Gyakorló feladatok a Valószínűségszámítás kurzushoz

Utolsó frissítés: 2024/10/14

Tartalomjegyzék

1. Kombinatorikus valószínűség **2**

2. Mintavételezési feladatok **4**

3. A valószínűség általános tulajdonságai **6**

4. Geometriai valószínűségi mezők, feltételes valószínűség **8**

5. Feltételes valószínűség, események függetlensége **10**

6. A láncszabály és a teljes valószínűség tétele **12**

7. Diszkrét valószínűségi változók **14**

8. Folytonos valószínűségi változók **15**

9. A nevezetesebb diszkrét és folytonos eloszlások **17**

10. A normális eloszlás és alkalmazásai **19**

11. A várható érték és a szórás tulajdonságai **21**

12. Együttes eloszlás, kovariancia és korreláció **22**

13. Sztochasztikus hasznosságelmélet **23**

Megoldások **24**

1. Kombinatorikus valószínűség

1.1. Véletlenszerűen kiválasztunk a $G = \{-13, -5, 29\}$ és $H = \{-17, 0, 1, 4\}$ halmazokból egy-egy számot.

a. Mennyi annak az esélye, hogy két nempozitív számot választunk ki?

b. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott szám szorzata negatív lesz! (Középszintű érettségi feladat. 2019. ősz)

1.2. Egy ételautomatából négyféle szendvics (sonkás, szalámis, tonhalas és vegetáriánus) illetve háromféle innivaló (tej, kakaó és tea) vásárolható. Anna a szendvicsek közül a sonkásat és a szalámisat, az italok közül pedig a kakaót szereti. Anna véletlenszerűen vásárol egy ételt és egy italt a gépből. Mennyi annak az esélye, hogy

a. a kapott ételt és a kapott italt is szeretni fogja;

b. a kettő közül valamelyiket szeretni fogja;

c. a kettő közül pontosan az egyiket fogja majd szeretni?

1.3. Véletlenszerűen felírunk egy valódi ötjegyű számot, tehát egy olyan ötjegyű számot, melynek nem nulla az első számjegye. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szám jegyei különböző páratlan számok? Mekkora eséllyel lesznek a számban azonos számjegyek?

1.4. Anna, Balázs, Cili és Dénes véletlenszerűen leülnek egymás mellé egy padra. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

a. Anna és Cili egymás mellé ülnek;

b. Dénes nem ül Anna mellé;

c. sem két fiú, sem két lány nem ül egymás mellé?

Hogyan változnak a megoldások, ha egy kör alakú asztalhoz ülnek le?

1.5. Két testvér ugyanabba a 27 fős osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki találomra áll be. Mi a valószínűsége, hogy a két testvér egymás mellé kerül? Mennyi az esélye annak, hogy pontosan tízen állnak közöttük?

1.6. Betűkockákból kirakjuk a KÖRÖMPÖRKÖLT szót, majd a betűket véletlenszerűen összekeverjük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszakapjuk az eredeti szót? Mi annak az esélye, hogy a PÖRKÖLT szó részszóként kiolvasható?

1.7. Magyarországon az autók rendszáma három betűből és három számjegyből áll. A betűk az angol ábécé 26 betűjéből kerülnek ki, de az első betű nem lehet U, X és Y. (Ezen betűk a motorkerékpároknak, az utánfutóknak és a lassú járműveknek vannak fenntartva.) A számjegyekre nincsen korlátozás. Hány különböző rendszám írható fel ezen szabályok szerint? Ha véletlenszerűen választunk egy lehetséges rendszámot,

akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden betű mássalhangzó és minden számjegy páratlan? Mennyi az esélye, hogy a rendszámban található magánhangzó vagy páros számjegy?

1.8. A születésnap paradoxon. A Valószínűségszámítás gyakorlaton a csoportok 30 főre lettek meghirdetve. Mennyi annak az esélye, hogy egy 30 fős csoportban mindenki az évnek ugyanazon a napján született? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a csoportban lesz két ember, aki azonos napon született? (A szökőnapoktól és az ikertestvérektől most tekintsünk el.)

1.9. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége? Annak, hogy „egy kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobunk", vagy annak, hogy „két kockával huszonnégyszer dobva legalább egyszer két hatosunk lesz"?

1.10. Visszatevéssel húzunk egy olyan urnából, melyben 3 piros és 5 zöld golyó található.

a. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első piros golyót harmadikra húzzuk ki? Mennyi az esélye, hogy az n-edik húzásra kapjuk az első pirosat?

b. Mennyi annak az esélye, hogy három húzás során kapunk legalább egy pirosat? Mi annak a valószínűsége, hogy n húzásból kapunk pirosat?

c. Hányat húzzunk, ha az a célunk, hogy 95 százalékos valószínűséggel a kihúzott golyók között legyen piros?

2. Mintavételezési feladatok

2.1. Piri néni nagyon szereti a kertjét, különösen a tulipánjait. Ősszel a legszebb tulipánok közül kiválaszt 5 pirosat, 4 narancssárgát és 2 fehéret, és felszedi a hagymákat. Sajnos a hagymák a téli tárolás során összekeverednek. A következő tavasszal Piri néni véletlenszerűen kiválaszt 7 hagymát, és kiülteti őket. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott hagymák között

a. pontosan 4 piros lesz;

b. pontosan 4 piros, 2 narancssárga és 1 fehér lesz;

c. lesz fehér;

d. lesz piros;

e. pontosan két különböző szín fog majd előfordulni, és ezek 4 illetve 3 tulipánon jelennek meg?

2.2. Az ötöslottón mennyi az esélye annak, hogy

a. minden nyerőszám páratlan;

b. két páros és három páratlan számot húznak ki;

c. kihúzzák a 12-es és a 80-as számot;

d. kihúzzák a 12-es és a 80-as számot, és a 12 a második legkisebb nyerőszám;

e. öt egymást követő számot húznak ki?

2.3. Egy urnában golyókra vannak felírva a pozitív egész számok 1-től 20-ig. Visszatevés nélkül véletlenszerűen kihúzunk 5 golyót. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

a. három olyan golyót húznak ki, amin 13-nál nagyobb, illetve 2 olyat, amin 5-nél kisebb szám van;

b. csak páros számokat húznak ki;

c. a 18-ast kihúzzák

d. a kihúzott számok kettesével követik egymást?

2.4. Az Oklahoma állambeli Ryan városában ismeretlenek rendszeresen betörik a boltok kirakatait. Mivel a rendőrség tehetetlen, a polgármester felkéri a város leghíresebb szülöttjét, Chuck Norrist, hogy tegyen rendet. Chuck a feladathoz véletlenszerűen kiválaszt négyet az otthon tartott fegyverei közül. Házi fegyvergyűjteménye 5 gépkarabélyból, 3 rakétavetőből és 2 lángszóróból áll. (Ezeket természetesen csak önvédelemből tartja.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Chuck pontosan 2 gépkarabélyt, 1 rakétavetőt és 1 lángszórót vesz magához? Mennyi annak az esélye, hogy lesz nála lángszóró?

2.5. Egy gyárban a makaront úgy csomagolják, hogy egy-egy dobozba két csokis, egy málnás és egy narancsos sütemény kerül. Anna a három barátnőjével öt napon keresztül minden nap vásárol egy doboz makaront, és a süteményeket véletlenszerűen kiosztják egymás között. Mennyi annak az esélye, hogy Anna az öt nap folyamán

a. hétfőn, szerdán és csütörtökön csokis, a többi napon nem csokis makaront kap;

b. pontosan 3 csokis makaront kap;

c. összesen 2 csokis, 2 málnás és 1 narancsos makaront kap;

d. egyszer sem kap málnás makaront;

e. legalább egyszer kap csokis vagy narancsos makaront?

2.6. Chuck Norris fiatal korában karatéval foglalkozott, és innen került bele a filmezés világába. Egy edzésen a négy hosszúságú kombinációkat gyakorolta, véletlenszerűen állított össze sorozatokat a következő elemekből: ütés, fejre mért rúgás és testre mért rúgás. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű kombináció pontosan 2 ütésből és 2 testre mért rúgásból áll? Mennyi annak az esélye, hogy a kombinációban lesz fejre mért rúgás?

2.7. Egy osztály 22 tanulója rendel véletlenszerűen A, B vagy C menüt a következő hétre a menzán. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

a. senki sem rendel C menüt;

b. legalább egy tanuló C menüt rendel;

c. pontosan 3 diák fog C menüt rendelni?

2.8. Egy urnában 4 piros és n zöld golyó található. Kihúzunk két golyót az urnából.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott golyók mindegyike piros? Mekkora legyen n értéke, ha az a cél, hogy ez a valószínűség kisebb legyen, mint 0,1?

b. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott golyók között van piros? Mekkora legyen n értéke, ha az a cél, hogy ez a valószínűség kisebb legyen, mint 0,1?

Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli húzásra is.

3. A valószínűség általános tulajdonságai

3.1. Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Tudjuk, hogy 0,25 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott gyártmány anyaghibás, míg 0,4 annak az esélye, hogy mérethibás. A gyártmányok 10 százaléka nem felel meg egyik szabványnak sem. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy

a. a gyártmány anyaghibás, de megfelel a méretszabványnak;

b. a gyártmánynak van valamilyen hibája;

c. a gyártmánynak pontosan egyfajta hibája van?

d. a gyártmány hibátlan?

3.2. A Krypton bolygón a szuperhősöket két tulajdonság alapján tudjuk kategorizálni. Vagy természetfeletti elmével rendelkeznek, ami segítségével tárgyakat tudnak mozgatni; vagy emberfeletti erővel, így legyőzhetetlenek. Egyik nap a bolygó városházáján járva összeszámoltuk, hogy az ott élők hányad része rendelkezik az adott tulajdonságokkal. Számításaink alapján az ott lakók 25%-a rendelkezik természetfeletti elmével, 50%-uk emberfeletti erővel, míg 10%-uk mindkettő tulajdonságot magukénak tudhatják. Véletlenszerűen kiválasztunk egy, a Krypton bolygón élő teremtményt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

a. rendelkezik valamelyik képességgel;

b. természetfeletti elmével rendelkezik, de nincs emberfeletti ereje;

c. pontosan egy szuperképessége van;

d. nem rendelkezik egyik képességgel sem?

3.3. Az egyetem a nyárra három városba szervezett kirándulást, Madridba, Londonba és Krakkóba. A tanév kezdetekor közvélemény-kutatást tartottunk arról, hogy a hallgatók mely kiránduláson vettek részt. A válaszadók 60%-a Madridba, 45%-a Londonba, míg 20%-a Krakkóba utazott el. A hallgatók 23%-a Madridba és Londonba, 18%-a Madridba és Krakkóba, míg 10%-a Londonba és Krakkóba utazott el. Mindhárom kiránduláson a megkérdezettek 4%-a vett részt. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy hallgatót, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy:

a. Madridban vagy Londonban volt;

b. Krakkóban volt, de Madridban nem;

c. pontosan két kiránduláson vett részt a három közül;

d. nem volt egy kiránduláson sem?

Ha tudjuk, hogy a kiválasztott hallgató járt Krakkóban, akkor mennyi annak az esélye, hogy Madridban is járt?

3.4. Egy faluban három sportolási lehetőség van, foci, kosárlabda és pingpong. A lakosok 25%-a focizik, 40%-a kosárlabdázik, és 45%-a pingpongozik. Az emberek tizede szokott focizni és kosárlabdázni is, ötödük szokott focizni és pingpongozni is, továbbá negyedük szokott kosárlabdázni és pingpongozni is. Mindhárom sportot a lakosság 5%-a űzi. Véletlenszerűen kiválasztunk egy lakost, és megkérdezzük tőle, hogy melyik sporttevékenységet szokta végezni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megkérdezett ember

a. focizik vagy pingpongozik;

b. focizik, de nem kosárlabdázik;

c. pontosan kettő sportot űz;

d. semmit sem sportol?

Ha tudjuk, hogy a kiválasztott ember kosárlabdázik, akkor mennyi annak az esélye, hogy focizik is?

3.5. Egy cég három különböző változatot szállít egy adott termékből a vele szerződésben álló boltoknak. Ebben a hónapban a boltok fele rendelt az 1. típusból, és 57% nem rendelt a 2. típusból. A boltok 22%-a rendelt az 1. és a 2. változatból is, továbbá negyedrészük rendelt az 1. és a 3. típusú termékekből is. A boltok 14%-a mindegyik típusból rendelt, míg 0,12 részük egyikből sem. A boltok 6%-a olyan, hogy rendelt a 2. és 3. típusból is, de az 1.-ből nem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott boltba kell szállítani a 3. változatból? A boltok hányad része rendelt csak az 1. típusból? Egy véletlenszerű bolt esetén mennyi az esélye, hogy pontosan egy típust rendeltek a termékből?

3.6. Öt héten keresztül játszunk az ötöslottón. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik héten nyerünk valamennyi pénzt. Fejezzük ki az alábbi eseményeket az $A_1, \ldots, A_5$ események segítségével. Fogalmazzuk meg a B_1, B_2, B_4 események tagadását is.

a. $B_1 =$ minden héten nyerünk;

b. $B_2 =$ egyik héten sem nyerünk;

c. $B_3 =$ az utolsó héten nyerünk először;

d. $B_4 =$ a második héten nyerünk, de a negyedik héten nem;

e. $B_5 =$ pontosan négyszer nyerünk.

3.7. **a.** Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy a tíz dobás során az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékek mindegyike előfordul?

b. Tízszer feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi annak az esélye, hogy a tíz dobás során az $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ számpárok mindegyike előfordul?

4. Geometriai valószínűségi mezők, feltételes valószínűség

4.1. A vihar véletlenszerű helyen elszakít egy 20 km hosszú légvezetéket, ezért a vezeték két végéről egy-egy keresőcsapat indul, hogy felderítsék a szakadás helyét. A nehéz terep miatt az egyik csapat 4 km/h, a másik 6 km/h sebességgel halad. Tekintsük a következő eseményeket:

A = a szakadás helyét a lassabban haladó csapat találja meg

B = valamelyik csapat fél órán belül megtalálja a szakadás helyét

Mennyi az A illetve a B esemény valószínűsége? Mennyi az A esemény valószínűsége, ha a B esemény bekövetkezik? Független egymástól az A és a B esemény?

4.2. Egy metróvonalon 10 perces követési idővel járnak a szerelvények. Ha egy véletlenszerű időpontban megyünk ki az állomásra, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 percet kell várni? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment. Milyen kapcsolatban van az az esemény, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, és az, hogy az előző metró már legalább 3 perce elment: kizáróak, függetlenek, vagy valamelyik maga után vonja a másikat?

4.3. Véletlenszerű helyen eltörünk egy 2 méter hosszú pálcát. Legyen A az az esemény, hogy a keletkezett darabok közül valamelyik hosszabb, mint 120 centiméter, és legyen B az az esemény, hogy mindkét darab rövidebb 150 centiméternél. Mennyi az A esemény valószínűsége? Mennyi A valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezett? Független egymástól az A és a B esemény?

4.4. Egy 32 cm széles és 18 cm magas téglalap alakú monitoron véletlenszerűen felvillan egy-egy pont. Jelölje A azt az eseményt, hogy a bal alsó sarokból induló átló felett villan fel a pont; és legyen B az az esemény, hogy a képernyő jobb oldalán villan fel a pont. Mekkora az A esemény valószínűsége? Mekkora az A esemény valószínűsége, ha tudom, hogy B bekövetkezik? Milyen kapcsolat van a két esemény között?

4.5. Véletlenszerűen választunk egy pontot az 5 egység oldalhosszúságú négyzetben. Mennyi annak az esélye, hogy a pont a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire esik? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a pont a négy oldal közül az északihoz van a legközelebb? Független egymástól az, hogy a pont a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire esik, illetve az, hogy a pont az északi oldalhoz van a legközelebb.

4.6. Autóval végig akarunk menni egy 30 km hosszú egyenes útszakaszon, de balesetet szenvedünk egy véletlenszerű helyen. A közelben egyetlen egy mobiltelefon átjátszó torony van, ez az út felénél az úttól 6 km távolságra található. A torony egy 10 km sugarú kör alakú területet képes kiszolgálni. Mennyi annak az esélye, hogy a baleset helye ebbe a körbe esik, és ezáltal telefonon segítséget tudunk hívni? Mennyi a valószínűsége ugyanennek, ha a baleset az út első 5 kilométeres szakaszán történik?

4.7. Egy porcelán manufaktúrában három fajta tányért gyártanak, levesest, laposat és salátásat. A heti termelést a következő táblázat foglalja össze:

	leveses	lapos	salátás	összesen
hibátlan	470	540	380	1390
selejtes	30	60	20	110
összesen	500	600	400	1500

Véletlenszerűen kiválasztunk egy tányért minőség-ellenőrzésre. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik típusú termékből választottunk, és legyen B az az esemény, hogy a kiválasztott tányér selejtes. Értelmezzük és határozzuk meg a következő valószínűségeket: $P(A_2|B)$; $P(A_1 \cup A_3|\overline{B})$; $P(B|A_2)$; $P(B|\overline{A}_2)$.

5. Feltételes valószínűség, események függetlensége

5.1. **a.** Háromgyerekes családok körében vizsgáljuk, hogy hány fiú és lány van a családban. Jelölje A azt az eseményt, hogy a vizsgált családban legfeljebb egy lány van, és legyen B az, hogy van fiú és lány is. Feltehető, hogy a gyerekek azonos eséllyel születnek fiúnak vagy lánynak. Mennyi az A esemény valószínűsége? Mennyi A valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezik? Ezek alapján mit mondhatunk a két esemény kapcsolatáról?

b. Válaszoljuk az előző pont kérdéseire négygyerekes családok esetén.

5.2. Egy városban tíz autókölcsönző működik, ebből háromnál lehet kisbuszt is bérelni. Egy ember kisbuszt szeretne bérelni, de nem tudja, hogy ezt melyik kölcsönzőnél teheti meg, ezért elkezdi véletlenszerű sorrendben felhívni őket. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan három hívásra lesz majd szüksége? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy az első hívás nem volt sikeres?

5.3. Egy szabályos dobókockát háromszor egymás után véletlenszerűen feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a három dobás 6-os feltéve, hogy legalább az egyik dobás 6-os? Ha tudom, hogy a második dobás hatos lett, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy a harmadik is az lesz? Milyen kapcsolat van ezen események között?

5.4. Egy feladat a mobiltelefonok előtti időkből. Egy barátunk egy adott estén 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Ha kocsmában van, akkor egyenlő eséllyel található meg az öt környékbeli kocsma mindegyikében. Tegyük fel, hogy négyet már megnéztünk, de nem találtuk. Mennyi az esélye, hogy az ötödikben lesz?

5.5. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60 százalékában, a II. gépsor az idő 70 százalékában dolgozik egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű időpontban

a. mindkét gép dolgozik;

b. legalább az egyik gép dolgozik;

c. pontosan egy gép dolgozik;

d. egyik gép sem dolgozik?

5.6. Egy útszakaszon egymás után három jelzőlámpa irányítja a forgalmat. Az egyes lámpáknál egymástól függetlenül rendre 1/2, 2/3 illetve 3/4 valószínűséggel kapunk pirosat. Mennyi az alábbi események valószínűsége?

a. Mindhárom lámpánál pirosat kapunk.

b. Az első lámpánál pirosat kapunk, de a harmadiknál nem.

c. Pontosan két lámpánál kapunk pirosat.

d. Legalább két lámpánál pirosat kapunk.

Feltéve, hogy pontosan két pirosat kapunk, mennyi annak az esélye, hogy a zöldet az első, a második, illetve a harmadik lámpánál kapjuk?

5.7. Roger Federer a világ legjobb teniszezője, azonban ma bal lábbal kelt fel. Szervákat gyakorol, viszont eléggé gyengén megy neki. Az egyes próbálkozások során egymástól függetlenül 15% eséllyel üt ászt. Federer egymás után 10 alkalommal szervál.

a. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első öt nem, míg az utolsó öt szervája ász lesz? Mennyi annak az esélye, hogy üt legalább egy ászt?

b. Legalább hányszor kellene Federernek adogatnia ilyen teljesítmény mellett, ha annak az esélye, hogy legalább egy ászt üt 95% legyen?

5.8. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Ha két ejtőernyőnyi utánpótlást dobnak le, akkor mennyi annak az esélye, hogy ezek közül pontosan egy fog eljutni az alakulathoz? Hány ejtőernyőt dobjanak le ahhoz, hogy ezek közül az alakulat 95 százalékos eséllyel megszerezzen legalább egyet?

5.9. Egy 5×8 kilométeres téglalap alakú város egyik sarkában egy tűzoltó állomás található. Az állomást akkor riasztják, ha a tűz a városon belül és az állomástól légvonalban legfeljebb 4 kilométer távolságra üt ki. Egy adott napon két tűzeset történik, ezek helye egymástól független és véletlenszerű a városon belül. Mennyi annak az esélye, hogy az állomást a második esethez riasztják, de az elsőhöz nem? Hány független tűzesetre mellett teljesül, hogy az állomást 90% eséllyel legalább egyszer riasztják?

6. A láncszabály és a teljes valószínűség tétele

6.1. Egy vizsgán a hallgatók 10%-a bukott meg. A sikeres vizsgát tevő hallgatók negyedrésze kapott jelest. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató jelest kapott?

6.2. Húzzunk ki három lapot visszatevés nélkül egy 32 lapos magyar kártyából. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első, a második és a harmadik lap is ász lesz? Feltéve, hogy az első ász lett, mekkora annak a valószínűsége, hogy a másik kettő is az lesz?

6.3. Egy adott területen vegyszeres szúnyogirtást végeznek három egymást követő alkalommal. Az első permetezés után a szúnyogok 80%-a elpusztul, de az életben maradt rovaroknak nő az ellenálló képessége a szerrel szemben. Ennek az a következménye, hogy a második permetezéskor az életben maradt szúnyogoknak már csak a 40%-a pusztul el, a harmadik irtásnál pedig csak a maradék 20%-a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szúnyog túléli mindhárom permetezést? Feltéve, hogy egy szúnyog túlélte az első permetezést, mennyi a valószínűsége annak, hogy a másodikat és a harmadikat is túléli?

6.4. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés 20%-át, a második pedig a 30%-át. Az első gépnél 5% a selejtarány, a másodiknál és a harmadiknál 10%. Véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt az üzem termeléséből. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott termék a harmadik gépen készült és selejtes? Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott termék selejtes? Ha a gyártmány selejtes, akkor mennyi annak az esélye, hogy az első, a második illetve a harmadik gépen készült?

6.5. Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mi annak a valószínűsége, hogy az alma másodosztályú? Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi a valószínűsége, hogy az első, a második, a harmadik, illetve a negyedik termelő szállította?

6.6. Lajosnak lejárt a bérlete, mégis felszáll az első járműre, ami hazaviszi. A megállóban 25% valószínűséggel érkezik először busz, 40% valószínűséggel troli, a többi esetben pedig villamos. A buszon 45% eséllyel jön ellenőr, a trolin 10% eséllyel, a villamoson pedig 30% eséllyel. Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel? Ha otthon szomorúan meséli el, hogy megbüntették, akkor mennyi a valószínűsége, hogy busszal utazott?

6.7. A valószínűségszámítás gyakorlatra járó hallgatók 25%-a pénzügy és számvitel, 40%-a kereskedelem és marketing, a többi pedig gazdálkodás és menedzsment szakon tanul. A pénzügy és számvitel szakirányon a lányok aránya 60%, a másik két szakirányon ez az arány 30%. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató gazdálkodás és menedzsment szakon tanul és lány?

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott hallgató lány? Ha a hallgató lány, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy pénzügy és számvitel szakirányon van?

6.8. Vándorlása közben Odüsszeusz egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénba, a másik Mükénébe, a harmadik pedig Spártába vezet. Azt is tudta, hogy az athéniak átlagosan minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal, a spártaiak pedig becsületesek, sosem hazudnak. Kockadobással döntötte el, melyik utat válassza, egyforma esélyt adva mindegyiknek. Ezután ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Itt az első szembejövőtől megkérdezte, hogy mennyi kettő meg kettő, mekkora annak a valószínűsége, hogy igazat mondott? Ha azt a választ kapta, hogy négy, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy Mükénébe érkezett?

6.9. A hűtőben négy doboz tej van: egy friss; egy, ami egy hete lejárt, és biztosan romlott; továbbá van két doboz, ami egy napja járt le, és 0,3 valószínűséggel romlottak. Véletlenszerűen kiválasztunk egy doboz tejet. Mekkora az esélye, hogy ez a tej nem romlott? Ha megkóstoljuk a kivett tejet, és az romlottnak bizonyul, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az egy hete lejárt tejet vettük ki?

6.10. Van két pénzérménk, egy szabályos, és egy olyan, ami 1/4 valószínűséggel ad fejet. Véletlenszerűen kiválasztok egy érmét, és feldobom. Mennyi annak az esélye, hogy fejet kapok? Feltéve, hogy fejet kaptam, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottam?

6.11. Egy ritka betegséget tízezer emberből átlagosan egy kap el. A szűrőteszt csak 97%-os megbízhatóságú, azaz ekkora a valószínűsége, hogy helyes eredményt ad, akár beteg valaki, akár egészséges. Egy ember megvizsgáltatja magát, és a teszt eredménye pozitív. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg beteg?

6.12. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés felét, a második a 40%-át. Az első és a második gépnél is a termékek 3%-a selejtes. A harmadik gép esetében hány százalék a selejtarány, ha tudjuk, hogy az üzemben termelt selejtes termékek közül 32,5% készült a harmadik gépnél?

7. Diszkrét valószínűségi változók

7.1. Mennyi legyen az a valós paraméter értéke, hogy az alábbi értékek valószínűségeloszlást alkossanak? Adjuk meg az eloszlás várható értékét és szórását is.

a. $p_1 = 0{,}15a$, $p_2 = 0{,}55a$, $p_3 = 0{,}25a$, $p_4 = 0{,}3a$;

b. $p_0 = 0{,}25$, $p_2 = a$, $p_{10} = a^2$.

7.2. Anna, Bori és Cili pizzát rendelnek, három különböző fajtát. Amikor a pizza megérkezik, véletlenszerűen osztják ki egymás között a dobozokat. Jelölje ξ azt, hogy a lányok közül hányan kaptak olyan pizzát, amilyet rendeltek. Határozzuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt is!

7.3. Egy gyárban három nagyteljesítményű dízelmotor üzemel, melyek egy adott időpontban egymástól függetlenül 0,5, 0,6 illetve 0,7 valószínűséggel működnek. Jelölje ξ azt, hogy egy adott időpontban hány dízelmotor üzemel.

a. Adjuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását! Írjuk fel és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt is!

b. Amennyiben egy adott időpillanatban x dízelmotor üzemel, akkor a dolgozókat $50 + 20x$ dB zajterhelés éri. Határozzuk meg a zajterhelés átlagos értékét.

7.4. Anna két mozijegyet kap egy vetítésre, ezért egymás után felhívja a három barátnőjét, hogy kísérőt szerezzen maga mellé. Egészen addig hívja fel őket egymás után, míg valaki bele nem egyezik, hogy elkíséri, vagy míg el nem fogynak a barátnők. A három barátnője egymástól függetlenül 0,4 valószínűséggel mond igent Anna meg hívására.

a. Adjuk meg a lefolytatott telefonhívások számának eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy Annának legfeljebb két barátnőjét kell majd felhívnia? Írjuk fel és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt is!

b. Annának egy-egy telefonhívás 30 forintba kerül. Határozzuk meg, hogy várhatóan mennyi pénzbe kerül kísérőt szereznie a vetítésre.

8. Folytonos valószínűségi változók

8.1. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt, és adjuk meg a ξ változó értékkészletét! Mennyi a $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5)$ és a $P(\xi > 0{,}5)$ valószínűségek értéke? Határozzuk meg a ξ változó várható értékét és szórását is!

8.2. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = 1/(x \ln 2)$, ha $1 \le x \le 2$, és $f_\xi(x) = 0$ minden más x esetén. Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg a ξ változó értékkészletét! Mennyi a $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5)$ és a $P(\xi \le 1{,}5)$ valószínűségek értéke? Határozzuk meg a ξ változó várható értékét és szórását is!

8.3. Jelölje ξ egy adott befektetési alap értéknövekedését az elkövetkezendő egy évben! Egy elemzés szerint a ξ változó az alábbi sűrűségfüggvénnyel írható le, az értékek milliárd forintban értendőek:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0{,}08 + ax, & -1 \le x \le 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a. Határozzuk meg az a paraméter értékét, és adjuk meg az értékkészletet!

b. Írjuk fel és ábrázoljuk a változó eloszlásfüggvényét! Ennek segítségével adjuk meg a ξ változó 1%-os kvantilisét!

c. Mennyi annak az esélye, hogy az értéknövekedés -2 és 2 közé fog majd esni? Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 1 lesz az értéknövekedés?

d. Egy befektető az elért eredményt a következő hasznossági függvénnyel értékeli:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Ábrázoljuk az u függvényt! Mi az elérhető maximális hasznosság, és mennyi az $u(\xi)$ elért hasznosság várható értéke?

8.4. Amikor telefonálok, a beszélgetéseim percekben kifejezett hosszúsága egy ξ valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = a/x^2$, ha $1 \le x \le 5$, és $f_\xi(x) = 0$ egyébként.

a. Határozzuk meg az a paraméter értékét és a ξ változó értékkészletét!

b. Írjuk fel és ábrázoljuk a változó eloszlásfüggvényét, és adjuk meg a hívásaim hosszának a mediánját!

c. Mennyi annak az esélye, hogy egy telefonbeszélgetésem hossza 3 és 7 perc közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy egy hívásom legfeljebb 2 perces lesz?

d. A szolgáltatóval egy olyan szerződést kötöttem, hogy az egyes hívásoknál az első 3 perc percenként 25 forintba kerül, és ha a beszélgetés 3 percnél hosszabb, akkor a fennmaradó részért már nem kell fizetnem. Jelölje $c(x)$ azt, hogy mennyibe kerül egy x perc hosszúságú beszélgetés! Írjuk fel formulával és ábrázoljuk koordináta-rendszerben a c függvényt! Határozzuk meg azt, hogy átlagosan mennyit kell fizetnem egy-egy telefonbeszélgetésért!

9. A nevezetesebb diszkrét és folytonos eloszlások

9.1. **a.** Egy ingatlanügynökségnél az eladott lakások 30%-át szokták a vevők hitel felvétele mellett fizetni. A következő hétre 6 lakás van eladásra előjegyezve. A ξ valószínűségi változó jelölje a hitelkonstrukcióban értékesített lakások számát. Adjuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mi annak a valószínűsége, hogy egynél több, de ötnél kevesebb lakáseladáshoz vesznek majd fel hitelt?

b. Egy másik ingatlanügynökségnél a lakások 40%-át szokták eladni hitelfelvétel mellett, és náluk 8 eladás van előjegyezve a jövő hétre. Mennyi annak az esélye, hogy az első ügynökségnél pontosan 2, a másodiknál pedig pontosan 4 lakást adnak el hitelkonstrukcióban? (A két cégnél a lakáseladások száma független.)

9.2. Lajos kulcscsomóján három kulcs van, ezek közül az egyik a lakásának a bejárati ajtaját nyitja. Egy este elmegy a barátaival italozni, és hazaérve azt tapasztalja, hogy nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Elhatározza, hogy addig választ véletlenszerűen újabb és újabb kulcsot, míg végül sikerül kinyitnia a lakás ajtaját.

a. Adjuk meg a szükséges próbálkozások számának az eloszlását, ha Lajos nem jegyzi meg, hogy melyik kulccsal próbálkozott már korábban, hanem minden egyes alkalommal a három közül választ egyet véletlenszerűen? Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb három próbálkozásra lesz majd szükség? Mennyi a próbálkozások számának a várható értéke és szórása?

b. Miben változik az a. pont megoldása, ha Lajos minden egyes próbálkozás során 1/2 valószínűséggel fejjel lefelé próbálja meg beleerőltetni a kulcsot a zárba? (Fejjel lefelé a jó kulccsal sem tudja kinyitni az ajtót.)

c. Miben változik az a. pont megoldása, ha Lajos megjegyzi, hogy melyik kulccsal próbálkozott már korábban?

9.3. Egy gyárban minden nap 50 terméket készítenek, és ebből 15 darab mindig selejtes. Minőségellenőrzéskor véletlenszerűen kivesznek egyszerre 5 terméket.

a. Jelölje ξ a mintában talált selejtes termékek számát egy adott napon. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb egy selejtes termék lesz a mintában?

b. Mennyi az esélye annak, hogy három egymást követő napot vizsgálva valamelyik alkalommal egynél több selejtet találnak a mintában? (Feltehető, hogy az egyes napok termelése független egymástól.)

9.4. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 6 zöld golyó.

a. Visszatevéssel kihúzunk 3 golyót. Határozzuk meg a kihúzott piros golyók számának eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan két piros golyót húzunk majd ki ?

b. Oldjuk meg az a. feladatot visszatevés nélküli mintavételezéssel is.

c. Addig húzunk visszatevéssel, míg piros golyót nem kapunk. Adjuk meg a szükséges húzások számának eloszlását és várható értékét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első piros pontosan a második húzásra jön majd?

9.5. Egy adatszerverre óránként véletlen számú, átlagosan 5 lekérdezés érkezik. Feltehető, hogy az egy órára eső lekérdezések száma Poisson-eloszlást követ. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott óraban pontosan három lekérdezés történik? Mennyi az egy órára jutó lekérdezések számának a szórása?

9.6. A TESCO-ban a narancsot a minőségtől függően változó áron árulják. Feltehető, hogy az ár egyenletes eloszlást követ 300 és 500 forint között.

a. Jelölje ξ a narancs árát egy véletlenszerűen választott napon. Írjuk fel és ábrázoljuk a ξ sűrűségfüggvényét. Átlagosan mennyibe kerül a narancs a TESCO-ban? Mennyi az ár szórása? Mennyi annak az esélye, hogy a kilónkénti ár 375 forint alatt marad?

b. Jelölje η azt, hogy 1500 forintból hány kiló narancsot tudok vásárolni. Fejezzük ki az η valószínűségi változót a ξ segítségével. Mennyi annak az esélye, hogy a pénzem elég 4 kiló narancsra? Mennyi az η várható értéke, és mit fejez ki ez a várható érték? Teljesül az az egyenlőség, hogy $E(\eta) = 1500/E(\xi)$?

c. Határozzuk meg az η változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét! Számoljuk ki az η változó várható értékét közvetlenül a sűrűségfüggvényből is! Azt az eredményt kapjuk, amit az előző pontban?

10. A normális eloszlás és alkalmazásai

10.1. Az IQ teszteket úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 90 és 120 közé? A Mensa egy nemzetközi egyesület, ahol a belépés feltétele a legalább 131 pontos IQ. A népesség hány százaléka felel meg ennek a követelménynek? Mondjunk egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az emberek 95 százalékának ebbe az intervallumba esik az IQ pontszáma.

10.2. A ropigyárban a készülő ropik hossza normális eloszlást követ 12 cm várható értékkel és 3 mm szórással. Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ropi hossza legfeljebb 2 milliméterrel tér el az átlagos értéktől? Mennyi az esélye, hogy a ropi rövidebb 11,5 cm-nél? Mondjunk egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a ropik 99 százalékának a hossza ebbe az intervallumba esik.

10.3. Angol tudósok azt vizsgálták, hogy a szavannán élő majmok reggelente milyen eloszlás szerint ébrednek fel, és másznak le a fáról. A megfigyelések alapján azt találták, hogy az ébredési idő egy olyan valószínűségi változó, mely normális eloszlást követ 7 óra várható értékkel és 30 perc szórással. A majmok mekkora hányada kel fel 8 óra után? Adjunk meg egy olyan időintervallumot, melyre teljesül, hogy a majmok 90 százaléka ebben az időintervallumban mászik le a fáról. (Valós kutatás alapján.)

10.4. Feldobok 500 szabályos dobókockát. Mennyi a kapott hatosok számának a várható értéke és szórása? Mennyi annak a valószínűsége, hogy 100-nál több hatos kapok? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a hatosok száma 95% százalék valószínűséggel ebbe az intervallumba esik.

10.5. Egyes házimacska fajtáknál előfordul a kalikó (fekete-vörös-fehér) színkombináció, ami elég népszerű a macskatartók körében. Egy tenyésztőnek egy fekete színű hím és egy kalikó nőstény macskája van, és az elmúlt évek folyamán 60 kismacska született. A macskák színe genetikai úton öröklődik, és egy fekete hím és egy kalikó nőstény esetén az utódok egymástól függetlenül rendre 1/4 valószínűséggel lesznek kalikók. Jelölje ξ a tenyésztőnél született kalikó kismacskák számát. Adjuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi az esélye, hogy a 60 utódból legalább 18 kalikó lett? Milyen t értékre teljesül, hogy $P(\xi \leq t) = 0{,}99$. (Bónusz feladat: hogyan változik a feladat megoldása, ha a hím a kalikó és a nőstény a fekete?)

10.6. Egy biztosítónak 10 ezer ügyfele van, akik egymástól függetlenül 1% valószínűséggel szenvednek el káreseményt egy adott évben. Jelölje ξ a káresemények számát a biztosítottak körében. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy a káresemények száma 85 és 115 közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy $P(\xi \geq t) = 10\%$.

10.7. Alkalmazható a normális eloszlással való közelítés a **9.1.** feladatban?

10.8. **a.** Feldobok egy szabályos dobókockát. Határozzuk meg a dobott szám várható értékét és szórását.

b. Feldobok 500 szabályos dobókockát. Mennyi a dobott számok összegének a várható értéke és a szórása? Ennek ismeretében meg tudjuk azt mondani, hogy az összeg mekkora valószínűséggel fog mondjuk 1700 és 1800 közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy a dobások összege 95% eséllyel meghaladja a t számot.

10.9. Egy biztosítótársaságnál egy adott típusú biztosítás esetében az egyedi kárértékek egyenletes eloszlást követnek 200 és 400 ezer forint között. Egy adott hónapban 100 egymástól független kárbejelentés érkezik. Mennyi az össz kárérték várható értéke és szórása? Ennyi információ alapján meg tudjuk azt mondani, hogy az össz kárérték mekkora valószínűséggel esik 29 és 31 millió forint közé? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy a teljes kárérték 90% eséllyel t alatt marad.

10.10. A repülőgépeknél fontos tényező az utasok és a poggyász teljes tömege. A statisztikai adatok szerint egy-egy utasnak és a személyes poggyászának az együttes tömege egy olyan valószínűségi változó, melynek a várható értéke 100 kg, szórása pedig 25 kg. (A különböző utasok tömege független egymástól.) Tegyük fel, hogy egy repülőgépre 120 utas száll fel. Adjuk meg az utasok és a poggyász teljes tömegének a várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a tömeg 12,8 tonna alatt marad? Adjunk meg egy olyan intervallumot, mely 99% valószínűséggel tartalmazza az utasok és a poggyász teljes tömegét.

10.11. Alkalmazhatjuk a centrális határeloszlás-tételt a **11.1.** és a **11.2.** feladatban az utolsó kérdések megválaszolására?

11. A várható érték és a szórás tulajdonságai

11.1. Szegeden az éves csapadékmennyiség átlagos értéke 490 mm, szórása 100 mm. Feltehető, hogy a csapadék mennyisége az egyes években független egymástól. Várhatóan mennyi csapadék fog hullani Szegeden a következő három évben összesen? Mennyi a hároméves csapadékmennyiség szórása? Ennyi információ alapján meg tudjuk azt mondani, hogy milyen valószínűséggel fog a három év alatt összesen legalább 1600 mm csapadék lehullani?

11.2. A magyar egyetemisták testtömegének az átlaga 80 kg, a szórása 15 kg. A Károlyi Kollégiumban beszáll a liftbe 8 ember, akikről feltehető, hogy egymástól független a tömegük. Határozzuk meg a 8 egyetemista együttes testtömegének várható értékét és szórását. Ennyi információ birtokában meg tudjuk azt mondani, hogy a 8 ember össztömege mekkora eséllyel éri el a 800 kg-ot, ami a lift maximális teherbírása?

11.3. Egy család 4 kg narancsot és 2 kg banánt vásárol. A két gyümölcs ára tekinthető valószínűségi változónak. A narancs árának a várható értéke 300 Ft, szórása 30 Ft, míg a banán árának a várható értéke 400 Ft, szórása 50 Ft. Várhatóan hány forintot fog majd a család gyümölcsre költeni? Mennyi az elköltött összeg szórása, ha a két gyümölcs ára független egymástól? A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk az elköltött összeg várható értékét és varianciáját.

11.4. Egy tervezett építkezésnél 50 tonna acélra és 10 tonna rézre lesz majd szükség. Az acél és a réz jövőbeli ára valószínűségi változó, melyeknek a várható értéke 700 illetve 1500 dollár/tonna, szórása pedig 20 illetve 80 dollát/tonna. Várhatóan mekkora költséget jelent az építkezéshez szükséges anyagok megvásárlása? Határozzuk meg a költség szórását abban az esetben, ha az acél és a réz ára független egymástól. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a teljes költség várható értékét és varianciáját.

11.5. Egy gazdánál 100 mázsa burgonya termett a nyáron, és azon gondolkodik, hogy mit is kezdjen vele. Egyrészt holnap a nagybani piacon el tudja adni akár az egészet is fix 9.000 forintos mázsánkénti áron, és akkor nem kell tovább kínlódnia vele. Másrészt el is tárolhatja a burgonyát, hogy majd tavasszal értékesítse, de ez kockázatos, hiszen nem tudja előre az árakat. A gazda úgy ítéli meg, hogy a burgonya mázsánkénti ára tavasszal várható értékben 12.000 forint lesz 2.500 forintos szórással.

- **a.** Tegyük fel, hogy a gazda a mázsa burgonyát tárol el, a maradékot eladja holnap a nagybanin. Várható értékben mennyi bevétele lesz a 100 mázsa burgonyából? Mennyi a bevétel szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást az a paraméter függvényében. (A pénz időértékétől most tekintsünk el.)
- **b.** Hány mázsa burgonyát tároljon el a gazda tavaszig, ha várható értékben legalább 1.050.000 forint bevételt szeretne elérni?
- **c.** Mennyi burgonyát tároljon el tavaszig, ha a bevétel szórása legfeljebb 75.000 ezer forint lehet? Ekkor mennyi a bevétel várható értéke?

12. Együttes eloszlás, kovariancia és korreláció

12.1. Adott egy tíz- és egy húszforintos pénzérme. A tízforintos két oldalára 1-et illetve 0-t írnuk, a húszforintos két oldalára pedig 2-t illetve 0-t. Feldobva a két pénzérmét jelölje ξ a dobott értékek közül a nagyobbat, η pedig a kisebbet. (Ha két 0-t dobunk, akkor legyen $\xi = \eta = 0$.) Határozzuk meg a két változó értékkészletét, együttes eloszlását és a marginális eloszlásokat. Mennyi a két változó várható értéke, szórása és korrelációs együtthatója? Független egymástól a két változó?

12.2. Adott két részvény, A és B, mindkét részvényből 1 millió forint értékben vásárolunk. A részvények árfolyamváltozására a következő 1 évben két különböző esetet fogunk majd vizsgálni:

1. eset: 1/2 valószínűséggel mindkét részvény árfolyama 30 százalékkal emelkedik; és 1/2 valószínűséggel mindkét árfolyam 10 százalékkal csökken.

2. eset: 1/2 valószínűséggel az A részvény árfolyama emelkedik 30 százalékot, a B részvényé pedig esik 10 százalékot; 1/2 valószínűséggel pedig az A részvény esik 10 százalékot, és a B részvény pedig emelkedik 30 százalékot.

Jelölje rendre ξ és η azt, hogy az A illetve a B részvénycsomag hány millió forintot fog majd érni egy év múlva! A fenti két esetet külön-külön vizsgálva válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

a. Írjuk fel a ξ és η változók együttes eloszlását! Határozzuk meg a marginális eloszlásokat és a korrelációs együtthatót!

b. Adjuk meg a teljes portfólió jövőbeli értékének, tehát a $\xi + \eta$ változónak a várható értékét és szórását! Ehhez alkalmazzuk a várható értékre és a varianciára vonatkozó azonosságokat! Az 1. és a 2. esetet összehasonlítva hogyan viszonyulnak egymáshoz a várható értékek illetve a szórások? Mi ennek a szemléletes magyarázata?

c. Adjuk meg a $\xi + \eta$ változó valószínűségeloszlását, majd ennek segítségével számoljuk ki ismét a $\xi + \eta$ összeg várható értékét és szórását! Ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előző feladatrészben?

13. Sztochasztikus hasznosságelmélet

13.1. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani. A játékos feldob egy szabályos pénzérmét, és ha fejet kap, akkor nyer 1 millió forintot, míg ha írást, akkor nem nyer semmit.

a. Mennyi a játék igazságos ára? A kaszinó milyen árat fog kérni ezért a játékért?

b. Tegyük fel, hogy a kaszinó 450 ezer forintban állapítja meg a játék árát. Az olvasó hajlandó lenne ezt a játékot játszani a kaszinó ellen, ha tetszőleges sokszor játszhatna, és átmenetileg hitelt is felvehetne? És ha csak egyetlen egy játékot lehetne játszani, akkor érdemes lenne beszállni? Az olvasó milyen áron szállna be, ha csak egy játékra lenne lehetősége?

c. Tegyük fel, hogy egy játékos a vagyoni helyzetét az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvénnyel értékeli. Egyetlen egy játék esetén mi az elfogadható ár?

13.2. Biztosítást szeretnénk kötni egy 9 millió forint értékű lakóházra. Tegyük fel, hogy az elkövetkezendő egy évben 99,9% valószínűséggel nem lesz kárunk, és 0,1% eséllyel teljesen leég a ház. Ha van biztosításunk, akkor a biztosító a keletkezett kárt teljes mértékben megtéríti. Mi az a minimális biztosítási díj, amit a biztosító ki fog majd szabni ránk? Ha a vagyoni helyzetünket az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvényen keresztül értékeljük, akkor racionálisan gondolkodó fogyasztóként mi az a maximális összeg, amit még hajlandóak vagyunk kifizetni ezért a biztosításért?

Megoldások

1.1. **a.** $4/12$ **b.** $5/12$

1.2. **a.** $2/12$ **b.** $8/12$ **c.** $6/12$

1.3. $5!/(9 \cdot 10^4)$; $1 - (9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)/(9 \cdot 10^4)$

1.4. Ha padra ülnek: **a.** $12/4!$ **b.** $6/4!$ **c.** $8/4!$
Ha asztalhoz ülnek: **a.** $4/3!$ **b.** $2/3!$ **c.** $2/3!$

1.5. $(26 \cdot 2) \cdot 25!/27!$; $(16 \cdot 2) \cdot 25!/27!$

1.6. $2! \cdot 4! \cdot 2!/12!$; $6 \cdot (1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 5!/12!$

1.7. összes eset $= (23 \cdot 26 \cdot 26) \cdot 10^3 = 15.548.000$;
mind mássalhangzó és mind páratlan $= (19 \cdot 21 \cdot 21) \cdot 5^3 = 1.047.375$;
P(mind mássalhangzó és mind páratlan) $= 1.047.375/15.548.000 \approx 0{,}067$;
P(van magánhangzó vagy van páros) $= (15.548.000 - 1.047.375)/15.548.000 = 0{,}933$.

1.8. $365/365^{30}$; $(365^{30} - 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 336)/365^{30} \approx 0{,}706 = 70{,}6\%$.

1.9. P(egy kockával 4-szer dobva legalább egyszer hatos) $= 1 - 5^4/6^4 \approx 0{,}518$
P(két kockával 24-szer dobva legalább egyszer két hatos) $= 1 - 35^{24}/36^{24} \approx 0{,}491$

1.10. **a.** $(5 \cdot 5 \cdot 3)/8^3$; $(5^{n-1} \cdot 3)/8^n$; **b.** $(8^3 - 5^3)/8^3$; $(8^n - 5^n)/8^n$; **c.** 7.

2.1. **a.** $\binom{5}{4}\binom{6}{3}/\binom{11}{7}$; **b.** $\binom{5}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{1}/\binom{11}{7}$; **c.** $\left[\binom{11}{7} - \binom{9}{7}\right]/\binom{11}{7}$; **d.** 1; **e.** $\left[\binom{5}{4}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{4}\right]/\binom{11}{7}$.

2.2. **a.** $\binom{45}{5}/\binom{90}{5}$; **b.** $\binom{45}{2}\binom{45}{3}/\binom{90}{5}$; **c.** $\binom{88}{3}/\binom{90}{5}$; **d.** $\binom{11}{1}\binom{77}{2}/\binom{90}{5}$; **e.** $86/\binom{90}{5}$.

2.3. **a.** $\binom{7}{3}\binom{4}{2}/\binom{20}{5}$; **b.** $\binom{10}{5}/\binom{20}{5}$; **c.** $\binom{19}{4}/\binom{20}{5}$; **c.** $12/\binom{20}{5}$;

2.4. $\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}/\binom{10}{4}$; $\left[\binom{10}{4} - \binom{8}{4}\right]/\binom{10}{4}$

2.5. **a.** $2^3 2^2/4^5$; **b.** $\binom{5}{3}2^3 2^2/4^5$; **c.** $\binom{5}{2}\binom{3}{2}2^2 1^2 1/4^5$; **d.** $3^5/4^5$; **e.** $(4^5 - 1^5)/4^5$.

2.6. $\binom{4}{2}/3^4$; $(3^4 - 2^4)/3^4$

2.7. **a.** $2^{22}/3^{22}$ **b.** $(3^{22} - 2^{22})/3^{22}$ **c.** $\binom{22}{3}2^{19}/3^{22}$

2.8. visszatevés nélkül: **a.** $\binom{4}{2}/\binom{4+n}{2}$; $n \geq 8$; **b.** $\left[\binom{4+n}{2} - \binom{n}{2}\right]/\binom{4+n}{2}$; $n \geq 75$.
visszatevéssel: **a.** $4^2/(4+n)^2$; $n \geq 9$; **b.** $\left[(4+n)^2 - n^2\right]/(4+n)^2$; $n \geq 74$.
e. $13 \cdot 12\binom{4}{4}4/\binom{52}{5} = 13 \cdot 48/\binom{52}{5}$.

3.1. **a.** 0,15; **b.** 0,55; **c.** 0,45; **d.** 0,45.

3.2. **a.** 0,65; **b.** 0,15; **c.** 0,55; **d.** 0,35.

3.3. **a.** 0,82; **b.** 0,02; **c.** 0,39; **d.** 0,22.

Feltételes valószínűség: 0,9.

3.4. **a.** 0,5; **b.** 0,15; **c.** 0,4; **d.** 0,4.

Feltételes valószínűség: 0,25.

3.5. 0,48; 0,17; 0,49.

3.6. **a.** $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$;

$\overline{B_1}$ = valamelyik héten nem nyerünk = $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5}$;

b. $B_2 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$;

$\overline{B_2}$ = valamelyik héten nyerünk = $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$;

c. $B_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$;

d. $B_4 = A_1 \setminus A_4 = A_1 \cap \overline{A_4}$;

$\overline{B_4}$ = a második héten nem nyerünk vagy a negyediken igen = $\overline{A_1} \cup A_4$;

e. $B_5 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A_5}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4} \cap A_5) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$.

3.7. **a.** $P(\text{mind előfordul}) = 1 - P(\text{valamelyik nem fordul elő})$

$= 1 - \left[6\left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^{10} + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^{10} - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^{10} + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} - 0\right] \approx 27{,}2\%$;

b. $P(\text{mind előfordul}) = 1 - P(\text{valamelyik nem fordul elő})$

$= 1 - \left[6\left(\frac{35}{36}\right)^{10} - \binom{6}{2}\left(\frac{34}{36}\right)^{10} + \binom{6}{3}\left(\frac{33}{36}\right)^{10} - \binom{6}{4}\left(\frac{32}{36}\right)^{10} + \binom{6}{5}\left(\frac{31}{36}\right)^{10} - \left(\frac{30}{36}\right)^{10}\right] \approx 0{,}00005$.

4.1. $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A|B) = 0{,}4$; függetlenek egymástól.

4.2. 0,5; 5/7; az, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, maga után vonja azt, hogy az előző szerelvény már legalább 3 perce elment.

4.3. $P(A) = 0{,}8$; $P(A|B) = 0{,}6$; nem függetlenek.

4.4. $P(A) = 0{,}5$; $P(A|B) = 0{,}25$; nincs közöttük nevezetes kapcsolat.

4.5. 16/25; 16/25; függetlenek egymástól.

4.6. 16/30; 0.

4.7. A lapos tányérok aránya a selejtesek között: $P(A_2|B) = 60/110$.

A leveses és a salátás tányérok együttes aránya a hibátlanok között: $P(A_1 \cup A_3|\overline{B}) = (470 + 380)/1390$.

A selejtesek aránya a lapos tányérok között: $P(B|A_2) = 60/600$.

A selejtesek aránya a nem lapos tányérok között: $P(B|\overline{A}_2) = (30+20)/(500+400)$.

5.1. **a.** $P(A) = 1/2 = P(A|B)$; A és B független egymástól;
b. $P(A) = 5/16$; $P(A|B) = 2/7$; A és B nem független.

5.2. $(7 \cdot 6 \cdot 3)/(10 \cdot 9 \cdot 8)$; $(6 \cdot 3)/(9 \cdot 8)$.

5.3. $1/(6^3 - 5^3)$; $1/6$; függetlenek.

5.4. $2/7$.

5.5. **a.** 0,42 **b.** 0,88 **c.** 0,46 **d.** 0,12

5.6. **a.** $1/4$; **b.** $1/8$; **c.** $11/24$; **d.** $17/24$; utolsó kérdés: $6/11$; $3/11$; $2/11$.

5.7. **a.** $0{,}15^5 \cdot 0{,}85^5$; $1 - 0{,}85^{10}$ **b.** 19

5.8. $28/225$; 44.

5.9. 0,31; 0,21; 7.

6.1. 0,225.

6.2. $4/32 \cdot 3/31 \cdot 2/30$; $3/31 \cdot 2/30$

6.3. 0,096; 0,48.

6.4. **a.** 0,05; 0,09; **b.** $\approx 0{,}111$; $\approx 0{,}333$; $\approx 0{,}555$.

6.5. 0,53; 0,06/0,53; 0,15/0,53; 0,32/0,53; 0.

6.6. 0,2575; $\approx$0,437.

6.7. 0,15; 0,375; 0,4.

6.8. $11/18$; $3/11$.

6.9. 0,6; 0,625.

6.10. $3/8$; $2/3$.

6.11. $\approx$0,32%

6.12. 13%

7.1. **a.** $a = 0{,}8$; $E(\xi) = 2{,}56$, $D(\xi) \approx 0{,}98$;
b. $a = 0{,}5$; $E(\xi) = 3{,}5$, $D(\xi) \approx 3{,}84$.

7.2. $P(\xi = 0) = 2/6$, $P(\xi = 1) = 3/6$, $P(\xi = 3) = 1/6$, $E(\xi) = 1$, $D(\xi) = 1$.

7.3. **a.** $P(\xi = 0) = 0{,}06$, $P(\xi = 1) = 0{,}29$, $P(\xi = 2) = 0{,}44$, $P(\xi = 3) = 0{,}21$, $E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) = \sqrt{0{,}7} \approx 0{,}84$; **b.** $E(50 + 20\xi) = 86$.

7.4. **a.** $P(\xi=1)=0{,}4$, $P(\xi=2)=0{,}24$, $P(\xi=3)=0{,}36$, $E(\xi)=1,96$, $D(\xi)\approx 0{,}87$, $P(\xi\le 2)=0{,}66$; **b.** $E(30\xi)=58{,}8$ Ft.

8.1. $R_\xi=[0,1]$; $P(0{,}5\le\xi\le 1{,}5)=P(\xi>0{,}5)\approx 0{,}65$; $E(\xi)=0{,}6$; $D(\xi)\approx 0{,}26$.

8.2. $R_\xi=[1,2]$; $P(0{,}5\le\xi\le 1{,}5)=P(\xi<1{,}5)\approx 0{,}58$; $E(\xi)=1/\ln 2$; $D(\xi)\approx 0{,}29$.

8.3. **a.** $a=0{,}08$; $R_\xi=[-1,4]$

b. $q_{1\%}=-0{,}5$

$$F_\xi(t)=\begin{cases}0, & t<-1,\\ 0{,}04(t+1)^2 & -1\le t\le 4,\\ 1, & t>4.\end{cases}$$

c. $P(-2\le\xi\le 2)=0{,}36$; $P(\xi\ge 1)=0{,}84$

d. Maximális hasznosság: $u(4)=2$; $E(u(\xi))=1{,}45$

8.4. **a.** $a=1{,}25$; $R_\xi=[1,5]$

b. $q_{50\%}=5/3$

$$F_\xi(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ 1{,}25-1{,}25/t, & 1\le t\le 5,\\ 1, & t>5.\end{cases}$$

c. $P(3\le\xi\le 7)=0{,}17$; $P(\xi\le 2)=0{,}63$

d.

$$c(x)=\begin{cases}25x, & 1\le x\le 3,\\ 75, & 3\le x\le 5\end{cases}$$

$E(c(\xi))=46{,}83$

9.6. **a.**

$$f_\xi(x)=\begin{cases}1/200, & 300\le x\le 500,\\ 0, & \text{különben;}\end{cases}$$

$E(\xi)=400$; $D(\xi)\approx 57{,}74$; $P(\xi<375)=37{,}5\%$.

b. $\eta=1500/\xi$; $P(\eta\ge 4)=P(\xi\le 375)=37{,}5\%$;
$E(\eta)=E(1500/\xi)=7{,}5\ln(5/3)\approx 3{,}83$;
1500 forintból átlagosan 3,83 kiló narancsot vehetünk; $1500/E(\xi)=3{,}75\ne E(\eta)$.

c.

$$F_\eta(t)=\begin{cases}0, & t<3,\\ 2{,}5-7{,}5/t, & 3\le t\le 5,\\ 1, & t>5.\end{cases}\qquad f_\eta(t)=\begin{cases}0, & t<3,\\ 7{,}5/t^2, & 3\le t\le 5,\\ 0, & t>5.\end{cases}$$

9.1. **a.** A ξ binomiális eloszlású $n = 6$ és $p = 0{,}3$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 6\}$, $P(\xi = k) = \binom{6}{k} 0{,}3^k 0{,}7^{6-k}$, $E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) \approx 1{,}12$, $P(1 < \xi < 5) \approx 0{,}57$.

b. $\binom{6}{2} 0{,}3^2 0{,}7^4 \binom{8}{4} 0{,}4^4 0{,}6^4 \approx 0{,}075$.

9.2. Jelölje ξ azt, hogy hanyadik próbálkozásra sikerül kinyitni az ajtót.

a. A változó geometriai eloszlású $p = 1/3$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = (2/3)^{k-1}(1/3)$, $P(\xi \le 3) = 1 - (2/3)^3 \approx 0{,}7$, $E(\xi) = 3$, $D(\xi) \approx 2{,}45$.

b. A változó geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$, $P(\xi \le 3) = 1 - (5/6)^3 \approx 0{,}42$, $E(\xi) = 6$, $D(\xi) \approx 5{,}48$.

c. A ξ változó nem nevezetes eloszlást követ: $R_\xi = \{1, 2, 3\}$, $P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = 1/3$, $P(\xi \le 3) = 1$, $E(\xi) = 2$, $D(\xi) \approx 0{,}82$.

9.3. **a.** A ξ változó hipergeometrikus eloszlású $N = 50$, $M = 15$ és $n = 5$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 5\}$, $P(\xi = k) = \binom{15}{k}\binom{35}{5-k} / \binom{50}{5}$, $E(\xi) = 1{,}5$, $P(\xi \le 1) = 0{,}52$.

b. Legyen ξ_1, ξ_2, ξ_3 a selejtes darabok száma az egyes napokon. Ezek független és azonos eloszlású változók, tehát

$P(\xi_1 \le 1, \xi_2 \le 1, \xi_3 \le 1) = P(\xi_1 \le 1)P(\xi_2 \le 1)P(\xi_3 \le 1) = 0{,}52^3$,

$P(\text{valamelyik napon 1-nél több selejt}) = 1 - 0{,}52^3$.

9.4. Legyen ξ a kihúzott piros golyók száma, η pedig annak a húzásnak a sorszáma, amikor először kapunk piros golyót.

a. A ξ binomiális eloszlású $n = 3$ és $p = 0{,}4$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\xi = k) = \binom{3}{k} 0{,}4^k 0{,}6^{3-k}$, $E(\xi) = 1{,}2$, $P(\xi = 2) = 0{,}288$.

b. A ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 10$, $M = 4$ és $n = 3$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\xi = k) = \binom{4}{k}\binom{6}{3-k} / \binom{10}{3}$, $E(\xi) = 1{,}2$, $P(\xi = 2) = 0{,}3$.

c. Az η geometriai eloszlású $p = 0{,}4$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = 0{,}6^{k-1} 0{,}4$, $E(\xi) = 1/0{,}4 = 2{,}5$, $P(\xi = 2) = 0{,}24$.

9.5. Legyen ξ az egy órára jutó lekérdezések száma. Most $E(\xi) = 5$, tehát $\lambda = 5$. Ekkor $P(\xi = 3) \approx 0{,}14$ és $D(\xi) = \sqrt{5}$.

10.1. 65,6%; 2%; [70,6, 129,4].

10.2. 0,495; 0,048; [11,23 cm, 12,77 cm].

10.3. 2,23%; [6,18, 7,82] = [6 óra 11 perc, 7 óra 49 perc].

10.4. 83,3; 8,3; 0,023; [67, 100];

10.5. Binomiális $n = 60$ és $p = 1/4$ paraméterrel; 15; 3,35; 18,6%; $t \approx 23$.

10.6. Binomiális $n = 10.000$ és $p = 0{,}01$ paraméterrel; 100; 9,95; 87%; $t \approx 112{,}7$.

10.7. Nem, ugyanis túl alacsony az n paraméter értéke.

10.8. **a.** Legyen ξ a dobott érték, $E(\xi) = 3{,}5$, $D(\xi) = 1{,}71$.

b. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_{500}$ a dobott értékek. $E(\xi_1 + \dots + E\xi_{500}) = 500E(\xi_1) = 1750$; $D^2(\xi_1 + \dots + \xi_{500}) = 500D^2(\xi_1) = 1458$, $D(\xi_1 + \dots + \xi_{500}) = \sqrt{500}D(\xi_1) = 38{,}2$; $P(1700 \le \xi_1 + \dots + \xi_{500} \le 1800) \approx 0{,}81$, $t = 1687$.

10.9. Jelölje ξ_i az i-dik kárértéket ezer forintban kifejezve.

$E(\xi_i) = (400 + 200)/2 = 300$; $D(\xi_i) = (400 - 200)/\sqrt{12} \approx 57{,}74$.

$E(\xi_1 + \dots + \xi_{100}) = 100 \cdot 300 = 30.000 = 30$ millió;

$D(\xi_1 + \dots + \xi_{100}) \approx \sqrt{100} \cdot 57{,}74 = 577{,}4$ ezer;

$P(29.000 \le \xi_1 + \dots + \xi_{100} \le 31.000) \approx 0{,}92$, $t = 30.740 = 30{,}74$ millió.

10.10. 12.000 kg; 273,86 kg; 0,998; [11.295 kg, 12.705 kg].

10.11. Nem, ugyanis túl alacsony az összegek tagszáma.

11.1. 1470 mm; ≈173 mm; nem tudjuk.

11.2. 640 kg; ≈42,43 kg; nem tudjuk.

11.3. Legyen ξ és η a narancs és a banán kilónkénti ára. Ekkor a család $4\xi + 2\eta$ forintot fizet a kasszánál.

$E(4\xi + 2\eta) = 4 \cdot 300 + 2 \cdot 400 = 2000$;

$D^2(4\xi + 2\eta) = 4^2 \cdot 30^2 + 2^2 \cdot 50^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \operatorname{corr}(\xi, \eta) = 24.400 + 24.000 \operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

Ha az árak függetlenek, akkor $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $D(4\xi + 2\eta) \approx 156$.

11.4. Legyen ξ és η az acél és a réz ára (dollát/tonna). A teljes anyagköltség $50\xi + 10\eta$.

$E(50\xi + 10\eta) = 50 \cdot 700 + 10 \cdot 1500 = 50.000$;

$D^2(50\xi + 10\eta) = 50^2 \cdot 20^2 + 10^2 \cdot 80^2 + 2 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 80 \cdot \operatorname{corr}(\xi, \eta)$
$= 1.640.000 + 1.600.000 \operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

Ha az árak függetlenek, akkor $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $D(50\xi + 10\eta) \approx 1280$.

11.5. Legyen ξ és η a burgonya mázsánkénti ára tavasszal illetve most. Ekkor:

$E(\xi) = 12.000$; $D(\xi) = 2.500$; $E(\eta) = 9.000$; $D(\eta) = 0$; $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$.

a. A bevétel nagysága: $a\xi + (100 - a)\eta$;

$E(a\xi + (100 - a)\eta) = a \cdot 12.000 + (100 - a) \cdot 9.000 = 3.000a + 900.000$;

$D^2(a\xi + (100 - a)\eta) = a^2 \cdot 2.500^2 + (100 - a)^2 \cdot 0^2 = 6.250.000a^2$;

$D(a\xi + (100 - a)\eta) = 2.500a$.

b. $a \ge 50$.

c. $a \le 30$; $a = 30$ esetén $E(a\xi + (100 - a)\eta) = 990.000$.

12.1. Az együttes eloszlás és a marginális eloszlások:

$\eta\backslash\xi$	0	1	2	η
0	1/4	1/4	1/4	3/4
1	0	0	1/4	1/4
ξ	1/4	1/4	1/2	1

$E(\xi) = 1{,}25$; $D(\xi) = 0{,}83$; $E(\eta) = 0{,}25$; $D(\eta) = 0{,}43$; $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0{,}19$; $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0{,}53$; nem függetlenek.

13.1. **a.** Az igazságos ár 500 ezer forint; a kaszinó a működési költségek és a profitcélok miatt ennél magasabb árat fog majd kérni.

b. Ha több játékot is lehet játszani, akkor 450 ezer forintos áron megéri játszani. Ha csak egy játékot lehet játszani, akkor minden a játékos egyéni kockázatvállalási preferenciáin múlik.

c. 250 ezer forint.

13.2. Legyen ξ a keletkezett kár nagysága: $P(\xi = 0) = 0{,}999$, $P(\xi = 9.000.000) = 0{,}001$.
A biztosító által kiszabott minimális díj = átlagos kárérték = $E(\xi) = 9.000$.
Legyen c a számunkra elfogadható maximális biztosítási díj. Ekkor:
$u(9.000.000) = 0.999u(9.000.000 + c) + 0.001u(c)$
Az egyenletet megoldva: $c = 17.238$.