

**Maradékosztályok hatványozása; lineáris kongruenciarendszerek;
Wilson, Fermat és Euler tételei**

1. Van-e az alábbi maradékosztályoknak inverze? Ha igen, számítsa ki.
 - (a) $\overline{15} \in \mathbb{Z}_{33}$,
 - (b) $\overline{15} \in \mathbb{Z}_{31}$,
 - (c) $\overline{110} \in \mathbb{Z}_{211}$.
2. Legyen $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n^*$, és legyenek k, m tetszőleges egész számok. Igazolja, hogy
 - (a) ha $\bar{a}^k = \bar{1}$ és $\bar{a}^m = \bar{1}$, akkor $\bar{a}^d = \bar{1}$ is teljesül, ahol $d = \text{lko}(k, m)$;
 - (b) ha $\bar{a}^k = \bar{1}$ és $\text{lko}(k, m) = 1$, akkor van olyan $\bar{c} \in \mathbb{Z}_n^*$, amelyre $\bar{a} = \bar{c}^m$.
($\bar{c}$ választható $\bar{a}$ valamely hatványának.)
3. Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak?
4. Milyen maradékot ad
 - (a) $8^{11^{15}}$ 13-mal osztva,
 - (b) $17^{7^{17}}$ 21-gyel osztva?
5. Oldja meg az $x^{501} + x^{201} + x \equiv 998 \pmod{m}$ kongruenciát $m = 125$ -re és $m = 8$ -ra, majd az így kapott eredmények felhasználásával $m = 1000$ -re.
6. Legyen p prímszám, a pedig tetszőleges természetes szám. Mutassa meg, hogy
 - (a) $p^3 \mid (p+1)! - p! + p^2$;
 - (b) $p^2 \mid (2p-1)! - p$;
 - (c) $p \mid a^{p^p} - a$;
 - (d) $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$, ha $\text{lko}(a, 100) = 1$;
 - (e) $a^{1729} \equiv a \pmod{1729}$ ($1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$).(d)-ben és (e)-ben az adott modulus minden q prímszámra tényezőjére vizsgálja a kongruenciát modulo q .
7. Mutassa meg, hogy bármely $n > 1$ természetes számra $2^n - 1$ legkisebb prímosztója nagyobb, mint n legkisebb prímosztója.