A véletlen matematikája: a valószínűségszámítás és a statisztika elemei

Benke János Marcell, Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2019. március 29.–30., április 12.–13.

Tudnivalók a kurzusról

- 30 órás továbbképzés pedagógusok számára.
- Oktatók: Benke János Marcell és Szűcs Gábor (SZTE Bolyai Intézet).
- Időpontok: 2019. március 29.–30., április 12.–13.
  Péntekenként 10-től 18 óráig, szombatonként 8-tól 15 óráig.
- Helyszín: Szeged, Aradi vértanúk tere 1., 212. terem.
- A minimum részvétel a képzésen a teljes óraszám 80 százaléka.
- A záróértékelés egy projektmunka alapján fog majd megtörténni.
- További információ és letölthető anyagok:
  `http://www.math.u-szeged.hu/~szucsg/ptk.html`

A valószínűségszámítás rövid története

- „Már az ókori görögök is?”: Nem, ők még nem foglalkoztak véletlen jelenségekkel.
- 16.–17. század: Nagyrészt szerencsejátékokkal kapcsolatos feladatok. (Galilei, 1589; de Méré-probléma, 1654)
- 18.–19. század: Lassú fejlődés, melyet nagyrészt az alkalmazások motiváltak. (Bernoulli, Laplace, Bayes, Gauss)
- 19. század vége – 20. század eleje: A valószínűségszámítás kezd önálló tudományterületté válni. Megjelennek az első általánosabb tételek. (Markov, Csebisev, Lévy)
- Ezzel párhuzamosan fejlődésnek indul a matematikai statisztika.
- 1933: Andrej Nyikolajevics Kolmogorov. „A valószínűségszámítás alapfogalmai” című művében bevezeti a róla elnevezett axiómákat. Azóta mindenki ezt az axiómarendszert használja.
- Az élet egyre több területén alkalmaznak sztochasztikus modelleket: biztosításmatematika, tőzsdei matematika, időjárás és természeti katasztrófák modellezése, orvosi kutatások, mesterséges intelligencia.

A valószínűség kombinatorikus modellje

A **valószínűségszámítás** (másnéven **sztochasztika**) a matematikának a véletlen tömegjelenségekkel foglalkozó területe. A fontosabb fogalmak:

- **Tömegjelenség:** Egy olyan jelenség, mely változatlan körülmények között tetszőlegesen sokszor előidézhető vagy megfigyelhető.
- **Véletlen jelenség:** Olyan jelenség, melynek lefolyását az általunk figyelembe vehető tényezők nem határozzák meg egyértelműen.
- **Véletlen kísérlet, valószínűségi kísérlet:** Véletlen tömegjelenség.
- **Kimenetelek, elemi események:** A véletlen kísérlet lehetséges eredményei. (Jelük: ω.)
- **Eseménytér:** A lehetséges kimenetelek halmaza. (Jele: Ω vagy U)
- **Események:** a kísérlet aktuális kimeneteléhez kapcsolódó állítások. Egy esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet aktuális végrehajtásakor olyan kimenetelt kapunk, melyre ez az állítás igaz.
- **Esemény valószínűsége:** Ha sokszor megismételjük a kísérletet, akkor az esemény a végrehajtások mekkora hányadában következik be. (Ez egy rossz definíció, de egyelőre megteszi...)

1. Feladat. *Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mik a kísérlet lehetséges kimenetelei? Hány kimenetel van? Mely kimenetelek esetén következnek be az alábbi események, és mennyi a valószínűségük?*

a. $A =$ *hatost dobunk*

b. $B =$ *páros számot dobunk*

Laplace-formula

Tegyük fel, hogy a véletlen kísérletnek véges sok kimenetele van, és minden kimenetelnek azonos a valószínűsége. Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége a következő formulával számolható ki:

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}$$

2. Feladat. *Feldobunk egy szabályos dobókockát kétszer egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7? Miben változik a megoldás, ha egyszerre dobunk fel két különböző színű kockát? És mi a megoldás akkor, ha egyszerre dobunk fel két azonos színű kockát?*

3. Feladat. *(Chevalier de Méré, Pascal, 1654.) Az alábbiak közül melyiknek nagyobb a valószínűsége:*

- *4 alkalommal feldobva egy szabályos dobókockát legalább egyszer hatost kapunk;*
- *24 alkalommal feldobva két szabályos dobókockát legalább egyszer dupla hatost kapunk?*

Bónusz kérdés: hányszor dobjunk fel egy szabályos dobókockát, ha az a cél, hogy 99% valószínűséggel kapjunk legalább egy hatost?

4. Feladat. *(Születésnap paradoxon.) Egy 30 fős osztályban mennyi az esélye annak, hogy van legalább 2 tanuló, aki az évnek azonos napján született? Feltehető, hogy az osztályban nincsenek ikrek!*

5. Feladat. *Egy szelvénnyel játszunk az ötöslottón. Mennyi az alábbi események valószínűsége?*

a. *Telitalálatot érünk el.*

b. *Pontosan k találatot érünk el, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.*

c. *Kihúzzák a 12-es és a 80-as számot, és a 12 a második legkisebb nyerőszám.*

6. Feladat. *Egy gyárban a makaront úgy csomagolják, hogy egy-egy dobozba két csokis, egy málnás és egy narancsos sütemény kerül. Anna a három barátnőjével öt napon keresztül minden nap vásárol egy doboz makaront, és a süteményeket véletlenszerűen kiosztják egymás között. Mennyi az alábbi események valószínűsége?*

a. *Anna hétfőn, szerdán és csütörtökön csokis, a többi napon nem csokis makaront kap.*

b. *Anna pontosan 3 csokis makaront kap.*

c. *Összesen 2 csokis, 2 málnás és 1 narancsos makaront kap.*

d. *Legalább egyszer kap narancsos makaront.*

Műveletek eseményekkel, eseményalgebrák

Az események, mint logikai állítások, reprezentálhatóak az eseménytér részhalmazaival: összegyűjtjük azokat a kimeneteleket, melyekre az adott esemény bekövetkezik

- Ennek a reprezentációnak az az oka, hogy a valószínűségszámítás sok eszközt átemel a mértékelméletből. Ehhez viszont halmazokra van szükség, nem logikai állításokra.
- A halmazokkal történő reprezentációnak didaktikai előnye is van: ez egy jó vizualizációs eszköz, le lehet „rajzolni” az eseményeket.

7. Feladat. *Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mely halmazokkal reprezentálhatóak az alábbi események?*

a. $A =$ *5-nél kisebbet dobunk*

b. $B =$ *páratlan számot dobunk*

c. $C =$ *egész számot dobunk*

d. $D =$ *negatív számot dobunk*

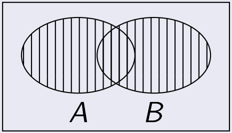
e. *A vagy B; A és B; A igen, de nem B; nem A*

Műveletek eseményekkel

Legyenek A és B események!

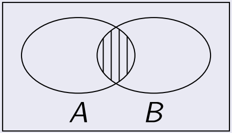
- Események **összege**:

$$A + B = A \text{ vagy } B = A \cup B$$



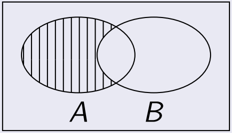
- Események **szorzata**:

$$A \cdot B = A \text{ és } B = A \cap B$$



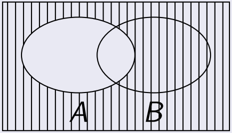
- Események **különbsége**:

$$A - B = (A \text{ igen, de nem } B) = A \backslash B$$



- Egy esemény **tagadása**:

$$-A = \text{nem } A = \overline{A}$$

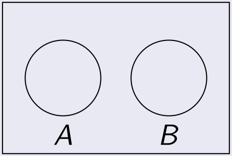


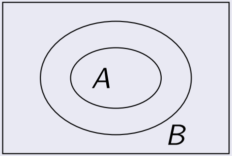
Eddig számunkra egy esemény egy logikai állítás volt, melyet egy halmazzal reprezentáltunk. A valószínűségelméletben az esemény maga a halmaz.

8. Feladat. *Hány különböző esemény definiálható egy véges elemszámú eseménytéren?*

Nevezetes események, kapcsolat az események között

- Az Ω eseményt **biztos eseménynek** nevezzük, az $\emptyset$ esemény pedig a **lehetetlen esemény**.
- Azt mondjuk, hogy az A és B események **kizáróak**, ha diszjunktak, tehát $A \cap B = \emptyset$. A kizáró események „kizárják” egymást, nem következhetnek be egyszerre.
- Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha $A \subset B$. Jelentése: ha A bekövetkezik, akkor B is bekövetkezik; tehát $A \Rightarrow B$.





Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet. Láttuk, hogy

- az eseménytér (Ω) a lehetséges kimenetelek halmaza;
- az események halmazok, az eseménytér részhalmazai;
- az eseményeken pedig műveleteket lehet végrehajtani.

Természetes követelmény: az eseményalgebrai műveletek révén kapott halmazok legyenek események!

Jelölés: $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω halmaz hatványhalmaza.

Eseményalgebra

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tetszőleges halmazrendszer. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer **eseményalgebra** az Ω halmazon, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- az $\mathcal{A}$ halmazrendszer zárt az elemi halmazelméleti műveletek megszámlálható sokszor való alkalmazására.

Megjegyzések:

- Ha $\mathcal{A}$ eseményalgebra, akkor $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$.
- Ha Ω véges halmaz, akkor elég a véges sok műveletre való zártságot megkövetelni.

Események

Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet, és legyen Ω az eseménytér. **Eseményeknek** nevezzük egy *megfelelően megválasztott* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eseményalgebra elemeit.

9. Feladat. *Tekintsük azt a kísérletet, hogy feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a legnagyobb és a legkisebb elemszámú eseményalgebra az eseménytéren? Adjunk meg egy 4-elemű eseményalgebrát!*

Az *elemi események* nem feltétlenül események! Emiatt szerencsésebb kimeneteleknek nevezni őket.

Melyik eseményalgebrát válasszuk? Érdemes a lehető legbővebbet!

- Látni fogjuk: valószínűsége csak eseménynek van, ami nem esemény, annak formálisan nem létezik valószínűsége.
- Véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú eseménytéren $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ mindig jó választás.
- Viszont nem megszámlálható eseménytér mellett látni fogunk olyan példát, amikor nem minden részhalmaz esemény!

A valószínűség definíciója és tulajdonságai

Bekövetkezési gyakoriság és relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és egy ehhez kapcsolódó A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet egymás után n alkalommal!

- **Bekövetkezési gyakoriság:** $k_n(A) =$ hányszor következett be az A esemény az n ismétlés során.
- **Relatív gyakorisága:** $r_n(A) = k_n(A)/n =$ a végrehajtások mekkora hányadában következett be az A esemény.

Észrevételek:

- A valószínűség hétköznapi jelentése: a kísérletet sokszor végrehajtva ilyen arányban következik be a vizsgált esemény.
- Ez matematikailag nem igaz! Egy szabályos pénzérmét $n = 1.000.001$ alkalommal feldobva a fej aránya (relatív gyakorisága) nem lehet $1/2$.
- Tapasztalati tény: a kísérletet sokszor végrehajtva a relatív gyakoriság egy valós szám körül ingadozik, közelít hozzá. Ezt a számot nevezzük valószínűségnek: $r_n(A) \approx P(A)$.
- De ez még nem definiálja a valószínűséget.

Milyen tulajdonságokat várjunk el a valószínűségtől?

- Egy A esemény relatív gyakorisága mindig 0 és 1 közés esik.
  Elvárás: Legyen $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ minden A eseményre.
- A biztos esemény relatív gyakorisága:

$$r_n(\Omega) = k_n(\Omega)/n = n/n = 1$$

  Elvárás: A biztos esemény valószínűsége legyen $P(\Omega) = 1$.
- Ha A és B kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = \frac{k_n(A \cup B)}{n} = \frac{k_n(A) + k_n(B)}{n} = r_n(A) + r_n(B)$$

  Hasonló módon mutatható meg, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként kizáró eseményeknek véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$r_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = r_n(A_1) + r_n(A_2) + \cdots$$

  Elvárás: Az ilyen eseményekre legyen

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Valószínűség, valószínűségi mező

Tekintsünk az Ω eseményteret, és a $\mathcal{A}$ az eseményalgebrát, tehát az események halmazát. Azt mondjuk, hogy a $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ függvény **valószínűség** vagy **valószínűségi mérték** az eseményalgebrán, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

- A biztos esemény valószínűsége $P(\Omega) = 1$.
- **σ-additivitás**: Ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró eseményeknek egy végtelen sorozata, akkor az egyesítésük valószínűsége

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

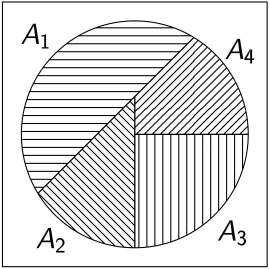
Az A eseményhez rendelt $P(A)$ értéket úgy nevezzük, hogy az A **valószínűsége**. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast **valószínűségi mezőnek** hívjuk.

Ha az eseménytér véges, akkor a σ-additivitás ekvivalens az **additivitással:** tetszőleges $n \geqslant 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ páronként kizáró eseményekre

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

Hogyan érdemes elképzelni a valószínűséget?

- Additivitás jelentése: Ha feldarabolunk egy eseményt véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok részre, akkor a részek valószínűségeinek az összege egyenlő a kiindulási esemény valószínűségével.



- Ez a tulajdonság jellemző minden mérésre (terület, tömeg, idő, stb.) Ezért nevezzük a valószínűséget „mértéknek”.
- Szemléletesen: Egységnyi nagyságú súlyt széttertünk az eseménytéren, és az A esemény valószínűsége az A halmaz összsúlya.

A véletlen kísérleteket mindig egy megfelelően megkonstruált $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezővel írjuk le:

- az Ω alaphalmaz a kimenetelek a halmaza,
- a $\mathcal{A}$ eseményalgebra az események halmaza,
- a P függvény mondja meg az egyes események valószínűségét.

A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség definíciójából következnek az alábbi tulajdonságok:

- Lehetetlen esemény valószínűsége: $P(\emptyset) = 0$.
- **Additivitás:** Tetszőleges $n \geqslant 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ páronként kizáró eseményekre:
$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$
Véges eseménytéren az additivitás ekvivalens a σ-additivitással.
- **Szubadditivitás**: Ha $A_1, A_2, \dots$ tetszőleges eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$
- Komplementer esemény valószínűsége: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- **Kivonási szabály**: Tetszőleges A és B események mellett
$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$
- **Monotonitás**: Ha A maga után vonja a B eseményt, akkor
$$P(A) \leqslant P(B).$$

A valószínűség további tulajdonságai

- Két esemény uniója: tetszőleges A és B eseményekre
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- Három esemény uniója: tetszőleges A, B és C eseményekre
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$
- **Poincaré-formula** avagy **szitaformula**: tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ események mellett
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n \\ \text{különböző egészek}}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= P(A_1) + \cdots + P(A_n) \\ &\quad - \text{ketteses metszetek valószínűsége} \\ &\quad + \text{hármas metszetek valószínűsége} \\ &\quad - \text{négyes metszetek valószínűsége} \\ &\quad \ldots \ \pm P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

Hogyan lehet bebizonyítani ezeket a formulákat?

- Formális levezetés a valószínűség definíciójából.
- Heurisztikus megközelítés: mennyi a halmazok súlya?
- Ha a Laplace-formula alkalmazható: visszavezetjük számosságokra.

10. Feladat. *Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául, 15 százaléka angolul és németül, 20 százaléka angolul és franciául, 20 százaléka németül és franciául, végül az emberek 10 százaléka beszél mindhárom nyelven. Véletlenszerűen kiválasztunk egy embert. Mennyi az alábbi események valószínűsége?*

a. *A kiválasztott ember beszél angolul, de nem beszél németül.*

b. *A kiválasztott ember beszél németül vagy franciául.*

c. *Pontosan két nyelven beszél.*

d. *Egyik nyelven sem beszél a három közül.*

Diszkrét valószínűségi mezők

Diszkrét valószínűségi mező

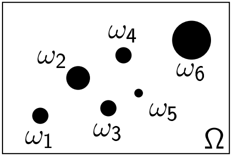
Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

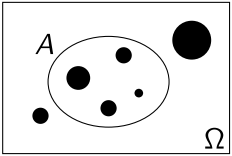
- Az eseménytér megszámlálható halmaz, tehát a lehetséges kimenetelek egy véges vagy végtelen sorozatot alkotnak: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.
- Minden részhalmaz esemény: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Diszkrét valószínűségi mezőn a kimenetelek összvalószínűsége:

$$P\big(\{\omega_1\}\big) + P\big(\{\omega_2\}\big) + \cdots = P\big(\{\omega_1, \omega_2, \dots\}\big) = P(\Omega) = 1.$$

Egy tetszőleges $A \subset \Omega$ esemény valószínűsége: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big)$.





Klasszikus valószínűségi mező

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

- Az eseménytér véges: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.
- Minden részhalmaz esemény: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Minden kimenetelnek azonos a bekövetkezési valószínűsége:
$$P\big(\{\omega_1\}\big) = \cdots = P\big(\{\omega_N\}\big).$$

Laplace-formula

Klasszikus valószínűségi mezőn egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}$$

Bizonyítás. Mivel minden kimenetelnek azonos a valószínűsége, ezért minden kimenetelnek $1/|\Omega|$ a valószínűsége. Emiatt:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

11. Feladat. *Lajos kulcscsomóján három kulcs található, ezek közül az egyik a bejárati ajtót nyitja. Egy este a barátaival italozik, és hazatérve nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Emiatt véletlenszerűen és visszatevéssel választ újabb és újabb kulcsot, míg ki nem nyitja az ajtót.*

a. *Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek? Mennyi az egyes kimenetelek valószínűsége?*

b. *Melyiknek nagyobb az esélye? Annak hogy páros, vagy annak, hogy páratlan sok próbálkozásra lesz szükség?*

A **mértani sor** összegképlete: tetszőleges $x \in (-1, 1)$ valós szám esetén

$$1 + x + x^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \cdots + x^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \cdots + x^n\right) \frac{1-x}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x}$$

Geometriai valószínűségi mezők

12. Feladat. *Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 m^2 területű réten. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a réten kijelölt 10 m oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Lajos kezdő ejtőernyős, és a réten egy véletlenszerű helyen ér földet. Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrása? Mennyi az esélye, hogy Lajos pontosan a négyzet geometriai középpontjára érkezik?*

Az előző feladat tanulságai:

- Az Ω eseménytér egy geometriai alakzat, a valós sík egy részhalmaza. Ez egy nem megszámlálható halmaz, tehát nem diszkrét valószínűségi mezőről van szó.
- Lajos *véletlenszerű* helyen ér földet, de ez az információ most nem a Laplace-formulára utal.
- Jelölje $\mu(A)$ az $A \subset \Omega$ geometriai alakzat mértékét. A mérték dimenziótól függően a hosszúság, a terület vagy a térfogat.
- Nem minden $A \subset \Omega$ halmaz mérhető, ezért nem minden halmaznak definiálható a valószínűsége. Nem minden $A \subset \Omega$ esemény, $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.

Geometriai valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **geometriai valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ valamilyen $d \geqslant 1$ egész számra.
- Az Ω halmaz mérhető és $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
- Az események az Ω mérhető részhalmazai. (Tehát $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.)
- **Egyenletességi hipotézis:** Az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével, tehát minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P(A) = c\mu(A)$ valamilyen $c > 0$ konstans mellett.

Formula a valószínűségre

Geometriai valószínűségi mezőn tetszőleges A eseményre:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{kedvező hosszúság/terület/térfogat}}{\text{összes hosszúság/terület/térfogat}}$$

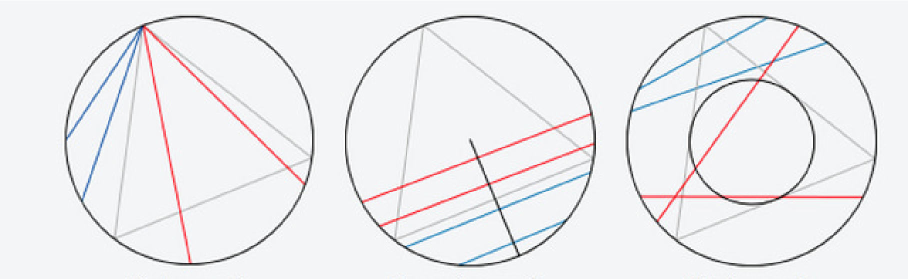
Bizonyítás. A biztos esemény valószínűsége: $1 = P(\Omega) = c\mu(\Omega)$.
Ebből $c = 1/\mu(\Omega)$, vagyis $P(A) = c\mu(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$.

13. Feladat. *(Bertrand-paradoxon, 1889.) Tekintsünk egy kört, és írjunk bele egy szabályos háromszöget. Véletlenszerűen válasszunk ki egy húrt! Mennyi annak az esélye, hogy a húr hosszabb, mint a beírt háromszög oldala? Válaszoljunk erre a kérdésre az alábbi megközelítések esetén:*

a. *Rögzítjük a húr egyik végpontját, és a másik végpontot véletlenszerűen választjuk a körvonalon.*

b. *Rögzítünk egy sugarat (a középpontot a körvonallal összekötő szakaszt), és véletlenszerűen választunk egy erre merőleges húrt.*

c. *Véletlenszerűen választunk egy pontot a körlapon, majd megszerkesztjük azt az egyértelmű húrt, melynek ez a pont a felezéspontja.*



A feltételes valószínűség

Adott egy véletlen kísérlet és az ezt leíró $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

- Egy $A \in \mathcal{A}$ esemény valószínűsége: a kísérletet sokszor megismételve a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik, $r_n(A) \approx P(A)$.
- Tegyük fel, hogy van egy háttérinformációnk, tudjuk azt, hogy a B esemény bekövetkezik. Ezen háttérinformáció birtokában mennyi az A esemény valószínűsége?

Feltételes relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és legyen A és B a kísérlethez kapcsolódó esemény. Ekkor a kísérlet n alkalommal való végrehajtása után az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes relatív gyakorisága:**

$$r_n(A|B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)}.$$

A fenti formula csak akkor értelmezhető, ha $k_n(B) > 0$.

Példa. Tegyük fel, hogy a kísérlet $n = 10$ végrehajtása után a következő eredményt kapjuk:

Kísérlet sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A bekövetkezései	A		A			A		A		A
B bekövetkezései		B	B		B	B		B		B

Az A esemény relatív gyakorisága: $r_{10}(A) = k_{10}(A)/10 = 5/10 = 1/2$

Az A feltételes relatív gyakorisága: $r_{10}(A|B) = k_{10}(A \cap B)/k_{10}(B) = 4/6$

Vegyük észre:

$$r_n(A|B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{k_n(A \cap B)/n}{k_n(B)/n} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)} \approx \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tehát a feltételes relatív gyakoriság a $P(A \cap B)/P(B)$ hányados körül ingadozik. Ez az észrevétel motiválja a következő deníciót.

Feltételes valószínűség

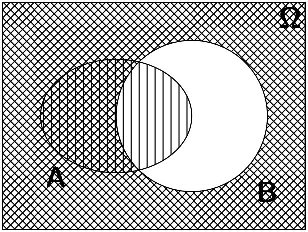
Legyenek A és B események, és tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A feltételes valószínűség megmutatja, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik.

Szemléletesen a következő dolog történik:

- Kidobjuk azokat a kimeneteleket, melyek nem következhettek be ($\overline{B}$ elemei).
- A B egy „szűkített eseménytér,” ezen belül nézzük az A halmaz súlyarányát.



Feltételes valószínűség klasszikus és geometriai valószínűségi mezőn

Legyenek A és B események, $P(B) > 0$. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség a következő módon is meghatározható: kidobjuk a $\overline{B}$ halmazba eső kimeneteleket, majd alkalmazzuk az alábbi formulákat.

(i) Klasszikus valószínűségi mező esetén

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}}.$$

(ii) Geometriai valószínűségi mező esetén

$$P(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}}.$$

Bizonyítás.

(i) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

(ii) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\mu(A \cap B)/\mu(\Omega)}{\mu(B)/\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

14. Feladat. *Véletlenszerűen kiválasztunk egy háromgyerekes családot, és tekintsük az alábbi eseményeket:*

- $A =$ *a gyerekek között van fiú és lány is*
- $B =$ *a gyerekek között legfeljebb egy lány van*

Adjuk meg az A *és a* B *esemény valószínűségét! Mennyi a* $P(A|B)$ *feltételes valószínűség értéke, és hogyan értelmezhető ez az eredmény?*

15. Feladat. *Egy metróvonalon 10 perces követési idővel járnak a szerelvények. Véletlenszerű időpontban lemegyünk az állomásra.*

a. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő szerelvényre legfeljebb 5 percet kell várni?*

b. *Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment?*

c. *Milyen kapcsolatban van az az esemény, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, és az, hogy az előző metró már legalább 3 perce elment?*

16. Feladat. *Autóval végig akarunk menni egy 30 km hosszú egyenes útszakaszon, de balesetet szenvedünk egy véletlenszerű helyen. A közelben egyetlen egy mobiltelefon átjátszó torony van, ez az út felénél az úttól 6 km távolságra található. A torony egy 10 km sugarú kör alakú területet képes kiszolgálni.*

a. *Mennyi annak az esélye, hogy a baleset helye ebbe a körbe esik, és ezáltal telefonon segítséget tudunk hívni?*

b. *Mennyi a valószínűsége ugyanennek az eseménynek, ha a baleset az út első 5 kilométeres szakaszán történik?*

17. Feladat. *Tekintsünk egy tetszőleges kísérletet, legyenek* A *és* B *események, továbbá tegyük fel, hogy* $P(B) > 0$. *Mennyi a* $P(A|B)$ *feltételes valószínűség értéke akkor, ha*

a. A *és* B *kizáró események;*

b. B *maga után vonja az* A *eseményt?*

A feltételes valószínűség tulajdonságai

Felmerülhet a kérdés, hogy a feltételes valószínűség valóban valószínűség, azaz valószínűségi mérték-e.

A feltételes valószínűség valószínűségi mérték

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező, $B \in \mathcal{A}$ pozitív valószínűségű esemény. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

- Tetszőleges A eseményre $P(A|B) \in [0, 1]$.
- A biztos esemény feltételes valószínűsége: $P(\Omega|B) = 1$.
- σ-additivitás: tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ kizáró eseményekre

$$P\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \mid B\big) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$$

Ez azt jelenti, hogy a B eseményre vett feltételes valószínűség egy valószínűségi mérték. Következmény: a feltételes valószínűségre teljesül minden olyan azonosság, amit bebizonyítottunk a valószínűségi mértékekre.

Mivel a feltételes valószínűség valószínűségi mérték, teljesülnek a következő tulajdonságok:

- A lehetetlen esemény feltételes valószínűsége: $P(\emptyset|B) = 0$.
- Additivitás: ha $A_1, \dots, A_n$ kizáró események, akkor
$$P\big(A_1 \cup \dots \cup A_n \mid B\big) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B).$$
- A komplementer esemény valószínűsége: $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.
- Monotonitás: Ha $A_1 \subset A_2$, akkor $P(A_1|B) \leqslant P(A_2|B)$.
- Két esemény uniójának a valószínűsége:
$$P\big(A_1 \cup A_2 \mid B\big) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P\big(A_1 \cap A_2 \mid B\big).$$
- Poincaré-formula...

Fontos: a fenti azonosságokban a B esemény rögzített! A feltételes valószínűségben a feltételt nem lehet ilyen könnyen manipulálni. Például általában $P(A|\overline{B}) \neq 1 - P(A|B)$.

Bayes-formula (Bayes, 1763)

Legyenek A és B pozitív valószínűségi események. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciójából következik, hogy

$$P(B \cap A) = P(A|B)P(B).$$

Ekkor pedig:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

18. Feladat. *Egy gyárban anyaghibás és méterhibás gyártmányok is készülnek, és ezek a teljes mennyiség 25 illetve 40 százalékát teszik ki. A mérethibás darabok ötöde anyaghibás is egyben. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt az anyaghibás darabok közül, akkor az mekkora eséllyel lesz mérethibás is?*

Teljes eseményrendszer

Azt mondjuk, hogy a $B_1, \ldots, B_r$ események **teljes eseményrendszert** (t.e.r.) alkotnak, ha teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- páronként diszjunktak: tetszőleges $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- együttesen lefedik az eseményteret: $B_1 \cup \cdots \cup B_r = \Omega$.

A teljes valószínűség tétele

Legyen $B_1, \ldots, B_r$ pozitív valószínűségű eseményeket tartalmazó teljes eseményrendszer. Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_r)P(B_r)$$

Bizonyítás. Az additivitásból és a feltételes valószínűség definíciójából:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_r) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_r)P(B_r)\,. \end{aligned}$$

19. Feladat. *Lajosnak lejárt a bérlete, mégis felszáll az első járműre, ami hazaviszi. A megállóban 50% valószínűséggel érkezik először busz, 40% valószínűséggel troli, a többi esetben pedig villamos. A buszon 30% eséllyel jön ellenőr, a trolin 20% eséllyel, a villamoson pedig 80% eséllyel.*

a. *Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel?*

b. *Ha otthon szomorúan meséli el, hogy megbüntették, akkor mennyi a valószínűsége, hogy villamossal utazott?*

20. Feladat. *Egy betegséget ezer emberből átlagosan egy kap el. Létezik egy szűrőteszt a betegségre, de ez csak 97%-os megbízhatóságú, azaz ekkora a valószínűsége, hogy helyes eredményt ad, akár beteg valaki, akár egészséges. Egy ember megvizsgáltatja magát, és a teszt eserménye pozitív. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg beteg?*

Események függetlensége

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

A függetlenséggel ekvivalens tulajdonságok

Ha A és B pozitív valószínűségű, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(i) A és B független egymástól.

(ii) $P(A|B) = P(A)$.

(iii) $P(B|A) = P(B)$.

Bizonyítás. Ha A és B független, akkor

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) = P(A).$$

A fordított irányért, ha $P(A|B) = P(A)$, akkor

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

21. Feladat. *Feldobunk két szabályos dobókockát.*

a. *Mutassuk meg, hogy ha a két dobás független, akkor mind a 36 kimenetelnek azonos a valószínűsége.*

b. *Adjunk példát olyan kísérletre, mikor a kockadobások nem függetlenek.*

22. Feladat. *(Buffon-féle tűprobléma, 1777.) Adott egy papírlap, melyre egymástól* $d > 0$ *távolságra párhuzamos egyeneseket rajzoltunk. Véletlenszerűen leejtünk egy* $\ell < d$ *hosszúságú tűt a papírlapra. Mennyi annak az esélye, hogy a leejtett tű metszi valamelyik egyenest?*

23. Feladat. *Mi a kapcsolat a kizáróság (diszjunktság) és a függetlenség között. Mikor lehet két esemény egyszerre kizáró és független?*

Több esemény függetlensége

Legyen $A_1, A_2, \ldots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata.

- Azt mondjuk, hogy az események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független egymástól, tehát tetszőleges A_i és A_j különböző eseményeket kiválasztva teljesül, hogy $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
- Azt mondjuk, hogy az események **(teljesen) függetlenek**, ha bármely $n \geqslant 1$ egész esetén tetszőleges $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$P\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n}) .$$

24. Feladat. *Feldobunk két szabályos pénzérmét, egy 10 és egy 20 forintost. Legyen A és B az az esemény, hogy a 10 illetve a 20 forintos érmével fejet dobunk, és jelölje C azt az eseményt, hogy összesen 1 fejet dobunk. Mutassuk meg, hogy a három esemény páronként független egymástól, de nem teljesen függetlenek.*

A páronkénti függetlenség azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk ki két különböző eseményt, ezek függetlenek lesznek egymástól:

$$P(A_j|A_i) = P(A_j) \quad \text{minden} \quad i \neq j \quad \text{esetén.}$$

A teljes függetlenség azt fejezi ki, hogy semmilyen kapcsolat sincs az események között: tetszőleges $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}, A_j$ különbőző eseményekre

$$P\big(A_j \mid A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big) = \frac{P\big(A_j \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big)}{P\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big)}$$

$$= \frac{P(A_j)P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n})}{P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n})} = P(A_j)$$

Kapcsolat a kétfajta függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. Az állítás megfordítása nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

Bizonyítás. A teljes függetlenségből $n = 2$ mellett azonnal következik a páronkénti függetlenség. A megfordításra jó ellenpélda az előző feladat.

25. Feladat. *Háromgyerekes családokban vizsgáljuk a gyerekek nemét. Tegyük fel, hogy a gyerekek neme független egymástól!*

a. *Mutassuk meg, hogy ha a gyerekek 1/2–1/2 eséllyel születnek fiúnak és lánynak, akkor a 8 lehetséges családtípusnak azonos a valószínűsége!*

b. *A valóságban a gyerekek 51% eséllyel születnek fiúnak. Ebben az esetben is azonos a kimenetelek valószínűsége? Adjuk meg a következő események valószínűségeit:*
   - *a gyerekek között pontosan 2 fiú van;*
   - *az első gyerek fiú és a második lány;*
   - *az első vagy a harmadik gyerek fiú.*

Műveletek független eseményekkel

(i) Teljesen vagy páronként független eseményekből kiindulva és közülük tetszőlegesen sokat elhagyva teljesen illetve páronként független eseményeket kapunk.

(ii) Teljesen vagy páronként független eseményekből kiindulva és tetszőlegesen sok eseményt a komplementerével helyettesítve teljesen illetve páronként független eseményeket kapunk.

Véletlen jelenségeket vizsgálva előfordul, hogy nem közvetlenül a kísérlet kimenetelére vagyunk kíváncsiak, hanem egy véletlen mennyiségre, melyet valamilyen módon származtatunk a kimenetelből.

26. Feladat. *Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: a játékos feldob egy szabályos dobókockát, és a nyereményét az alábbi táblázat alapján határozzák meg.*

dobott szám	*nyeremény*
1, 2	*0 Ft*
3, 4, 5	*1000 Ft*
6	*3600 Ft*

a. *Mi a véletlen kísérlet és mik a lehetséges kimenetelek?*
b. *Milyen hozzárendeléssi szabállyal írhatjuk fel a nyeremény nagyságát?*
c. *Mik a nyeremény lehetséges értékei?*

Valószínűségi változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező, és tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor a ξ függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük. A ξ **értékkészlete** a lehetséges értékek halmaza. Jele: R_ξ.

Megjegyzések:

- Ez a definíció nem teljesen pontos így, erre majd még visszatérünk.
- A valószínűségi változó gyakorlatilag egy véletlen szám: $\xi(\omega)$. Nem attól véletlen, mert a hozzárendelési szabály véletlen, hanem attól, hogy a kísérlet ω kimenetele véletlen.

Diszkrét valószínűségi változók

- A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha az értékkészlete egy megszámlálható halmaz. (Például: az értékkészlet véges halmaz.)
- **Valószínűségeloszlás, súlyfüggvény:** $p_x = P(\xi = x), \quad x \in R_\xi$.
- Egy diszkrét valószínűségi változó **módusza** az az érték, melyet a valószínűségi változó a legnagyobb valószínűséggel vesz fel. A módusz nem mindig egyértelmű.

Valószínűségeloszlások karakterizációja

Tekintsünk egy véges vagy végtelen $R = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ halmazt és egy ezzel azonos elemszámú $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{R}$ számsorozatot. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i) Létezik olyan ξ diszkrét valószínűségi változó, melynek az R halmaz az értékkészlete, és $P(\xi = x_i) = p_i$ minden i indexre.

(ii) $p_1, p_2, \dots \geqslant 0$ és $p_1 + p_2 + \cdots = 1$.

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) irány nyilvánvaló.

A fordított irányért tegyük fel, hogy (ii) teljesül!

- Tekintsünk egy tetszőleges olyan $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ halmazt, melynek a számossága azonos R számosságával!
- Legyen $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, és legyen $P(\{\omega_i\}) = p_i$ minden i-re!
- Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi : \omega_i \mapsto x_i$ minden i-re!

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy diszkrét valószínűségi mező, ξ egy valószínűségi változó, $R_\xi = R$, és

$$P(\xi = x_i) = P(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Adott egy ξ diszkrét valószínűségi változó, $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Tegyük fel, hogy többször megismételjük a véletlen kísérletet, és jelölje $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a valószínűségi változó értékeit az egyes végrehajtások során. Kérdés: mennyi a megfigyelt értékek számtani átlaga?

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} &= \frac{k_n(\xi = x_1) \cdot x_1 + k_n(\xi = x_2) \cdot x_2 + \cdots}{n} \\ &= r_n(\xi = x_1) \cdot x_1 + r_n(\xi = x_2) \cdot x_2 + \cdots \\ &\approx P(\xi = x_1) \cdot x_1 + P(\xi = x_2) \cdot x_2 + \cdots \end{aligned}$$

Várható érték

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy

$$\sum_{x \in \mathbb{R}_\xi} |x| P(\xi = x) < \infty.$$

Ekkor a ξ **várható értéke:** $E(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{R}_\xi} x P(\xi = x)$.

- A várható érték jelentése: a ξ átlagos értéke.
- A feltétel azt követeli meg, hogy a várható értéket definiáló sor abszolút konvergens legyen. Ha ez teljesül, akkor az $E(\xi)$ összeg véges szám. Véges értékkészlet esetén ez a feltétel mindig teljesül.

A várható értéket definiáló összegnek fontos jelentése van a fizikában.

- Képzeljük el, hogy az x tengely egy végtelen hosszú súlytalan rúd.
- Minden $x \in R_\xi$ pontban a rúdra egy kiterjedés nélküli és p_x nagyságú tömeg van erősítve.
- A rudat egy $a \in \mathbb{R}$ pontban alátámasztjuk.
- Az x pontban található p_x nagyságú tömeg forgatónyomatéka:
$$M_x = \text{erőkar} \cdot \text{forgató erő} = (x-a) \cdot p_x g,$$
ahol g a gravitációs gyorsulás. A teljes forgatónyomaték:
$$M = \sum_{x \in \mathbb{R}_\xi} M_x = g \sum_{x \in \mathbb{R}_\xi} (x-a) p_x.$$

A rendszer egyensúlya szempontjából három eset lehetséges:

- Ha $M > 0$, akkor a rúd az óramutató járásának irányába billen el.
- Ha $M < 0$, akkor a rúd az ellentétes irányba billen el.
- Ha $M = 0$, akkor a rúd egyensúlyban marad.

Átrendezéssel kapjuk, hogy az egyensúly pontosan akkor teljesül, ha $a = \sum_{x \in \mathbb{R}_\xi} x p_x$, tehát ha a rudat a várható értéknél támasztjuk alá. Ezt a pontot a fizikában **súlypontnak** nevezik.

Variancia és szórás

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó!

- **Várható értéktől való átlagos eltérés:**

$$E\Big(\big|\xi - E(\xi)\big|\Big) = \sum_{x \in R_\xi} \big|x - E(\xi)\big| \, P(\xi = x)$$

- **Variancia:**

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2\Big) = \sum_{x \in R_\xi} \big[x - E(\xi)\big]^2 P(\xi = x)$$

- **Szórás:** $D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}$

- A várható értéktől való átlagos eltérés azt számszerűsíti, hogy milyen mértékben szóródnak a ξ értékei a várható érték körül. Hátránya: nincsenek szép matematikai tulajdonságai.
- Vegyük észre:

$$D(\xi) = \sqrt{E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2\Big)} \approx E\Big(\sqrt{\big[\xi - E(\xi)\big]^2}\Big) = E\Big(\big|\xi - E(\xi)\big|\Big).$$

Tehát: szórás $\approx$ várható értéktől való átlagos eltérés.

27. Feladat. *A kaszinós feladatban jelölje* ξ *a nyeremény nagyságát!*

a. *A* ξ *valószínűségi változó diszkrét?*

b. *Adjuk meg* ξ *valószínűségeloszlását! A valószínűségeloszlást ábrázoljuk táblázatban és grafikonon is!*

c. *Mennyi annak az esélye, hogy egy játék során a játékos nyer valamennyi pénzt?*

d. *Ellenőrizzük le, hogy a kapott valószínűségeloszlásra teljesülnek a valószínűségeloszlásokat karakterizáló tulajdonságok!*

e. *Határozzuk meg* ξ *móduszát vagy móduszait!*

f. *Adjuk meg a nyeremény várható értékét! Mi a várható érték jelentése ebben a feladatban?*

g. *Mennyi a játék igazságos ára?*

h. *Számoljuk ki a várható értéktől való átlagos eltérést és a nyeremény szórását!*

Néhány nevezetesebb diszkrét eloszlás

Bernoulli-kísérlet

Egy véletlen kísérletet **Bernoulli-kísérletnek** nevezünk, ha mindössze kétfajta kimenetele van, egy $p \in (0,1)$ valószínűségű kedvező és egy $1-p$ valószínűségű kedvezőtlen.

Bernoulli-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **Bernoulli-eloszlású** vagy **bináris eloszlású** $p \in (0,1)$ paraméterrel, ha $R_\xi = \{0,1\}$ és

$$P(\xi = 1) = p, \qquad P(\xi = 0) = 1 - p.$$

Ekkor $E(\xi) = p$ és $\mathrm{Var}(\xi) = p(1-p)$.

Bernoulli-eloszlást a legegyszerűbben a következő módon kaphatunk: elvégzünk egy Bernoulli-kísérletet, és legyen

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{ha a kedvező kimenetel következett be,} \\ 0, & \text{ha a kedvezőtlen kimenetel következett be.} \end{cases}$$

28. Feladat. *Háromgyerekes családokban vizsgáljuk a gyerekek nemét. Tegyük fel, hogy a gyerekek neme független egymástól és a gyerekek 51% eséllyel születnek fiúnak. Jelölje ξ azt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott háromgyerekes családban hány fiú van. Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását, várható értékét és szórását!*

Binomiális-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **binomiális eloszlású** $n \geqslant 1$ egész és $p \in (0,1)$ paraméterekkel, ha

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ekkor $E(\xi) = np$ és $\mathrm{Var}(\xi) = np(1-p)$.

A binomiális eloszlású változó tipikus előállítása: n alkalommal egymástól függetlenül megismételünk egy Bernoulli-kísérletet, és ξ a kapott kedvező kimeneteke száma.

29. Feladat. *Egy szelvénnyel játszunk az ötöslottón, és legyen ξ az elért találatok száma.*

a. *Írjuk fel a ξ valószínűségeloszlását és várható értékét!*

b. *Milyen módon változna a megoldás, ha a lottószámokat visszatevéssel húznák ki? (A szelvényen ebben az esetben is 5 különböző számot kellene megjelölni, és azt nevezzük találatnak, ha egy nyerőszámot a szelvényen megjelölt számok közül húznak ki.)*

Hipergeometrikus eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású** n, M, N pozitív egész paraméterekkel, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Ekkor $E(\xi) = nM/N$.

Megjegyzések:

- Hipergeometrikus eloszlás: a visszatevés nélküli mintavételezést írja le.
- Visszatevéses mintavételezés esetén binomiális eloszlást használunk.

30. Feladat. *Lajos kulcscsomóján három kulcs található, ezek közül az egyik a bejárati ajtót nyitja. Egy este a barátaival italozik, és hazatérve nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Emiatt véletlenszerűen és visszatevéssel választ újabb és újabb kulcsot, míg ki nem nyitja az ajtót. Jelölje ξ a szükséges próbálkozások számát!*

a. *Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását és várható értékét!*

b. *Miben változik a megoldás, ha Lajos visszatevés nélkül próbálkozik?*

Geometriai eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **geometriai eloszlású** $p \in (0,1)$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Ekkor $E(\xi) = 1/p$.

Legyen adva egy p paraméteres Bernoulli-kísérlet. Addig ismételjük ezt a kísérletet egymástól függetlenül, míg végül kedvező kimenetelt nem kapunk. Ekkor a próbálkozások száma geometriai eloszlást követ p paraméterrel.

Folytonos valószínűségi változók

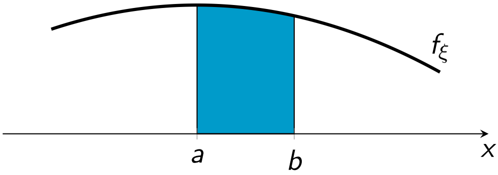
Folytonos valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

Egy ξ valószínűségi változó **(abszolút) folytonos eloszlású**, ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $a \leqslant b$ valós számok esetén

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b f_\xi(x)\, dx\,.$$

Ekkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

A fenti definícióhoz szükséges, hogy az f_ξ függvény integrálható legyen az $[a, b]$ intervallumon. Az integrálhatóságot a jövőben nem hangsúlyozzuk: ha felírunk egy integrált, akkor abba mindig beleértjük, hogy létezik.



A folytonos valószínűségi változók néhány tulajdonsága

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel! Ekkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

(i) Tetszőleges a valós szám esetén $P(\xi = a) = 0$.

(ii) A sűrűségfüggvényt definiáló formula akkor is érvényes, ha az egyik vagy minkét $\leqslant$ jelet $<$ jelre cseréljük.

(iii) A sűrűségfüggvényt definiáló formula $a = -\infty$ és/vagy $b = +\infty$ helyettesítéssel is érvényes.

Bizonyítás. (i) $P(\xi = a) = P(a \leqslant \xi \leqslant a) = \int_a^a f_\xi(x)dx = 0$

(ii) Csak egy esetet nézünk, a többi hasonló módon megy:

$$P(a \leqslant \xi < b) = P(a \leqslant \xi \leqslant b) - P(\xi = b) = \int_a^b f_\xi(x)dx - 0$$

(ii) Csak egy esetet nézünk, a többi itt is hasonló módon megy:

$$P(a \leqslant \xi) = P\big(a \leqslant \xi \leqslant +\infty\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big(a + k \leqslant \xi < a + k + 1\big)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a+k}^{a+k+1} f_\xi(x)dx = \int_a^{+\infty} f_\xi(x)dx$$

Egy folytonos valószínűségi változó értékkészletét nem lehet meghatározni csak pusztán a sűrűségfüggvény segítségével:

- Egy ξ folytonos valószínűségi változó minden x valós számot 0 valószínűséggel vesz fel értékül.
- Emiatt nem eldönthető, hogy a $\{\xi = x\}$ esemény bekövetkezhet, csak 0 az esélye; vagy nem következhet be, mert a lehetetlen esemény.

Nem értékkészlet, de a gyakorlatban értékkészletként működik

Legyen $R = \{x \in \mathbb{R} : f_\xi(x) > 0\}$. Ekkor $P(\xi \in R) = 1$.

Bizonyítás. Az R halmazon kívül $f_\xi(x) \leqslant 0$, ezért

$$P\big(\xi \notin R\big) = P\big(\xi \in \overline{R}\big) = \int_{\overline{R}} f_\xi(x)dx \leqslant 0.$$

Most $P(\xi \notin R) \geqslant 0$, ezért $P(\xi \notin R) = 0$, tehát $P(\xi \in R) = 1$.

A sűrűségfüggvények általános tulajdonságai

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

- tetszőleges $a \leqslant b$ valós számok esetén $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény sűrűségfüggvény! Ekkor:

- $\int_a^b f(x)dx = P\big(a \leqslant \xi \leqslant b\big) \geqslant 0$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P\big(-\infty \leqslant \xi \leqslant +\infty\big) = 1$.

A fordított irány nehéz, mértékelméleti ismereteket igényelne.

A sűrűségfüggvények elégséges feltétele

Tegyük fel, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az alábbiak:

- tetszőleges x valós számra $f(x) \geqslant 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Ekkor létezik olyan ξ folytonos valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye.

Hogyan definiáljuk egy ξ folytonos valószínűségi változó várható értékét? A diszkrét eset formulája nem alkalmazható, hiszen $P(\xi = x) = 0$ minden x értékre. Ötlet: közelítsünk egy diszkrét valószínűségi változóval!

- Osszuk be a valós számegyenest $\delta > 0$ hosszúságú intervallumokra:
$$\big[k\delta, (k+1)\delta\big), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
- Tetszőleges ω kimenetel esetén legyen $\eta(\omega) = k\delta$, ahol k az az egész szám, melyre $\xi(\omega) \in [k\delta, (k+1)\delta)$.
- Ez egy jó közelítés, hiszen $|\xi(\omega) - \eta(\omega)| < \delta$ minden ω esetén.
- Ekkor η diszkrét valószínűségi változó, és a valószínűségeloszlása:
$$P\big(\eta = k\delta\big) = P\big(k\delta \leqslant \xi < (k+1)\delta\big) = \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f_\xi(x)dx.$$
- Ebből következik, hogy
$$E(\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\delta P\big(\eta = k\delta\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} k\delta f_\xi(x)dx$$
$$\approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} x f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx.$$

Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx < \infty.$$

Ekkor a ξ **várható értéke** a következő formulával van definiálva:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx.$$

Megjegyzések:

- Ha az integrálhatósági feltevés teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változónak **létezik a várható értéke**. Ebben az esetben a várható érték ténylegesen egy véges valós szám.
- Tegyük fel, hogy egy $[a, b]$ véges intervallumra teljesül, hogy minden $x \notin [a, b]$ szám esetén $f_\xi(x) = 0$. Ekkor az integrálhatósági feltétel automatikusan teljesül, és a várható érték létezik.
- Szemléletesen: várható érték = átlagos érték.
- Vegyük észre a hasonlóságot a diszkrét esettel!

A diszkrét valószínűségi változók varianciáját és szórását a következő módon definiáltuk, feltéve(!), hogy a várható érték létezik:

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2\Big), \qquad D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}$$

Ezek univerzális formulák, a folytonos esetre is alkalmazhatóak.

A variancia meghatározása

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, és tegyük fel, hogy létezik a várható értéke. Ekkor

$$\mathrm{Var}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x - E(\xi)\big]^2 f_\xi(x)\,dx.$$

- Heurisztikus bizonyítás: a várható értékhez hasonló gondolatmenettel egy diszkrét valószínűségi változóval közelítünk.
- Precíz bizonyítás: analízisbeli eszközökkel megmutatható, hogy egy $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényekre megfelelő feltételek mellett

$$E\big(h(\xi)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_\xi(x)\,dx.$$

Alkalmazzuk ezt $h(x) = [x - E(\xi)]^2$ választással!

31. Feladat. *Egy folytonos ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az alábbi f_ξ függvény:*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$$

a. *Ábrázoljuk a függvényt, majd adjuk meg a következő valószínűségeket:* $P(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$, $P(1 \leqslant \xi \leqslant 2)$.

b. *Mennyi a valószínűsége annak, hogy a változó értéke pontosan 1? Mennyi az esélye, hogy a változó 1-nél kisebb, illetve annak, hogy 1-nél nagyobb értéket vesz fel?*

c. *A sűrűségfüggvény alapján meghatározható a ξ valószínűségi változó értékkészlete? Ha nem, akkor adjunk meg azt a legszűkebb $R \subset \mathbb{R}$ intervallumot, melyre $P(\xi \in R) = 1$.*

d. *Ellenőrizzük le, hogy az f_ξ függvény valóban sűrűségfüggvény!*

e. *Határozzuk meg a ξ várható értékét!*

f. *Mennyi a ξ varianciája és szórása?*

Az eloszlásfüggvény

Amikor egy valószínűségi változót vizsgálunk, akkor általában az alábbi kérdésekre keressük a választ:

- Mekkora valószínűséggel esik a változó egy adott intervallumba?
- Mekkora a változó átlagos értéke, tehát mi a várható érték?
- Milyen mértékű a változó értékeinek szóródása, tehát mennyi a szórás?

Ezekre a kérdésekre az alábbi eszközökkel tudunk válaszolni:

- diszkrét valószínűségi változó esetén: valószínűségeloszlás;
- folytonos valószínűségi változó esetén: sűrűségfüggvény.

Vajon van olyan univerzális eszköz, mely mindkét esetben alkalmazható? Olyan eszközre lenne szükségünk, mely

- minden fontos információt tartalmaz a kapcsolatos valószínűségi változóval kapcsolatban;
- de nem csak a diszkrét vagy a folytonos esetben alkalmazható.

Meglepő módon ilyen univerzális eszköz létezik.

Eloszlásfüggvény

Legyen ξ egy tetszőleges valószínűségi változó. A ξ **eloszlásfüggvénye** az az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény, melyet az alábbi formulával definiálunk:

$$F_\xi(t) = P(\xi < t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzések:

- Tetszőleges t valós szám esetén az $F_\xi(t)$ érték azt mutatja meg, hogy a ξ változó mekkora valószínűséggel esik a a számegyenesen a t-től balra, tehát a $(-\infty, t)$ intervallumba.
- Az eloszlásfüggvény tetszőleges valószínűségi változó esetén létezik, nem csak a diszkrét vagy a folytonos esetben.
- Egyes tankönyvek az eloszlásfüggvényt az $F_\xi(t) = P(\xi \leqslant t)$, $t \in \mathbb{R}$, egyenlőséggel definiálják. Ez kisebb változásokat okoz bizonyos formulákban, de ez alapvetően nem befolyásolja az alkalmazásokat.

32. Feladat. *Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: a játékos feldob egy szabályos dobókockát, és a nyereményét az alábbi táblázat alapján határozzák meg.*

dobott szám	*nyeremény*
1, 2	*0 Ft*
3, 4, 5	*1000 Ft*
6	*3600 Ft*

Írjuk fel a nyeremény eloszlásfüggvényét! Milyen kapcsolat fedezhető fel a valószínűségeloszlás és az eloszlásfüggvény között?

Diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye egy olyan lépcsős (szakaszonként konstans) függvény, mely pontosan a változó lehetséges értékeiben ugrik, és egy $t \in R_\xi$ helyen az ugrás nagysága $P(\xi = t)$.

33. Feladat. *Egy folytonos* ξ *valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az alábbi* f_ξ *függvény:*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$$

Írjuk fel a ξ *eloszlásfüggvényét! Milyen kapcsolat fedezhető fel a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény között?*

Folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

Egy ξ valószínűségi változó pontosan akkor abszolút folytonos, ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x)dx.$$

Ekkor az f_ξ függvény a sűrűségfüggvény, és $f_\xi = F'_\xi$.

Megjegyzések:

- Tekintsünk egy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt! Akkor mondjuk, hogy az F függvény **abszolút folytonos**, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, melyre

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

  Innen kapták az (abszolút) folytonos valószínűségi változók a nevüket.

- Sok tankönyvben nem úgy definiálják a folytonos változókat, mint mi tettük, hanem az előző oldal piros dobozával. Ebben a felépítésben a mi definíciónk csak egy tétel. Ennek az új megközelítésnek van előnye és hátránya is.

  Előny: A mi definíciónk redundáns, ez az új definíció nem az.

  Hátrány: Az új definíció nehezen interpretálható, tovább tart eljutni a sűrűségfüggvény szemléletes jelentéséig.

34. Feladat. *Az előző két feladat alapján fogalmazzunk meg sejtéseket, hogy az eloszlásfüggvények milyen általános tulajdonságokkal rendelkeznek. Szempontok: monotonitás, folytonosság, határérték a végtelenben.*

Az eloszlásfüggvények általános tulajdonságai

Egy $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény pontosan akkor egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- F monoton növekvő;
- F mindenhol balról folytonos;
- $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ és $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

Valószínűségek számítása az eloszlásfüggvény segítségével

Legyen ξ egy tetszőleges valószínűségi változó, legyen F_ξ az eloszlásfüggvénye, és legyenek a és b valós számok. Ekkor:

(i) $P(\xi < b) = F_\xi(b)$.

(ii) $P(\xi \geqslant a) = 1 - F_\xi(a)$.

(iii) $P(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Bizonyítás. (i) Ez csak az eloszlásfüggvény definíciója.
(ii) $P(\xi \geqslant a) = 1 - P(\xi < a) = 1 - F_\xi(a)$.
(iii) $P(a \leqslant \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

35. Feladat. *Az egyenletességi hipotézisnek megfelelően választunk egy ξ véletlen értéket az $[a, b]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó értékkészletét, eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását.*

Egyenletes eloszlás

Akkor mondjuk, hogy egy ξ folytonos valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha a sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

36. Feladat. *Az egyenletességi hipotézisnek megfelelően választunk egy véletlen pontot az $r = 2$ sugarú zárt körlapon. Jelölje ξ a választott pontnak a kör középpontjától való távolságát!*

a. *Adjuk meg a ξ valószínűségi változó értékkészletét és eloszlásfüggvényét!*

b. *Miben változik a megoldás, ha a körlapból kivesszük a középpontot, és a véletlen pontot a „lyukas körlapon" választjuk? És ha a körvonalat vesszük ki, tehát a nyitott körlapról választunk pontot?*

c. *Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó mediánját!*

Kvantilis, medián

Legyen ξ valószínűségi változó, $\alpha \in (0, 1)$ konstans. Tegyük fel, hogy a q_α valós számra $P(\xi < q_\alpha) = \alpha$. Ekkor azt mondjuk, hogy q_α a ξ valószínűségi változó **α-kvantilise**. A $q_{1/2}$ értéket **mediánnak** nevezzük.

- Az α-kvantilis egy α és egy $1 - \alpha$ valószínűségű részre osztja fel a változó értékkészletét.
- Az α-kvantilis nem mindig létezik, és ha létezik, akkor nem feltétlenül egyértelmű. A kvantilis definiálható olyan módon is, hogy mindig létezzen és mindig egyértelmű legyen, de az a definíció bonyolultabb.

37. Feladat. *Van egy biztosításom, ami erre a naptári évre vonatkozik. A statisztikai adatok szerint 90% eséllyel az év folyamán nem fog kár érni. Viszont 10% eséllyel bekövetkezhet a káresemény, és ekkor a kárérték egyenletes eloszlást követ 0 Ft és 1 millió Ft között. Jelölje ξ azt, hogy millió forintban kifejezve milyen nagyságú kár ér ebben az évben!*

a. *Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó értékkészletét!*

b. *Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét! Ez most diszkrét vagy folytonos valószínűségi változó?*

c. *Egy heurisztikus gondolatmenettel adjuk meg a ξ várható értékét! Mi a várható érték szemléletes jelentése ebben a feladatban? Mennyi a biztosítás „igazságos ára”?*

Megjegyzések:

- Az előző feladatban egy *kevert eloszlást* kaptunk, egy diszkrét és egy folytonos eloszlást kevertünk össze.
- Minden eloszlás megkapható ilyen módon? Nem, vannak további eloszlások is.
- Az eloszlásoknak három tiszta típusa van: diszkrét, folytonos és szinguláris. Minden eloszlás megkapható ezen három keverékeként.

Az eloszlásfüggvény definíciója: $F_\xi(t) = P(\xi < t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Valószínűsége csak eseménynek van! Hogyan kell értelmezni a „$\xi < t$” egyenlőtlenséget, mint az eseménytér részhalmaza? A következő módon:

$$\{\xi < t\} = \big\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < t\big\} \subset \Omega$$

Ez a halmaz mindig esemény, tehát eleme az eseményalgebrának? NEM!!!

A valószínűségi változók precíz definíciója

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a véletlen kísérletet leíró valószínűségi mező. Egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény **mérhető**, ha tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\xi < t\} = \big\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < t\big\} \in \mathcal{A}.$$

Ekkor a ξ függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük.

- Diszkrét valószínűségi mezőn minden $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény mérhető.
- Megmutatható, hogy ha a mérhetőségi tulajdonság teljesül, akkor tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén
$$\{\xi \in I\} = \big\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in I\big\} \in \mathcal{A}.$$
Tehát a $P(\xi \in I) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in I\})$ valószínűség jól definiált.

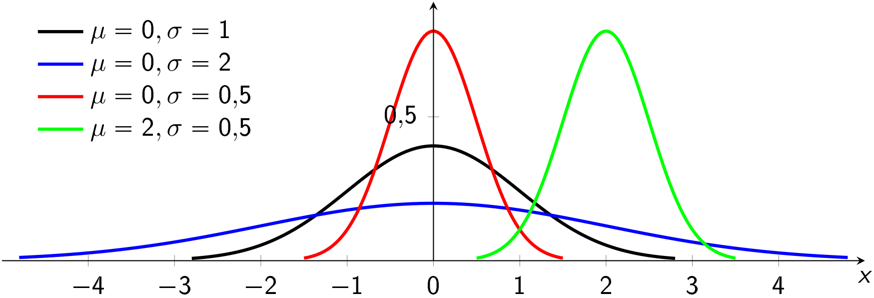
A normális eloszlás

Normális eloszlás (Gauss, 1809)

Egy η folytonos valószínűségi változó **normális eloszlást** avagy **Gauss-eloszlást** követ $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha a sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A normális eloszlás sűrűségfüggvényét **Gauss-görbének** vagy másnéven **haranggörbének** nevezzük.



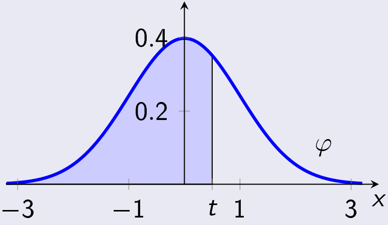
A normális eloszlás alkalmazásai:

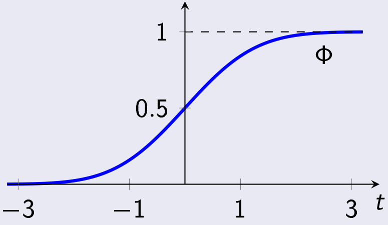
- Fizikai mérések elmélete: mért érték = igazi érték + mérési hiba. A mérési hibát gyakran modellezik normális eloszlással.
- Ipari töltő- és vágóberendezések: ezek méréssel járnak.
- Élettudományok: számos mennyiség (testmagasság, vérnyomás, IQ) normális vagy a normálisból származtatott eloszlást követ.

Standard normális eloszlás

A $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméteres normális eloszlást **standard normális** eloszlásnak nevezzük. Jelölésben: $\eta_{0,1}$. Sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(t) = P(\eta_{0,1} < t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,dx.$$





A normális eloszlás tulajdonságai

Legyen η normális eloszlású μ és σ paraméterekkel!

(i) Az f_η függvény valóban sűrűségfüggvény.

(ii) $E(\eta) = \mu$ és $D(\eta) = \sigma$.

(iii) Az $(\eta - \mu)/\sigma$ valószínűségi változó standard normális eloszlású.

(iv) Tetszőleges t valós érték esetén $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

38. Feladat. *Az IQ teszteket úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. (Létezik 20 pont szórású teszt is.)*

a. *A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 70 alá? Mekkora hányad esik 90 és 120 pont közé?*

b. *A Mensa egy nemzetközi egyesület, melynek célja, hogy összefogja a magas intelligenciájú embereket. Minden országból a népesség felső 2 százaléka léphet be. Hány pontos IQ a belépési feltétel?*

Ha η normális eloszlású μ és σ paraméterrel, akkor tetszőleges a és b valós számok esetén

$$P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big) = \int_a^b f_\eta(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx\,.$$

Ez az integrál nem számíthatóak ki analízisbeli eszközökkel:

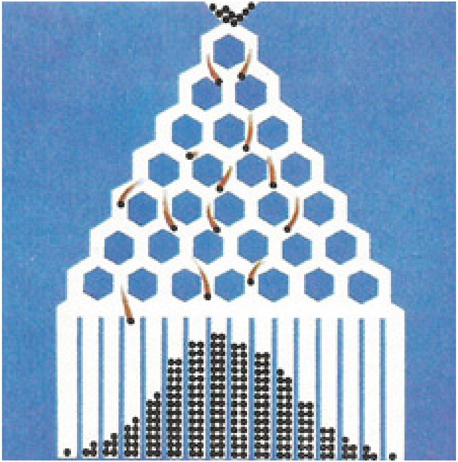
- az f_η sűrűségfüggvénynek nem létezik véges zárt alakban felírható primitív függvénye;
- ezért nem alkalmazhatjuk a Newton–Leibnitz-formulát.

Hogyan számoljuk ki a fenti valószínűséget? **Standardizálunk**, tehát áttérünk a standard normális eloszlásra:

$$P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{\eta-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

A Φ függvényre nem létezik könnyen számolható matematikai formula. Ehelyett a függvény értékeit táblázatból nézzük ki.

39. Feladat. *Feldobunk 100 alkalommal egy szabályos pénzérmét, és legyen ξ a kapott fejek száma! Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását, várható értékét és szórását! Mennyi az esélye, hogy legalább 40, de legfeljebb 60 fejet dobunk?*



A **Galton-deszka** (Francis Galton, 1889) egy szemléltetőeszköz, a leírása elérhető a Wikipedian magyarul és angolul. (Lásd az előző oldal ábráját!)

- Ha a deszkán n éksor van, akkor alul $n+1$ tartály található. Számozzuk ezeket 0-tól n-ig.
- Legurítunk egy golyót a deszkán, és jelölje ξ azt, hogy a golyó melyik tartályba esik! Ekkor $R_\xi = \{0, 1, \ldots, n\}$.
- A golyó akkor esik a k-adik tartályba, ha pontosan k éknél tér ki jobbra. Tehát a ξ binomiális eloszlást követ n és $p = 1/2$ paraméterrel.
- Ha sok (N) golyót gurítunk le, mondjuk egy 1 méter magas golyóoszlopot, akkor a k-adik tartályban a golyóoszlop magassága:

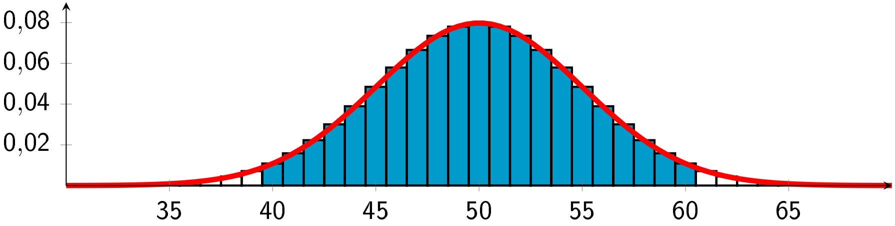
$$r_N(\xi = k) \approx P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Tehát ilyen módon vizuálisan is meg lehet jeleníteni a binomiális valószínűségeloszlást.
- A Galton-deszkára időnként felfestik a Gauss-görbét is: video.
- Egy interaktív oldal, ahol változtatni lehet a paramétereket: animáció.

Vissza a feladathoz: ξ a fejek száma $n = 100$ pénzfeldobás után.

- Az alábbi ábrán az oszlopok szélessége 1, és a k érték feletti oszlop magassága $P(\xi = k)$. Ekkor a kék tartomány összterülete:
  $$\sum_{k=40}^{60} 1 \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=40}^{60} P(\xi = k) = P\big(40 \leqslant \xi \leqslant 60\big)$$
- Legyen η normális eloszlású valószínűségi változó $\mu = 50$ és $\sigma = 5$ paraméterrel. A piros színű görbe az η sűrűségfüggvénye.
- A 40 és a 60 értékek között a sűrűségfüggvény alatti terület jó közelítéssel megegyezik a kék színű tartomány területével, vagyis

$$P\big(40 \leqslant \xi \leqslant 60\big) \approx \int_{40}^{60} f_\eta(x)\, dx = P\big(40 \leqslant \eta \leqslant 60\big)$$



de Moivre–Laplace-tétel (1738)

Legyen ξ binomiális eloszlású változó n és p paraméterrel! Ekkor tetszőleges $a < b$ valós számok esetén

$$P\left(a \leqslant \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a), \qquad n \to \infty.$$

Következmények:

- A tétel értelmében
$$P\left(a \leqslant \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) \approx P(a \leqslant \eta_{0,1} \leqslant b).$$
- Legyen η normális eloszlású $\mu = np$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterekkel. Ekkor
$$P\big(a \leqslant \xi \leqslant b\big) \approx P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big)\,,$$

A fenti közelítések annál pontosabbak, minél nagyobb az n paraméter értéke. Már $n \geqslant 20$ esetén is szokták használni őket, de a tapasztalatok szerint $n \geqslant 50$ esetén válnak igazán pontossá.

A nagy számok törvényei

Adott egy véletlen kísérlet, egy A esemény és egy ξ valószínűségi változó. Megismételjük a kísérletet egymástól függetlenül n alkalommal. Legyenek

- $r_n(A)$ az A esemény relatív gyakorisága;
- $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a ξ valószínűségi változó megfigyelt értékei!

Tapasztalati tények:

- A relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik: $r_n(A) \approx P(A)$.
- A megfigyelt értékek számtani átlaga a várható érték körül ingadozik:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \approx E(\xi).$$

Tudunk ennél többet mondani? Tudunk esetleg konvergenciát bizonyítani?

Markov-egyenlőtlenség (1900 körül)

Legyen ξ olyan nemnegatív értékű valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke! Ekkor tetszőleges $a > 0$ esetén

$$P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{E(\xi)}{a}.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő *indikátorváltozót*:

$$\mathcal{I}_{\{\xi \geqslant a\}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \xi \geqslant a, \\ 0, & \text{ha } \xi < a. \end{cases}$$

Ekkor $P(\xi \geqslant a) = E(\mathcal{I}_{\{\xi \geqslant a\}}) \leqslant E(\xi/a) = E(\xi)/a,$ ugyanis

- Az $\mathcal{I}_{\{\xi \geqslant a\}}$ Bernoulli-eloszlást követ $p = P(\xi \geqslant a)$ paraméterrel, tehát $E(\mathcal{I}_{\{\xi \geqslant a\}}) = P(\xi \geqslant a)$.
- $P\big(\mathcal{I}_{\{\xi \geqslant a\}} \leqslant \xi/a\big) = 1$, amiből $E\big(\mathcal{I}_{\{\xi \geqslant a\}}\big) \leqslant E(\xi/a)$.
- A várható értékre vonatkozó azonosság: $E(\xi/a) = E(\xi)/a$.

Csebisev-egyenlőtlenség (1860 körül)

Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek létezik a szórása! Ekkor tetszőleges $a > 0$ esetén

$$P\Big(\big|\xi - E(\xi)\big| \geqslant a\Big) \leqslant \frac{D^2(\xi)}{a^2}.$$

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség alkalmazásával:

$$P\Big(\big|\xi - E(\xi)\big| \geqslant a\Big) = P\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2 \geqslant a^2\Big) \leqslant \frac{E\big([\xi - E(\xi)]^2\big)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(\xi)}{a^2}.$$

Megjegyzések:

- Markov Csebisev tanítványa volt. A Markov-egyenlőtlenség egyszerű bizonyítást ad a Csebisev-egyenlőtlenségre.
- A Csebisev-egyenlőtlenség nagyon pontatlan is tud lenni.

40. Feladat. *Feldobunk 100 alkalommal egy szabályos pénzérmét! Adjunk becslést annak a valószínűségére, hogy legalább 40, de legfeljebb 60 fejet kapunk! Mennyire pontos ez a becslés?*

Valószínűségi változók függetlensége

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változóknak egy véges vagy végtelen sorozata. Akkor mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $n \geqslant 2$ egész, $i_1, \ldots, i_n$ különböző indexek és $x_1, \ldots, x_n$ valós számok esetén

$$P(\xi_{i_1} < x_1, \ldots, \xi_{i_n} < x_n) = P(\xi_{i_1} < x_1) \cdots P(\xi_{i_n} < x_n)$$

Megjegyzések:

- A függetlenség definíciója lényegében azt követeli meg, hogy a $\{\xi_{i_1} < x_1\}, \ldots, \{\xi_{i_n} < x_n\}$ események függetlenek legyenek.
- Hasonló módon definiálható a változók *páronkénti függetlensége* is.
- Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *diszkrét* valószínűségi változók! Ezek pontosan akkor függetlenek, ha minden $n \geqslant 2$ egész, $i_1, \ldots, i_n$ különböző indexek és $x_1, \ldots, x_n$ valós számok esetén

$$P(\xi_{i_1} = x_1, \ldots, \xi_{i_n} = x_n) = P(\xi_{i_1} = x_1) \cdots P(\xi_{i_n} = x_n)$$

Azonos eloszlású valószínűségi változó

Akkor mondjuk, hogy kettő vagy több valószínűségi változó **azonos eloszlású**, ha azonos az eloszlásfüggvényük.

Összegváltozó várható értéke és szórása

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tetszőleges valószínűségi változók!

a. Ha mindegyik valószínűségi változónak létezik a várható értéke, akkor

$$E\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = E(\xi_1) + \cdots + E(\xi_n).$$

Ha ezen felül a változók még azonos eloszlásúak is, akkor

$$E\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = nE(\xi_1).$$

b. Ha a változók függetlenek, és mindegyiknek létezik a szórása, akkor

$$D^2\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = D^2(\xi_1) + \cdots + D^2(\xi_n).$$

Ha ezen felül a változók még azonos eloszlásúak is, akkor

$$D^2\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = nD^2(\xi_1).$$

41. Feladat. *Feldobunk egy szabályos dobókockát* 100 *alkalommal. Adjuk meg a dobott számok összegének várható értékét és szórását!*

A nagy számok Csebisev-féle (gyenge) törvénye (1860 körül)

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók véges szórással! Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - E(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Bizonyítás. Most

$$E(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = nE(\xi_1), \qquad D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = nD^2(\xi_1).$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - E(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\Big(\big|(\xi_1 + \cdots + \xi_n) - nE(\xi_1)\big| \geqslant n\varepsilon\Big)$$
$$\leqslant \frac{D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{nD^2(\xi_1)}{n^2\varepsilon^2} \to 0.$$

42. Feladat. *Újra és újra feldobunk egy szabályos dobókockát. A fenti tétel alapján mit állíthatunk a kapott értékekről?*

A nagy számok Bernoulli-féle (gyenge) törvénye (1713)

Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet és egy A eseményt.
A véletlen kísérletet egymástól függetlenül n alkalommal megismételve legyen $r_n(A)$ a relatív gyakoriság! Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\big|r_n(A) - P(A)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő indikátorváltozókat:

$$\mathcal{I}_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik végrehajtáskor } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0, & \text{ha nem következik be.} \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, és mindegyik Bernoulli-eloszlású $p = P(A)$ paraméterrel. Tehát a nagy számok Csebisev-féle törvénye szerint

$$P\Big(\big|r_n(A) - P(A)\big| \geqslant \varepsilon\Big) = P\left(\left|\frac{\mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_n}{n} - E(\mathcal{I}_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0.$$

43. Feladat. *Újra és újra feldobunk egy szabályos dobókockát. A fenti tétel alapján mit állíthatunk a kapott hatosok számáról?*

Valószínűségi változók konvergenciája

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változóknak tetszőleges sorozata!

- A sorozat **sztochasztikusan** avagy **gyengén konvergál** egy a valós számhoz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\big(|\xi_n - a| \geqslant \varepsilon\big) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

- A sorozat **1 valószínűséggel** avagy **erősen konvergál** az a-hoz, ha

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \xi_n = a\Big) = P\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = a\Big\}\Big) = 1.$$

Megjegyzés: az erős konvergenciából következik a gyenge konvergencia, de ez fordítva már nem teljesül.

44. Feladat. *Mutassunk példát egy olyan $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozatra, ami sztochasztikusan konvergál, de 1 valószínűséggel nem konvergál!*

A nagy számok Kolmogorov-féle (erős) törvénye (1933)

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók véges várható értékkel! Ekkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = E(\xi_1) \right) = 1.$$

A nagy számok erős törvénye a relatív gyakoriságokra

Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet és egy A eseményt. A véletlen kísérletet egymástól függetlenül n alkalommal megismételve legyen $r_n(A)$ a relatív gyakoriság! Ekkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} r_n(A) = P(A) \right) = 1.$$

45. Feladat. *Újra és újra feldobunk egy szabályos dobókockát. A fenti tételek segítségével mit állíthatunk a kapott értékek átlagairól illetve a kapott hatosok számáról? Teljesülnek ezek a konvergenciák minden* ω *kimenetel esetén?*

A hétköznapi életben időnként lehet hallanai azt a szófordulatot, hogy „a nagy számok törvénye szerint…” Ilyenkor pontosan mire gondol a költő?

Tekintsünk egy véletlen kísérletet és egy A eseményt, legyen $P(A) > 0$. Ismételjük meg a kísérletet egymástól függetlenül újra és újra. Ekkor 1 valószínűséggel

$$\frac{k_n(A)}{n} = r_n(A) \to P(A) > 0, \quad n \to \infty.$$

Ebből következik, hogy:

- A $k_n(A)$ sorozat nem lehet konstans 0, tehát

$$P\big(\text{az } A \text{ esemény valamikor bekövetkezik}\big) = 1.$$

- A $k_n(A)$ sorozat nem lehet korlátos sem, tehát

$$P\big(\text{az } A \text{ esemény végtelen sokszor bekövetkezik}\big) = 1.$$

- És ezekhez csak annyi kell, hogy A pozitív valószínűségű legyen.

Statisztikai alapfogalmak

Statisztika

A valóság számszerű információinak megfigyelésére, összegzésére, elemzésére és modellezésére irányuló gyakorlati tevékenység és tudomány.

Adott egy véletlen kísérlet és egy ξ valószínűségi változó.

- Valószínűségszámítás: Ha ismerjük a ξ valószínűségi változó valószínűségeloszlását vagy sűrűségfüggvényét, akkor tudunk számolni valószínűségeket, várható értéket, szórást.
- Matematikai statisztika: Nem ismerjük a ξ valószínűségeloszlását vagy sűrűségfüggvényét, ezért nem tudjuk kiszámolni ezeket az értékeket. Ehelyett megfigyeléseket végzünk a ξ változóra, és a kapott minta alapján vonunk le következtetéseket.

A matematikai statisztikának több területe van, mi kettővel foglalkozni:

- Becsléselmélet: Adjunk becslést a várható értékre, szórásra, stb.
- Hipotézisvizsgálat: Adott egy állítás a ξ változóval kapcsolatban. (Pl: $E(\xi) = 2$.) Döntsük el, hogy ez az állítás igaz vagy hamis.

Statisztikai alapfogalmak

- **Háttérváltozó:** Az a ξ valószínűségi változó, melyet vizsgálunk.
- **Mintavételezés:** A ξ valószínűségi változó értékeinek megfigyelése a kísérlet többszöri végrehajtása során.
- **Statisztikai minta:** Független $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, melyek azonos eloszlásúak a ξ háttérváltozóval. (Mintaelemek.)
- **Mintarealizáció:** A $\xi_1, \dots, \xi_n$ változók megfigyelés során kapott konkrét értékei.
- **Mintaméret:** A megfigyelések száma (n).

Hogyan is történik ez a gyakorlatban:

- Kíváncsiak vagyunk egy ξ valószínűségi változó tulajdonságaira.
- Ezen a ponton a mintaelemek valószínűségi változók: még nem tudjuk, hogy mik lesznek a megfigyelt értékek.
- Elvégezzük a véletlen kísérletet n alkalommal, ezzel megkapjuk a realizációt, tehát a mintaelemek konkrét értékeit.
- Elvégezzük a statisztikai elemzést a realizáción. (Mi a továbbiakban nagyrészt ezzel a lépéssel foglalkozunk.)

Biostatisztikai megközelítés. Legyen adva élőlényeknek egy populációja, és tekintsünk egy mennyiséget az egyedeken (életkor, testtömeg, utódok száma, stb.) Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet, és ξ jelöli a vizsgált mennyiséget a kiválasztott egyed esetében.

Valószínűségszámítás: Ha ismerjük a ξ változó valószínűségeloszlását vagy sűrűségfüggvényét, akkor ki tudjuk számolni a következő értékeket:

- $E(\xi) =$ a vizsgált mennyiség átlagos értéke a populáción belül,
- $D(\xi) =$ a vizsgált mennyiség szórása a populáción belül,
- $P(a \leqslant \xi \leqslant b) =$ arány a teljes populáción belül.

Matematikai statisztika:

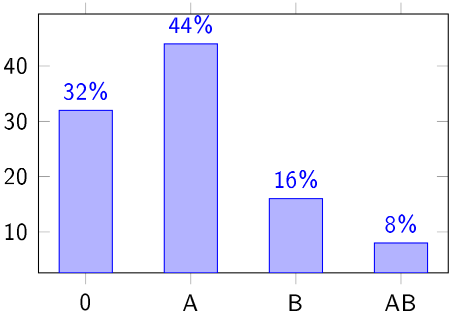
- Nem ismerjük a vizsgált mennyiség eloszlását a teljes populáción belül, ezért nem tudjuk kiszámolni a fenti értékeket.
- Helyette véletlenszerűen kiválasztunk n egyedet, és ezen egyedek alapján vonuk le következtetéseket.
- A statisztikai minta a vizsgált mennyiség értéke a kiválasztott egyedek esetében: $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

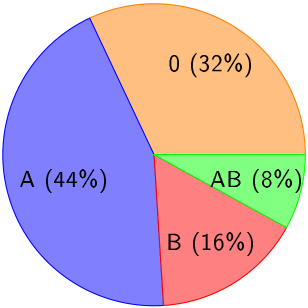
Oszlopdiagram és kördiagram

Legyen a ξ háttérváltozó diszkrét!

- **Oszlopdiagram:** Oszlopokkal ábrázoljuk, hogy az egyes értékek hányszor (vagy milyen arányban) szerepelnek a mintarealizációban.
- **Kördiagram:** Körcikkekkel reprezentáljuk a mintát, a középponti szögek arányosak az értékek megjelenési arányával.

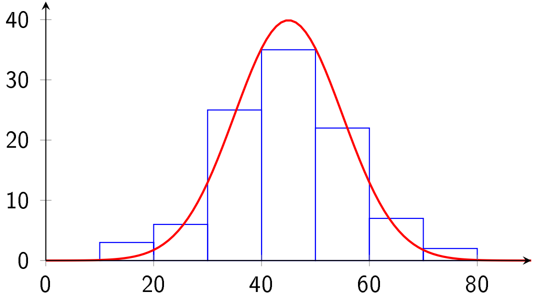
Példa: a vércsoportok aránya egy nagy elemszámú mintában.





Hisztogram

Legyen a ξ háttérváltozó folytonos eloszlású! Bontsuk fel a számegyenest azonos hosszúságú intervallumokra. Minden intervallumra állítsunk egy olyan magas oszlopot, ahány mintaelem esik az adott intervallumba.



A fenti grafikonon kékkel van ábrázolva egy $n = 100$ elemszámú minta hisztogramja. Nagy elemszám (tipikusan $n \geqslant 100$) esetén a hisztogram egy jó grafikus becslés a sűrűségfüggvényre, ugyanis a hisztogram teteje követi a sűrűségfüggvény alakját. (Lásd a piros függvényt.)

Empirikus eloszlásfüggvény

Legyen a ξ háttérváltozó tetszőleges eloszlású! Az **empirikus eloszlásfüggvény** a következő függvény: $F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$,

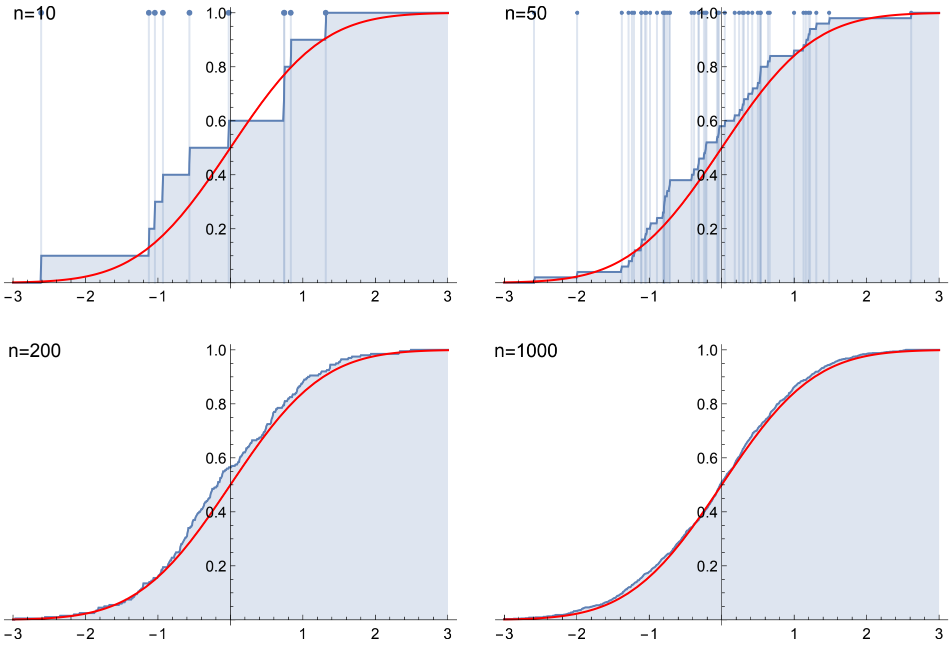
$$F_n(x) = \text{az } x \text{ értéknél kisebb elemek aránya a mintában}$$

A matematikai statisztika alaptétele

Jelölje F_ξ a ξ elméleti eloszlásfüggvényét. Ekkor 1 valószínűséggel

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left| F_n(x) - F_\xi(x) \right| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

- Az F_n függvény egy véletlen függvény, hiszen a mintaelemek valószínűségi változók. Nagy mintaméret esetén $F \approx F_n$.
- Az F_n függvény egy lépcsős függvény. A mintaelemeknél ugrik, és minden mintaelemnél $1/n$ az ugrás nagysága.
- A matematikai statisztikának van értelme: a mintában van elég információ ahhoz, hogy mindenre becslést tudjunk adni.
- A következő oldalon: az empirikus eloszlásfüggvény (kék) és az elméleti eloszlásfüggvény (piros) különböző mintaméretek (n) esetén.


n=10
n=50
n=200
n=1000
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−3
−2
−1
1
2
3

Leíró statisztikák, statisztikai becslések

Várható érték és valószínűség becslése

Adott egy ξ háttérváltozó és egy $\xi_1, \dots, \xi_n$ minta. A várható értékre a **mintaátlag** avagy **empirikus várható érték** a legegyszerűbb becslés:

$$\overline{\xi} = E_n(\xi) = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \approx E(\xi).$$

Egy A esemény ismeretlen valószínűségére a legyegyszerűbb becslés a **relatív gyakoriság** a mintában: $r_n(A) \approx P(A)$.

A becslések általános tulajdonságai

Legyen a egy ismeretlen paraméter (várható érték, szórás, valószínűség, stb.), $\hat{a}_n$ pedig a becslése az n elemszámú minta alapján.

- A becslés **erősen konzisztens**, ha $P(\hat{a}_n \to a) = 1$, amint $n \to \infty$.
- A becslés **torzítatlan**, ha $E(\hat{a}_n) = a$.

A mintaátlag és a relatív gyakoriság tulajdonságai

(i) A mintaátlag erősen konzisztens és torzítatlan becslése a várható értéknek.

(ii) A relatív gyakoriság erősen konzisztens és torzítatlan becslése a valószínűségnek.

Bizonyítás. (i) Az erős konzisztencia következik a nagy számok Kolmogorov-féle törvényéből. Konzisztencia:

$$E\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}\right)=\frac{E\big(\xi_1+\cdots+\xi_n\big)}{n}=\frac{nE(\xi_1)}{n}=E(\xi).$$

(ii) Mindent visszavezetünk az (i) állításra.

- Legyen $\mathcal{I}$ az A esemény indikátorváltozója! Ekkor $E(\mathcal{I})=P(A)$.
- Legyen $\mathcal{I}_1,\dots,\mathcal{I}_n$ a statisztikai minta erre az indikátorváltozóra! Ekkor
$$r_n(A)=\frac{\mathcal{I}_1+\cdots+\mathcal{I}_n}{n}.$$
- Tehát a relatív gyakoriság egy mintaátlag, amivel az $E(\mathcal{I})=P(A)$ várható értéket becsüljük.

Hogyan becsüljük meg a ξ varianciáját? A várható értékre már tudunk becslést adni, alkalmazzuk azt!

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2\Big) \approx \frac{\big[\xi_1 - E(\xi)\big]^2 + \cdots + \big[\xi_n - E(\xi)\big]^2}{n}$$
$$\approx \frac{\big(\xi_1 - \overline{\xi}\big)^2 + \cdots + \big(\xi_n - \overline{\xi}\big)^2}{n} = \mathrm{Var}_n(\xi).$$

Ezek alapján a szórás becslése: $D_n(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}_n(\xi)} \approx D(\xi)$. Ezeket a becsléseket **empirikus varianciának** és **empirikus szórásnak** nevezzük.

Az empirikus variancia és az empirikus szórás tulajdonságai:

- Ezek erősen konzisztens becslések, tehát 1 valószínűséggel
$$\mathrm{Var}_n(\xi) \to \mathrm{Var}(\xi), \qquad D_n(\xi) \to D(\xi), \qquad n \to \infty.$$
- Az empirikus variancia nem torzítatlan becslés, ugyanis
$$E\big(\mathrm{Var}_n(\xi)\big) = \tfrac{n-1}{n}\,\mathrm{Var}(\xi).$$

Következmények:

- Nagy mintaméret esetén ezek pontos becslések.
- Kis mintaméret esetén lefelé torzítanak.

Az előző oldalon tapasztalt torzítást egy kis korrigálással ki lehet javítani:

- **Korrigált empirikus variancia:**

$$\mathrm{Var}_n^*(\xi) = \frac{n}{n-1}\,\mathrm{Var}_n(\xi) = \frac{\left(\xi_1 - \overline{\xi}\right)^2 + \cdots + \left(\xi_n - \overline{\xi}\right)^2}{n-1}.$$

- **Korrigált empirikus szórás:** $D_n^*(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}_n^*(\xi)}$.

Ekkor megmutatható, hogy:

- ezek az új becslések továbbra is erősen konzisztensek lesznek;
- a korrigált empirikus variancia torzítatlan becslés, tehát kis elemszám esetén pontosabb.

Empirikus medián

A statisztikai minta **(empirikus) mediánja** a következő mutatószám:

$$\hat{q}_{1/2} = \begin{cases} \text{a középső mintaelem,} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \text{a két középső átlaga,} & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Megfelelő feltételek mellett az empirikus medián erősen konzisztens és torzítatlan becsése a ξ valószínűségi változó elméleti mediánjának.

46. Feladat. *A kar hallgatóinak testmagasságát vizsgáljuk, jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató magasságát. Megfigyeléseket végzünk a változóra, a következő realizációt kapjuk: 180, 175, 188, 168, 173, 183. Adjunk becslést a testmagasság várható értékére, szórására és mediánjára!*

$$\overline{\xi} = E_6(\xi) = \frac{180 + 175 + 188 + 168 + 173 + 183}{6} = 177.8 \approx E(\xi),$$

$$\mathrm{Var}_6(\xi) = \frac{(180 - 177.8)^2 + \cdots + (183 - 177.8)^2}{6} = 43.81 \approx \mathrm{Var}(\xi),$$

$$D_6(\xi) = \sqrt{43.81} = 6.62 \approx D(\xi).$$

A kis mintaméret miatt ($n = 6$) a szórást jobb a korrigált szórással becsülni:

$$\mathrm{Var}_6^*(\xi) = \frac{6}{5} 43.81 = 52.57, \qquad D_6^*(\xi) = \sqrt{52.57} = 7.25 \approx D(\xi).$$

A várható érték és a szórás becslését publikációkban így szokták közölni:

$$177.8 \pm 7.25 \text{ cm}.$$

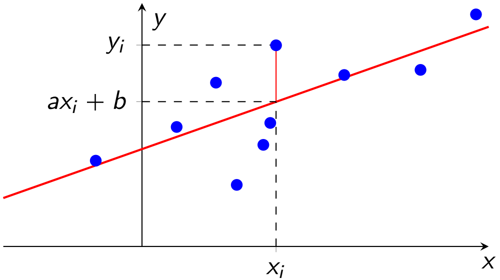
A mintaelemek növekvő sorrendben: 168, 173, 175, 180, 183, 188.
Az empirikus medián a két középső mintaelem számtani átlaga:

$$\hat{q}_{1/2} = (175 + 180)/2 = 177.5.$$

Görbeillesztés, regresszió

Legyen adva két valószínűségi változó: ξ és η.

- Több alkalommal megfigyeljük a (ξ, η) változópár értékeit, a mintarealizáció: $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
- Cél a valószínűségi változók közötti kapcsolat modellezése $\eta \approx f(\xi)$ alakban, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy megfelelően választott függvény.
- Lineáris regresszió: $\eta \approx a\xi + b$, tehát $f(x) = ax + b$. Keressük azt az a és b értéket, melyre ez a becslés a legpontosabb.
- Ez egy görbeillesztés: azt az egyenest keressük, amelyik a legjobban illeszkedik a ponthalmazra.



Legkisebb négyzetek módszere

A becslési hibák négyzetösszegét minimalizáljuk: keressük azon a és b számokat, melyekre

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - ax_i - b\big)^2 \longrightarrow \min .$$

Hogyan kaphatjuk meg a minimumhelyet?

1. megoldás: Legyen $\overline{x}$ és $\overline{y}$ a két mintaátlag! Ekkor elemi algebrával:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\big(y_i - ax_i\big) - \big(\overline{y} - a\overline{x}\big)\Big]^2 + \sum_{i=1}^{n} \Big[\big(\overline{y} - a\overline{x}\big) - b\Big]^2$$

A második tag $b = \overline{y} - a\overline{x}$ választással 0 értéket ad. Tehát

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\big(y_i - ax_i\big) - \big(\overline{y} - a\overline{x}\big)\Big]^2$$

Ez az a paraméternek másodfokú függvénye. A minimmhely megkapható a Viéte-formulák alkalmazásával:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

2. megoldás: A minimumhelyen a deriváltak nullával egyenlőek, tehát

$$0 = \frac{dS}{da} = -2\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - ax_i - b\big)x_i,$$

$$0 = \frac{dS}{db} = -2\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - ax_i - b\big).$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer, az előző oldalon közölt megoldás kapjuk.

47. Feladat. *A kar hallgatóinak testtömegét szeretnénk a testmagasság alapján becsülni. Hat megfigyelésünk van a változókra:*

testmagasság (cm)	*180*	*175*	*188*	*168*	*173*	*183*
testtömeg (kg)	*102*	*64*	*93*	*52*	*82*	*77*

Adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét! Mennyi a regressziós becslés hibája a megfigyelt hallgatók esetében?

Az előző feladatban egy lineáris függvény segítségével modelleztük a két változó kapcsolatát, tehát egy egyenest illesztettünk a ponthalmazra.

Egyes alkalmazásokban más függvénycsaládot érdemes választani. Például:

- Másodfokú regresszió: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Reciprokos regresszió: $f(x) = a/(x + b) + c$.
- Exponenciális regresszió: $f(x) = a\exp(bx) + c$.

A paraméterek becslését ezekben az esetekben is a legkisebb négyzetek módszerével szokták elvégezni:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2 \longrightarrow \min .$$

Viszont ezekben az esetekben már nincs zárt formula a paraméterekre, a minimumhelyet numerikus közelítéssel kell meghatározni.

Konfidencia intervallumok

A statisztikában egy minta alapján kétféle formában becsülhetjük meg az ismeretlen mennyiségeket (várható érték, szórást, stb.):

- **Pontbecslés:** Az ismeretlen mennyiséget egyetlen számmal becsüljük meg, és reménykedünk benne, hogy nem tévedünk nagyot.
- **Intervallumbecslés:** Egy intervallumot adunk meg, mely nagy megbízhatósággal tartalmazza a kérdéses mennyiséget.

Konfidencia intervallum a várható értékre

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statisztikai minta egy ξ valószínűségi változóra, és legyen $\alpha \in (0,1)$. A minta alapján felírt $[a,b]$ intervallum egy $1-\alpha$ megbízhatóságú **konfidencia intervallum a várható értékre**, ha

$$P\Big(E(\xi) \in [a,b]\Big) = 1 - \alpha.$$

- A megbízhatóság általában 90%, 95% vagy 99% szokott lenni, a biostatisztikában tipikusan a 95%-ot használják.
- A konfidencia intervallum hasonló módon definiálható tetszőleges más mutatószámra is (szórás, variancia, medián, stb.)

A mintaátlag eloszlása normális eloszlás esetén

Ha a ξ háttérváltozó normális eloszlású, akkor a $\bar{\xi} = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n$ mintaátlag is normális eloszlású valószínűségi változó.

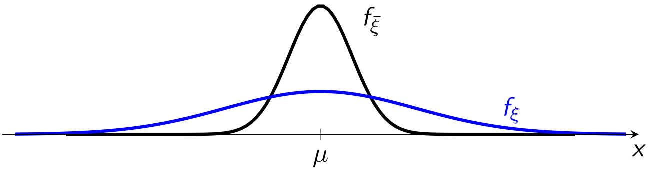
Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó ismeretlen μ várható értékkel és ismert σ szórással. Egy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statisztikai minta alapján adjunk konfidencia intervallumot a várható értékre!

Jelölje $\mu_{\bar{\xi}}$ és $\sigma_{\bar{\xi}}$ a mintaátlag várható értékét és szórását. Ekkor

$$\mu_{\bar{\xi}} = E\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right) = \frac{E(\xi_1) + \cdots + E(\xi_n)}{n} = \frac{nE(\xi)}{n} = \mu,$$

$$\sigma_{\bar{\xi}}^2 = D^2\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right) = \frac{D^2(\xi_1) + \cdots + D^2(\xi_n)}{n^2} = \frac{nD^2(\xi)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Tehát $\mu_{\bar{\xi}} = \mu$ és $\sigma_{\bar{\xi}} = \sigma/\sqrt{n}$. A sűrűségfüggvények:



Először megadunk egy olyan intervallumot, mely $1-\alpha$ valószínűséggel tartalmazza a $\overline{\xi}$ változót. Az intervallumot most is $[\mu_{\bar{\xi}} - c\sigma_{\bar{\xi}}, \mu_{\bar{\xi}} + c\sigma_{\bar{\xi}}]$ alakban keressük. Standardizálással:

$$1-\alpha = P\big(\mu_{\bar{\xi}} - c\sigma_{\bar{\xi}} \leqslant \overline{\xi} \leqslant \mu_{\bar{\xi}} + c\sigma_{\bar{\xi}}\big) = P\left(-c \leqslant \frac{\overline{\xi}-\mu_{\bar{\xi}}}{\sigma_{\bar{\xi}}} \leqslant c\right)$$

$$= P\big(-c \leqslant \eta_{0,1} \leqslant c\big) = \Phi(c) - \Phi(-c) = \Phi(c) - \big[1-\Phi(c)\big] = 2\Phi(c) - 1$$

Tehát $\Phi(c) = 1-\alpha/2$, amiből $c = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$. Ezt az értéket ki tudjuk keresni a táblázatból tetszőleges $\alpha \in (0,1)$ esetén.

A fenti nagy formulát a következő módon tudjuk továbbalakítani:

$$1-\alpha = P\big(\mu_{\bar{\xi}} - c\sigma_{\bar{\xi}} \leqslant \overline{\xi} \leqslant \mu_{\bar{\xi}} + c\sigma_{\bar{\xi}}\big) = P\big(-\overline{\xi} - c\sigma_{\bar{\xi}} \leqslant -\mu_{\bar{\xi}} \leqslant -\overline{\xi} + c\sigma_{\bar{\xi}}\big)$$

$$= P\big(\overline{\xi} + c\sigma_{\bar{\xi}} \geqslant \mu_{\bar{\xi}} \geqslant \overline{\xi} - c\sigma_{\bar{\xi}}\big) = P\left(\overline{\xi} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geqslant \mu \geqslant \overline{\xi} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

De hát ez éppen egy konfidencia intervallum az $E(\xi) = \mu$ ismeretlen várható értékre:

$$1-\alpha = P\left(E(\xi) \in \left[\overline{\xi} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{\xi} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Konfidencia intervallum a normális eloszlás várható értékére

Legyen ξ normális eloszlású háttérváltozó ismert σ szórással. Ekkor a várható értékére a következő formában adható $1-\alpha$ megbízhatóságú konfidencia intervallum:

$$\left[\bar{\xi} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \bar{\xi} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \qquad c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

48. Feladat. *Tegyük fel, hogy a kar hallgatóinak testmagassága normális eloszlású $\sigma = 7$ cm szórással. Adjunk 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a testmagasság várható értékére (az átlagos testmagasságra).*

A minta: 180, 175, 188, 168, 173, 183.

A mintaméret és a mintaátlag: $n = 6$, $\bar{\xi} = 177.8$.

Most $\alpha = 0.05$, ezért $c = \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$.

Az intervallum:

$$\left[177.8 - 1.96\frac{7}{\sqrt{6}}\,, 177.8 + 1.96\frac{7}{\sqrt{6}}\right] = \left[172.2\,, 183.4\right].$$

Kérdés: Hogyan értelmezhető a kapott eredmény?

A mintavételezés során a véletlen sok különböző mintarealizációt sorsolhat ki nekünk. Ezek két csoportba sorolhatóak:

- „Jó” mintarealizációk: az ezekből számolt konfidencia intervallum tartalmazza az ismeretlen várható értéket. Ezek teszik ki az összes lehetséges mintarealizáció $1 - \alpha = 0.95$ hányadát.
- „Rossz” mintarealizációk: ezek félrevezetőek, ugyanis a belőlük számolt konfidencia intervallum nem tartalmazza a várható értéket. Ezek alkotják az összes realizáció $\alpha = 0.05$ hányadát.

Kérdés: Ebben a feladatban jó vagy rossz mintarealizációt kaptunk?

Ezt nem tudjuk eldönteni. Csak reménykedhetünk benne, hogy a jók közül kaptunk egyet, ugyanis ezek vannak többségben.

Kérdés: Miért nem számolunk 99,99%-os megbízhatósággal?

A magasabb megbízhatóság szélesebb intervallumot jelent. A túl széles intervallum viszont nehezíti az eredmény alkalmazhatóságát. A 95%-os választás jellezően jó egyensúlyt jelent a két cél (magas megbízhatóság és szűk konfidencia intervallum) között.

Hipotézisvizsgálat, az u-próba

Hipotézisvizsgálat

A **hipotézisvizsgálat** a matematikai statisztika egyik területe. Adott egy ξ háttérváltozó és egy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statisztikai minta.

Null-hipotézis ($\mathbf{H_0}$): Egy állítás a ξ változóra, ez lehet igaz vagy hamis.

A hipotézisvizsgálat feladata: a statisztikai minta alaján döntsük el, hogy a nullhipotézis igaz vagy hamis!

A hipotézisvizsgálati módszereket **próbáknak** vagy **teszteknek** nevezzük. A nullhipotézis és a háttérváltozóra vonatkozó információ határozza meg, hogy melyik próbát lehet alkalmazni.

Példák nullhipotézisre:

- $H_0 : E(\xi) = 2$,
- $H_0 : P(\xi = 5) = 0.2$,
- $H_0 : \xi$ normális eloszlású.

A hipotézisvizsgálat menete

- Eldöntjük, hogy az adott szituációban melyik statisztikai próba alkalmazható. Minden próbához tartozik egy próbastatisztika és egy kritikus érték.
- A **próbastatisztika** a mintaelemek alapján számolható ki, jelölje u.
- A **kritikus értékre** még visszatérünk, ezt jelölje c.
- Ha $|u| \leqslant c$, akkor **elfogadjuk** a nullhipotézist.
  Ha $|u| > c$, akkor **elvetjük** a nullhipotézist.

Az egész olyan, mint egy bírósági tárgyalás:

- A nullhipotézis a vádlott szava („ártatlan vagyok”).
- A statisztikai minta a bizonyítékok halmaza.
- A próbastatisztika (u) azt fejezi ki, hogy a vádlott szava mennyire van ellentmondásban a bizonyítékokkal.
- A c kritikus érték egy küszöbérték. Ha $|u| \leqslant c$, akkor a bíró hisz a vádlottnak, és felmenti. Ha $|u| > c$, akkor nem hisz neki, és elítéli.

49. Feladat. *Tegyük fel, hogy a kar hallgatóinak testmagassága normális eloszlású* $\sigma = 7$ *cm szórással. Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy az átlagos magasság 175 cm!*

A minta: 180, 175, 188, 168, 173, 183.

A mintaméret és a mintaátlag: $n = 6$, $\overline{\xi} = 177.8$.

Nullhipotézis: $H_0 : E(\xi) = 175$.

Ha a vizsgált valószínűségi változó normális eloszlást követ ismert szórással, akkor alkalmazható az úgynevezett **u-próba**:

- Hipotetikus várható érték: $\mu_0 = 175$.
- Próbastatisztika:

$$u = \frac{\overline{\xi} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{177.8 - 175}{7/\sqrt{6}} = 0.98,$$

- A kritikus érték: $c = 1.96$. (Erre majd még visszatérünk.)
- Döntés: $|u| \leqslant c$, tehát a nullhipotézist elfogadjuk.

A hipotézisvizsgálat során fellépő hibák

Milyen hibákat véthetünk a hipotézisvizsgálat során:

- **Elsőfajú hiba:** Elvetjük az igaz nullhipotézist, tehát börtönbe küldünk egy ártatlant. Valószínűsége:
$$\alpha = P(\text{elvetjük } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ igaz}).$$
- **Másodfajú hiba:** Elfogadjuk a hamis nullhipotézist, tehát felmentünk egy bűnöst. Valószínűsége:
$$\beta = P(\text{elfogadjuk } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ hamis}).$$

Még egy fogalom:

$$\textbf{erő} = P(\text{elvetjük } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ hamis}) = 1 - \beta.$$

A lehetőségeket az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

	elfogadjuk	elvetjük
H_0 igaz	helyes döntés	elsőfajú hiba
H_0 hamis	másodfajú hiba	helyes döntés

Mire hathatunk és mire nem a hipotézisvizsgálat során?

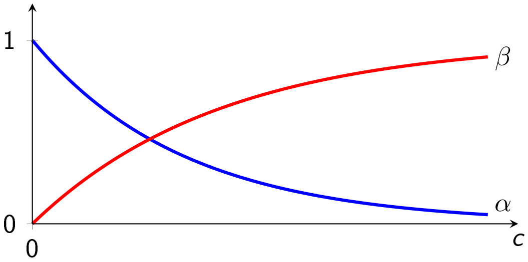
- Akkor vetjük el a nullhipotézist, ha $|u| > c$.
- A nullhipotézis, a tesztelési módszer és a statisztikai minta adott: az u próbastatisztika értékét nem tudjuk befolyásolni.
- A c kritikus értéket (=mennyire szigorú a bíró) mi választjuk.

Meg lehet választani úgy a kritikus értéket, hogy mindkét hiba alacsony maradjon? Erre sajnos nincs lehetőség:

magas kritikus érték ⇒ alacsony elsőfajú hiba, de magas másodfajú hiba

alacsony kritikus érték ⇒ alacsony másodfajú hiba, de magas elsőfajú hiba

Adott n mintaméret esetén a két hiba nagysága egymással ellentétesen változik, ha módosítjuk a kritikus értéket:



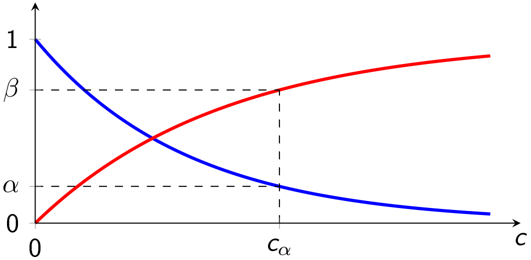
Szignifikancia szint

A hipotézisvizsgálat során az α elsőfajú hibát előre meg szoktuk adni, és ezt a megadott értéket **szignifikancia szintnek** nevezzük.

A szignifikancia szint mindig egy alacsony érték. A legjellemzőbb az 5%, de időnként 1% vagy 10% is szokott lenni.

Foglaljuk össze, hogy mi is történik:

- A feladat megadja az α szignifikancia szintet (=elsőfajú hiba).
- Meghatározzuk a hozzá tartozó kritikus értéket (c_α) és tesztelünk.
- A β másodfajú hiba lehet kicsi vagy nagy is, erre nincs ráhatásunk.



u-próba

Tegyük fel, hogy

- a ξ háttérváltozó normális eloszlású ismert σ szórással;
- $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statisztikai minta a háttérváltozóra;
- $\mu_0 \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges hipotetikus érték.

Ekkor a $H_0 : \mu = \mu_0$ nullhipotézis tesztelhető a következő módon:

- Próbastatisztika:
$$u = \frac{\overline{\xi} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$
- Kritikus érték:
$$c_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$
- Döntés: akkor fogadjuk el a nullhipotézist, ha $|u| \leqslant c_\alpha$.

Kérdés. Miért ez a próbastatisztika, mikor fogadjuk el H_0-t?

$$|u| \leqslant c_\alpha \iff -c_\alpha \leqslant u \leqslant c_\alpha \iff -c_\alpha \leqslant \frac{\overline{\xi} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant c_\alpha$$

$$\iff \overline{\xi} - c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \overline{\xi} + c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \iff \mu_0 \in \left[\overline{\xi} - c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \overline{\xi} + c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Tehát a próba pontosan akkor fogadja el a μ_0 hipotetikus értéket, ha μ_0 az $1-\alpha$ megbízhatóságú konfidencia intervallumba esik. Az intervallum értelmezhető olyan módon, mint a „hihető" várható értékek halmaza.

Kérdés. Az u-próba tényleg betartja az előírt elsőfajú hibát?

$$P\big(\text{elfogadjuk } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ igaz}\big) = P\left(\mu_0 \in \left[\overline{\xi} - c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \overline{\xi} + c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \,\middle|\, \mu = \mu_0\right)$$

$$= P\left(\mu \in \left[\overline{\xi} - c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \overline{\xi} + c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

Ebből következik, hogy

$$P\big(\text{elvetjük } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ igaz}\big) = 1 - P\big(\text{elfogadjuk } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ igaz}\big) = \alpha.$$

Statisztika Microsoft Excelben

Statisztikai függvények a magyar illetve az angol nyelvű Excelben:

Mutatószám	Magyar Excel	Angol Excel
Mintaátlag	ÁTLAG	AVERAGE
Empirikus szórás	SZÓR.S	STDEV.P
Korr. emp. szórás	SZÓRÁS	STDEV
Medián	MEDIÁN	MEDIAN
$c_\alpha \sigma / \sqrt{n}$	MEGBÍZHATÓSÁG	CONFIDENCE

Az Excel nem tudja az u-próbát végrehajtani, de a tesztelés elvégezhető a konfidencia intervallum segítségével.

Lineáris regresszió:

1. Kijelöljük a két adatsort
2. A menüben „Beszúrás", „Diagramok", Pontdiagram"
3. Jobb klikk az egyik pontra, majd „Trendvonal felvétele"
4. A „Trendvonal formázásánál": „Egyenlet látszik a diagramon"