

Zárthelyi dolgozat (2010. dec. 9.)

1. Határozza meg, milyen maradékot ad
 - (a) 21-gyel osztva $17^{7^{17}}$;
 - (b) p -vel osztva a^{p^2-1} , ha p prímszám, a pedig tetszőleges egész szám?
2. Igazolja, hogy az $f(n) = \sum_{d|n} d \cdot \varphi(d)$ számelméleti függvény gyengén multiplikatív, és számítsa ki az $f(7)$, $f(9)$ és $f(63)$ értékeket.
3. Számítsa ki az alábbi Legendre-szimbólumok értékét:
 - (a) $\left(\frac{27}{29}\right)$,
 - (b) $\left(\frac{70}{151}\right)$,
 - (c) $\left(\frac{5}{p}\right)$ (p páratlan prím).
4. Legyenek p, q különböző páratlan prímszámok, a pedig olyan egész szám, amely sem p -vel, sem q -val nem osztható. Igazolja, hogy az $x^2 \equiv a \pmod{pq}$ kongruenciának vagy nulla, vagy pedig négy inkongruens megoldása van.
5. Döntse el, igazak-e az alábbi állítások. Indokolja a választ. (A 101 prímszám.)
 - (a) *Van olyan a egész szám, amelyre $o_{101}(a) = 24$.*
 - (b) *Ha az a egész szám nem osztható a p páratlan prímmel, és $a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{p}$, akkor $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.*