_\infty, X_\infty)| < \infty$, *kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(Y_s, X_s)\,\mathrm{d}s = \mathbb{E}\,f(Y_\infty, X_\infty)\right) = 1,$$

ahol (Y_∞, X_∞) *eloszlása* (2.2.2) *és* (2.2.3) *által adott* $\alpha = 2$ *választással.*

A következő tételben az (Y_∞, X_∞) határeloszlás számos tulajdonságát foglaljuk össze az $\alpha = 2$ esetben.

2.2.4. Tétel ([2]). *A* (2.2.2) *és* (2.2.3) *által, az* $\alpha = 2$ *esetben adott* (Y_∞, X_∞) *valószínűségi változó abszolút folytonos,* Y_∞ *Laplace transzformáltja*

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Y_\infty}) = \left(1 + \frac{\lambda_1}{2b}\right)^{-2a}, \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}_+,$$

azaz Y_∞ *Gamma eloszlású* $2a$ *és* $2b$ *paraméterekkel. Továbbá,* (Y_∞, X_∞) *minden vegyes momentuma véges, azaz,* $\mathbb{E}(Y_\infty^n |X_\infty|^p) < \infty$ *minden* $n, p \in \mathbb{Z}_+$ *esetén, speciálisan*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y_\infty) = \frac{a}{b}, \qquad \mathbb{E}(X_\infty) = \frac{m}{\theta}, \\
&\mathbb{E}(Y_\infty^2) = \frac{a(2a+1)}{2b^2}, \qquad \mathbb{E}(Y_\infty X_\infty) = \frac{ma}{\theta b}, \qquad \mathbb{E}(X_\infty^2) = \frac{a\theta + 2bm^2}{2b\theta^2}, \\
&\mathbb{E}(Y_\infty X_\infty^2) = \frac{a}{(b+2\theta)2b^2\theta^2}\big(\theta(ab + 2a\theta + \theta) + 2m^2 b(2\theta + b)\big).
\end{aligned}$$

2.3. Paraméterbecslés egy szubkritikus kétfaktoros affin folyamat esetén

A Barczy et al. [3] dolgozatban az alábbi kétdimenziós affin folyamattal (kétfaktoros affin modellel) foglalkozunk

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}L_t, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \theta X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t, \end{cases} \qquad t \geqslant 0, \tag{2.3.1}$$

ahol $a > 0$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, és $(L_t)_{t\geqslant 0}$ és $(B_t)_{t\geqslant 0}$ független standard Wiener folyamatok.

Vegyük észre, hogy a (2.3.1) SDE nem más, mint a (2.2.1) SDE $\alpha = 2$ választással, vagy mint a (2.1.2) SDE. A 2.2.1. Tételben kiderült, hogy a (2.3.1) által megadott (Y, X) folyamat valóban affin folyamat. A Barczy et al. [3] dolgozatban az a, b, m és θ paraméterek folytnos idejű mintára támaszkodó becslésével foglalkozunk. Vizsgáljuk az (a, b, m, θ) maximum likelihood becslésének (MLE) aszimptotikus tulajdonságait folytonos idejű $(Y_t, X_t)_{t\in[0,T]}$, $T > 0$, megfigyelések alapján, illetve (m, θ) legkisebb négyzetes becslésének (LSE) aszimptotikáját folytonos idejű $(X_t)_{t\in[0,T]}$, $T > 0$, megfigyelések alapján. A jelen tézisekben csak az (a, b, m, θ) ML becslésére vonatkozó eredményeinket prezentáljuk, az (m, θ) LS becslésére vonatkozó eredményeket illetően, lásd Barczy et al. [3, Sections 4, 6 and 8]. A 2.1.4. Definícióban megadtuk a (2.3.1)-ben adott affin folyamatok egy osztályozását. Az (a, b, m, θ) paraméterekhez tartozó $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ folyamat által a $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})))$ mérhető téren indukált valószínűségi mértéket $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}$ módon jelöljük. Itt $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ az $\mathbb{R}_+$-n értelmezett $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-értékű folytonos függvények halmazát jelöli, $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ a Borel σ-algebra ezen a téren, a $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})))$ teret pedig az alábbi természetes $(\mathcal{A}_t)_{t\geqslant 0}$ filtrációval ruházzuk fel, ahol $\mathcal{A}_t := \varphi_t^{-1}(\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})))$ és $\varphi_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $\varphi_t(f)(s) := f(t \wedge s)$, $s \geqslant 0$. Tetszőleges $T > 0$ esetén jelölje $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta),T} := \mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}|_{\mathcal{A}_T}$ a $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}$ mérték megszorítását $\mathcal{A}_T$-re.

2.3.1. Lemma ([3]). *Legyen $a \geqslant 1/2$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$, $T > 0$, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$. Legyenek továbbá $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta)}$, illetve $\mathbb{P}_{(1,0,0,0)}$ az (a, b, m, θ) illetve $(1, 0, 0, 0)$ paraméterekhez és ugyanazon (Y_0, X_0) kezdeti értékhez tartozó (2.3.1) SDE egyértelmű erős megoldásai által indukált valószínűségi mértékek. Ekkor $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta),T}$ és $\mathbb{P}_{(1,0,0,0),T}$ abszolút folytonosak egymásra nézve, és $\mathbb{P}_{(a,b,m,\theta),T}$-nak a $\mathbb{P}_{(1,0,0,0),T}$-ra vonatkozó Radon-Nykodim deriváltja (likelihood hányadosa) az alábbi alakot ölti*

$$\begin{aligned} L_T^{(a,b,m,\theta),(1,0,0,0)}((Y_s, X_s)_{s\in[0,T]}) = \exp\Bigg\{ &\int_0^T \left(\frac{a - bY_s - 1}{Y_s}\,\mathrm{d}Y_s + \frac{m - \theta X_s}{Y_s}\,\mathrm{d}X_s \right) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(a - bY_s - 1)(a - bY_s + 1) + (m - \theta X_s)^2}{Y_s}\,\mathrm{d}s \Bigg\}, \end{aligned}$$

ahol $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ az (a, b, m, θ) paraméterekhez és (Y_0, X_0) kezdeti feltételhez tartozó (2.3.1) SDE egyértelmű erős megoldása.

Maximalizálva $\log L_T^{(a,b,m,\theta),(1,0,0,0)}$-t $(a, b, m, \theta) \in \mathbb{R}^4$-ben, az (a, b, m, θ) paraméterek $(Y_t, X_t)_{t\in[0,T]}$ mintára támaszkodó ML becslése az alábbi alakot ölti

$$\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}Y_s - T(Y_T - Y_0)}{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - T^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.2}$$

$$\widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{T \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}Y_s - (Y_T - Y_0) \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s}{\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - T^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.3}$$

$$\widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}X_s - \int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}X_s}{\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}s\right)^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.4}$$

$$\widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}} := \frac{\int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}X_s - \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}X_s}{\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}s\right)^2}, \qquad T > 0, \tag{2.3.5}$$

feltéve, hogy $\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}s\right)^2 > 0$ és $\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - T^2 > 0$.

A következő lemma $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ létezéséről szól.

2.3.1. Lemma ([3]). *Ha* $a \geqslant \frac{1}{2}$, $b, m, \theta \in \mathbb{R}$ *és* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$, *akkor*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T Y_s \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - T^2 \in (0, \infty)\right) = 1, \qquad \forall\ T > 0,$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{X_s^2}{Y_s} \,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \,\mathrm{d}s - \left(\int_0^T \frac{X_s}{Y_s} \,\mathrm{d}s\right)^2 \in (0, \infty)\right) = 1, \qquad \forall\ T > 0,$$

és így egyértelműen létezik $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ *ML becslés, mely a (2.3.2)–(2.3.5) alakot ölti.*

A következő eredmény $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ erős konzisztenciájáról szól a szubkritikus esetben.

2.3.2. Tétel ([3]). *Ha* $a > \frac{1}{2}$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ *és* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$, *akkor* (a, b, m, θ) *ML becslése erősen konzisztens:*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty} (\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}}) = (a, b, m, \theta)\right) = 1.$$

Az $(\widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}}, \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}})$ ML becslés aszimptotikáját a következő tétel írja le a szubkritikus esetben.

2.3.3. Tétel ([3]). *Ha* $a > 1/2$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ *és* $\mathbb{P}(Y_0 > 0) = 1$, *akkor az* (a, b, m, θ) *paraméterek ML becslése aszimptotikusan normális:*

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \widehat{a}_T^{\mathrm{MLE}} - a \\ \widehat{b}_T^{\mathrm{MLE}} - b \\ \widehat{m}_T^{\mathrm{MLE}} - m \\ \widehat{\theta}_T^{\mathrm{MLE}} - \theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4\left(0, \Sigma^{\mathrm{MLE}}\right) \qquad ha\ T \to \infty,$$

ahol $\mathcal{N}_4\left(0, \Sigma^{\mathrm{MLE}}\right)$ *egy 4-dimenziós,* $0 \in \mathbb{R}^4$ *várható érték vektorú és* $\Sigma^{\mathrm{MLE}} := \operatorname{diag}(\Sigma_1^{\mathrm{MLE}}, \Sigma_2^{\mathrm{MLE}})$ *kovariancia mátrixú normális eloszlást jelöl, ahol a blokkdiagonális* Σ^{MLE} *mátrix blokkdiagonálisai*

$$\Sigma_1^{\mathrm{MLE}} := \frac{1}{\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right)\mathbb{E}(Y_\infty) - 1} D_1, \quad D_1 := \begin{bmatrix} \mathbb{E}(Y_\infty) & 1 \\ 1 & \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_2^{\mathrm{MLE}} := \frac{1}{\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right)\mathbb{E}\left(\frac{X_\infty^2}{Y_\infty}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_\infty}{Y_\infty}\right)\right)^2} D_2, \quad D_2 := \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left(\frac{X_\infty^2}{Y_\infty}\right) & \mathbb{E}\left(\frac{X_\infty}{Y_\infty}\right) \\ \mathbb{E}\left(\frac{X_\infty}{Y_\infty}\right) & \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right) \end{bmatrix}.$$

2.4. Folytonos idejű megfigyelésre vonatkozó maximum likelihood becslés aszimptotikus tulajdonságai Heston modellek esetén

A Barczy és Pap [9] dolgozatban a

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}X_t = (\alpha - \beta Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{Y_t}\big(\varrho\,\mathrm{d}W_t + \sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}B_t\big), \end{cases} \qquad t \geqslant 0, \qquad (2.4.1)$$

Heston modellel foglalkozunk, ahol $a > 0$, $b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\varrho \in (-1, 1)$ és $(W_t, B_t)_{t \geqslant 0}$ egy kétdimenziós standard Wiener folyamat. Nevezetesen az (a, b, α, β) paramétereknek az $(X_t)_{t\in[0,T]}$, $T > 0$, folytonos idejű mintára vonatkozó maximum likelihood (ML) becslését vizsgáljuk, az (Y, X) folyamatot valamilyen ismert, determinisztikus $(y_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ kezdeti értékből indítva.

A következőkben $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_{++}$, $\mathbb{R}_-$ ill. $\mathbb{R}_{--}$ a pozitív egész-, nemnegatív egész-, valós-, nem-negatív valós-, pozitív valós-, nem-pozitív-, ill. negatív valós számok halmazát jelöli.

2.4.1. Állítás ([9]). *Legyen* $(Y_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ *a (2.4.1) SDE egyértelmű erős megoldása, melyre* $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_+) = 1$ *és* $\mathbb{E}(Y_0) < \infty$, $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$. *Ekkor*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}(Y_t) \\ \mathbb{E}(X_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-bt} & 0 \\ -\beta\int_0^t \mathrm{e}^{-bu}\,\mathrm{d}u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}(Y_0) \\ \mathbb{E}(X_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t \mathrm{e}^{-bu}\,\mathrm{d}u & 0 \\ -\beta\int_0^t \left(\int_0^u \mathrm{e}^{-bv}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix}$$

minden $t \in \mathbb{R}_+$ *esetén. Következésképpen, ha* $b \in \mathbb{R}_{++}$, *akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(Y_t) = \frac{a}{b}, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-1}\,\mathbb{E}(X_t) = \alpha - \frac{\beta a}{b},$$

ha $b = 0$, *akkor*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\,\mathbb{E}(Y_t) = a, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-2}\,\mathbb{E}(X_t) = -\frac{1}{2}\beta a,$$

ha $b \in \mathbb{R}_{--}$, *akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0) - \frac{a}{b}, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{bt}\,\mathbb{E}(X_t) = \frac{\beta}{b}\,\mathbb{E}(Y_0) - \frac{\beta a}{b^2}.$$

Az $(\mathbb{E}(Y_t), \mathbb{E}(X_t))$ várható érték vektor $t \to \infty$-beli aszimptotikus viselkedése alapján bevezetjük a (2.4.1) SDE által definiált Heston folyamat egy osztályozását.

2.4.2. Definíció ([9]). *Legyen* $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ *a (2.4.1) SDE egyértelmű erős megoldása, melyre* $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_+) = 1$. *Azt mondjuk, hogy* $(Y_t, X_t)_{t \geqslant 0}$ *szubkritikus, kritikus, ill. szuperkritikus, ha* $b \in \mathbb{R}_{++}$, $b = 0$ *ill.* $b \in \mathbb{R}_{--}$.

Ellenőrizhető, hogy az (a, b, α, β) paramétereknek az $(X_t)_{t \in [0,T]}$ mintára támaszkodó ML becslése az alábbi alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_T \\ \widehat{b}_T \\ \widehat{\alpha}_T \\ \widehat{\beta}_T \end{bmatrix} = \frac{1}{\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} - T^2} \begin{bmatrix} \int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}Y_s}{Y_s} - T(Y_T - y_0) \\ T \int_0^T \frac{\mathrm{d}Y_s}{Y_s} - (Y_T - y_0) \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} \\ \int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}X_s}{Y_s} - T(X_T - x_0) \\ T \int_0^T \frac{\mathrm{d}X_s}{Y_s} - (X_T - x_0) \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} \end{bmatrix},$$

feltéve, hogy $\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} > T^2$.

Az következő lemma $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$ létezéséről szól.

2.4.3. Lemma ([9]). *Ha* $a \in \big[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\big)$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}_{++}$ *és* $Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}_{++}$, *akkor*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \int_0^T \frac{1}{Y_s} \, \mathrm{d}s > T^2\right) = 1, \qquad \forall \; T \in \mathbb{R}_{++},$$

így, feltételezve azt is, hogy $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, *és* $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, *egyértelműen létezik* $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$ *ML becslés minden* $T \in \mathbb{R}_{++}$ *esetén.*

Felhívjuk a figyelmet, hogy a 2.4.3. Lemma feltételei mellett $\mathbb{P}(Y_t > 0, \, \forall \, t \in \mathbb{R}_+) = 1$. A következőkben az $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$ ML becslés aszimptotikájával foglalkozunk.

2.4.4. Tétel ([9]). *Ha* $b \in \mathbb{R}_{++}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, *és* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, *akkor az* (a, b, α, β) *paraméterek ML becslése erősen konzisztens, azaz* $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big) \xrightarrow{\text{a.s.}} (a, b, \alpha, \beta)$ *amint* $T \to \infty$, *az* $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$ *esetben, és gyengén konzisztens, azaz* $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} (a, b, \alpha, \beta)$ *amint* $T \to \infty$, *az* $a = \frac{\sigma_1^2}{2}$ *esetben.*

2.4.5. Tétel ([9]). *Ha* $a \in \left[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b \in \mathbb{R}_{--}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, *és* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, *akkor* b *ML becslése erősen konzisztens, azaz* $\widehat{b}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} b$ *amint* $T \to \infty$.

Kritikus Heston modellek esetén az $a \in (\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty)$ esetben (a, b, α, β) ML becslése gyengén konzisztens, a 2.4.7. Tétel következményeként. Szuperkritikus Heston modellek esetén az $a \in \big[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\big)$ esetben, a és α ML becslése még csak nem is gyengén konzisztens, β ML becslése viszont gyengén konzisztens, lásd 2.4.8. Tétel.

A következő tételek $\big(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T, \widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\big)$ aszimptotikus viselkedését írják le a szubkritikus, kritikus, ill. szuperkritikus esetekben.

2.4.6. Tétel ([9]). *Ha* $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b \in \mathbb{R}_{++}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$ *és* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, *akkor* (a, b, α, β) *ML becslése aszimptotikusan normális, azaz*

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{b}_T - b \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \widehat{\beta}_T - \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{S} \otimes \begin{bmatrix} \frac{2b}{2a-\sigma_1^2} & -1 \\ -1 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}^{-1}\right), \qquad \text{ha } T \to \infty,$$

ahol $\otimes$ *mátrixok tenzor szorzatát jelöli és*

$$\boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Véletlen skálázással,

$$\frac{1}{\left(\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s}\right)^{1/2}}\left(\boldsymbol{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} & -T \\ 0 & \left(\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s \int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s} - T^2\right)^{1/2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{b}_T - b \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \widehat{\beta}_T - \beta \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{I}_2\right), \qquad \text{ha } T \to \infty.$$

2.4.7. Tétel ([9]). *Ha* $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$ *és* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, *akkor*

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\log T}(\widehat{a}_T - a) \\ \sqrt{\log T}(\widehat{\alpha}_T - \alpha) \\ T\widehat{b}_T \\ T(\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \left(a - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)^{1/2} \boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{Z}_2 \\ \frac{a - \mathcal{Y}_1}{\int_0^1 \mathcal{Y}_s\,\mathrm{d}s} \\ \frac{\alpha - \mathcal{X}_1}{\int_0^1 \mathcal{Y}_s\,\mathrm{d}s} \end{bmatrix}, \qquad \text{ha } T \to \infty,$$

ahol $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{X}_t)_{t \geqslant 0}$ *az alábbi SDE egyértelmű erős megoldása*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathcal{Y}_t = a\,\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{\mathcal{Y}_t}\,\mathrm{d}\mathcal{W}_t, \\ \mathrm{d}\mathcal{X}_t = \alpha\,\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{\mathcal{Y}_t}\big(\varrho\,\mathrm{d}\mathcal{W}_t + \sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}\mathcal{B}_t\big), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

az $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{X}_0) = (0, 0)$ *kezdeti értékkel, ahol* $(\mathcal{W}_t, \mathcal{B}_t)_{t \geqslant 0}$ *egy kétdimenziós standard Wiener folyamat,* $\boldsymbol{Z}_2$ *egy kétdimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor, mely független* $\big(\mathcal{Y}_1, \int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}t, \mathcal{X}_1\big)$*-től,* $\boldsymbol{S}$ *a* (2.4.2)*-ben definiált, ill.* $\boldsymbol{S}^{1/2}$ *az* $\boldsymbol{S}$ *egyértelmű szimmetrikus, pozitív definit négyzetgyökét jelöli. Véletlen skálázással,*

$$\begin{bmatrix} \left(\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s}\right)^{1/2}(\widehat{a}_T - a) \\ \left(\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{Y_s}\right)^{1/2}(\widehat{\alpha}_T - \alpha) \\ \left(\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}\widehat{b}_T \\ \left(\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}(\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{Z}_2 \\ \frac{a - \mathcal{Y}_1}{\left(\int_0^1 \mathcal{Y}_s\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}} \\ \frac{\alpha - \mathcal{X}_1}{\left(\int_0^1 \mathcal{Y}_s\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}} \end{bmatrix}, \qquad \text{ha } T \to \infty.$$

2.4.8. Tétel ([9]). *Ha* $a \in \left[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b \in \mathbb{R}_{--}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_{++}$, $\varrho \in (-1, 1)$, *és* $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$, *akkor*

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \mathrm{e}^{-bT/2}(\widehat{b}_T - b) \\ \mathrm{e}^{-bT/2}(\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{V}} \\ \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \widetilde{\mathcal{V}} + \sigma_2 \sqrt{1 - \varrho^2} \left(\int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u \right)^{-1/2} Z_1 \\ \left(-\frac{\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}}{b} \right)^{-1/2} \boldsymbol{S}^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix},$$

ha $T \to \infty$, *ahol* $(\widetilde{\mathcal{Y}}_t)_{t \geqslant 0}$ *egy CIR folyamat, az alábbi SDE egyértelmű erős megoldása* $\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Y}}_t = a \mathrm{d}t + \sigma_1 \sqrt{\widetilde{\mathcal{Y}}_t} \, \mathrm{d}\mathcal{W}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, *az* $\widetilde{\mathcal{Y}}_0 = y_0$ *kezdeti értékkel, ahol* $(\mathcal{W}_t)_{t \geqslant 0}$ *egy standard Wiener folyamat,*

$$\widetilde{\mathcal{V}} := \frac{\log \widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b} - \log y_0}{\int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u} + \frac{\sigma_1^2}{2} - a,$$

Z_1 *egy egydimenziós standard normális eloszlású véletlen változó,* $\boldsymbol{Z}_2$ *egy kétdimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor, hogy* $(\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}, \int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u)$, Z_1 *és* $\boldsymbol{Z}_2$ *függetlenek,* $\boldsymbol{S}$ *pedig* (2.4.2)*-ben definiált. Véletlen skálázással,*

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_T - a \\ \widehat{\alpha}_T - \alpha \\ \left(\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} (\widehat{b}_T - b) \\ \left(\int_0^T Y_s \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} (\widehat{\beta}_T - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{V}} \\ \varrho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \widetilde{\mathcal{V}} + \sigma_2 \sqrt{1 - \varrho^2} \left(\int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u \right)^{-1/2} Z_1 \\ \boldsymbol{S}^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix},$$

ha $T \to \infty$.

Bibliography

[1] Barczy, M., Doering, L., Li, Z. and Pap, G. (2013). On parameter estimation for critical affine processes. *Electronic Journal of Statistics* 7 647–696.

[2] Barczy, M., Doering, L., Li, Z. and Pap, G. (2014). Stationarity and ergodicity for an affine two factor model. *Advances in Applied Probability* 46(3) 878–898.

[3] Barczy, M., Doering, L., Li, Z. and Pap, G. (2014). Parameter estimation for a subcritical affine two factor model. *Journal of Statistical Planning and Inference* 151-152 37–59.

[4] Barczy, M. and Iglói, E. (2011). Karhunen-Loève expansions of alpha-Wiener bridges. *Central European Journal of Mathematics* 9(1) 65–84.

[5] Barczy, M. and Kern, P. (2013). Representations of multidimensional linear process bridges. *Random Operators and Stochastic Equations* 21(2) 159–189.

[6] Barczy, M., Kern, P. and Krause, V. (2015). Operator scaled Wiener bridges. *ESAIM: Probability and Statistics* 19 100–114.

[7] Barczy, M. and Pap, G. (2010). Alpha-Wiener bridges: singularity of induced measures and sample path properties. *Stochastic Analysis and Applications* 28(3) 447–466.

[8] Barczy, M. and Pap, G. (2011). Explicit formulas for Laplace transforms of certain functionals of some time inhomogeneous diffusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 380(2) 405–424.

[9] Barczy, M. and Pap, G. (2015+). Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for Heston models based on continuous time observations. To appear in *Statistics*. DOI: 10.1080/02331888.2015.1044991

[10] Chen, H. and Joslin, S. (2012). Generalized transform analysis of affine processes and applications in finance. *Review of Financial Studies* 25(7) 2225–2256.

[11] Duffie, D., Filipović, D. and Schachermayer, W. (2003). Affine processes and applications in finance. *Annals of Applied Probability* 13 984–1053.

[12] Fitzsimmons, P., Pitman, J. and Yor, Y. (1992). Markovian bridges: construction, Palm interpretation, and splicing, in: E. Çinlar et al. (Eds.), Seminar on Stochastic Processes. *Progress in Probability* 33 Birkhäuser, Boston, 1992, pp. 101–134.