

Fermat és Euler tételei, számelméleti függvények

1. Bizonyítsa be az Euler-féle φ függvény alábbi tulajdonságait: bármely m, n természetes számokra
 - (a) $\varphi(n)$ páros, ha $n > 2$;
 - (b) $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$;
 - (c) ha $m \mid n$, akkor $\varphi(m) \mid \varphi(n)$;
 - (d) ha $d = \text{lko}(m, n)$, akkor $\varphi(mn)\varphi(d) = d\varphi(m)\varphi(n)$.
 - (e) ha $\varphi(m^2) = \varphi(n^2)$, akkor $m = n$;
2. Igazolja a következő állításokat tetszőleges a, b, c egész és n természetes számokra:
 - (a) ha $9 \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$, akkor $9^{15} \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$;
 - (b) ha $2 \nmid n$, akkor $n \mid 2^{n!} - 1$;
 - (c) ha n sem nem prímszám, sem nem prímszám 2-szerese, és prímfelbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ (ahol $p_1, \dots, p_r$ különböző prímszámok), akkor a
$$t = \text{lkt}(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \dots, \varphi(p_r^{\alpha_r}))$$
számra
 - (i) $t < \varphi(n)$ és
 - (ii) $a^t \equiv 1 \pmod{n}$, ha $\text{lko}(a, n) = 1$.
 - (d) ha n -nek nincs 7-nél kisebb prímszámja, akkor van olyan többszöröse, amelynek (tíz számrendszerben) minden számjegye 1-es;
 - (e) $2^n - 1$ legkisebb prímszámja nagyobb, mint n legkisebb prímszámja;
3. Mutassa meg, hogy tetszőleges m, n természetes számokra
 - (a) $\varphi(n) + \tau(n) \leq n + 1$;
 - (b) $\tau(mn) < \tau(m)\tau(n)$, ha $\text{lko}(m, n) \neq 1$;
 - (c) $\sigma(mn) < \sigma(m)\sigma(n)$, ha $\text{lko}(m, n) \neq 1$;
4. Mely n természetes számokra teljesül, hogy
 - (a) $\varphi(n) = n - 2$;
 - (b) $\varphi(2n) = \varphi(3n)$;
 - (c) $\sigma(n) - \varphi(n) = 2$;
 - (d) $\sigma(n) - \varphi(n) = 5$;
 - (e) $\sigma(n)$ 2-hatvány?