

Zárthelyi dolgozat (2010. okt. 21.)

1. Igazolja, hogy minden n természetes számra $5 \mid 3^{3n+1} + 2^{n+1}$.
2. Az euklideszi algoritmus felhasználásával
 - (a) számítsa ki az alábbi diofantoszi egyenletek egy-egy megoldását:
$$(1) \quad 15x + 24y = 6, \quad (2) \quad 15x - 24y = 6.$$
 - (b) Írja föl mindkét egyenlet általános megoldását.
3. Egy vállalkozó 2010. szeptember 1-jén kezdett eladásra kiflit sütni. A lisztet 12 kg-os csomagokban kapta, és minden nap 29 kg-ot használt fel a sütéshez. E hónap egyik napján este azt látta, hogy mindössze 21 kg lisztje maradt. Október hányadikán történhetett ez?
4. Igazolja, hogy tetszőleges a és b természetes számokra $\lnko(a^3, b^3)$ egy természetes szám köbe.
5.
 - (a) Legyen $\varphi: A \rightarrow B$ egy leképezés. Definiálja, mit jelent, hogy “ φ szürjektív”.
 - (b) Legyen $S = \{0, 1, 2, \dots, 2009\}$. Szürjektív-e az a $\sigma: S \rightarrow S$ leképezés, amely minden $s \in S$ -hez azt a $t \in S$ számot rendeli hozzá, amelyre $121s \equiv t \pmod{2010}$?