

Kongruenciák

1. Az alábbi állítások mindegyikéről döntse el, hogy igaz-e vagy hamis:
 - (a) "Ha $a^2 \equiv b^2 \pmod{n^2}$, akkor $a \equiv \pm b \pmod{n}$."
 - (b) "Ha $ac \equiv bc \pmod{n}$ és $c \not\equiv 0 \pmod{n}$, akkor $a \equiv b \pmod{n}$."Amelyik hamis, azt tudja-e úgy módosítani, hogy igaz állítást kapjon?
2. Milyen maradékot ad $4^{12} + 4^{123} + 4^{1234} + \dots + 4^{123456789}$
 - (a) 7-tel osztva;
 - (b) 17-tel osztva?
3. Titkosítva akarja följegyezni a különböző kódjait és számjegyekből álló jelszavait úgy, hogy minden háromjegyű (tízes számrendszerbeli) s szám helyett a $871 \cdot s$ szám utolsó három jelyét írja le.
 - (a) Előfordulhat-e, hogy két különböző háromjegyű számnak ugyanaz lesz a titkosított alakja?
 - (b) A titkosítás megfejtéséhez jó lenne egy olyan M szám, amelyre teljesül, hogy ha s titkosított alakja s' , akkor s' -ből visszakapható s mint Ms' utolsó három számjegye. Van-e ilyen M szám?
4. Jelölje $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ azt az A számot, amelynek 10-es számrendszerben a jegyei $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, azaz $A = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Igazolja kongruenciák segítségével a következő oszthatósági szabályokat:
 - (a) $4 \mid \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{a_1 a_0}$;
 - (b) $3 \mid \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} \Leftrightarrow 3 \mid a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$;
 - (c) $11 \mid \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} \Leftrightarrow 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^{k-1} a_{k-1} + (-1)^k a_k$;
 - (d) $7 \mid \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} \Leftrightarrow 7 \mid (a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \dots$;Alkosson ezek mintájára oszthatósági szabályt
 - (e) 13-mal való oszthatóságra;
 - (f) 37-tel való oszthatóságra.
5. Az alábbi lineáris kongruenciák közül melyeknek van megoldása? Ha van megoldás, oldja is meg a kongruenciát; a megoldásokat $x \equiv \bullet \pmod{\bullet}$ alakban, illetve az eredeti modulus szerint is adja meg.
 - (a) $20x \equiv 5 \pmod{54}$;
 - (b) $30x \equiv 6 \pmod{57}$;
 - (c) $871x \equiv 1 \pmod{1000}$;
 - (d) $40x \equiv 28 \pmod{62}$
6. Lehet-e 331 után egy 31-gyel osztható háromjegyű számot írni úgy, hogy a kapott (tízes számrendszerbeli) hatjegyű szám osztható legyen 33-mal? Ha igen, adja meg az összes megoldást.