

Prímszámok, a számelmélet alaptétele

1. Az alábbi állítások mindegyikéről döntse el, hogy igaz-e vagy hamis:
 - (a) *“Minden pozitív egész szám előáll $p + a^2$ alakban, ahol a egész, p pedig prímszám vagy 1.”*
 - (b) *“Csak véges sok $n^4 + 4$ ($n \in \mathbb{Z}$) alakú prímszám van .”*
2. Legyenek a és k 1-nél nagyobb egészek. Mutassa meg, hogy ha $a^k - 1$ prímszám, akkor $a = 2$ és k prímszám.
3. Bizonyítsa be, hogy végtelen sok $4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) alakú prímszám van.
4. Határozza meg az összes olyan x, y pozitív egész számot, amelyre
 - (a) x és $y = x^2 + 8$ is prímszám;
 - (b) $\text{lko}(x, y) = 6$ és $\text{lkt}(x, y) = 1800$;
 - (c) $\text{lko}(x^2, y) = 2^2 3$ és $x^2 y = 2^5 3^5 5^2$.
5. A számelmélet alaptételének felhasználásával igazolja, hogy bármely a, b, c pozitív egészekre
 - (a) ha $\text{lko}(a, b) = 1$, akkor $\text{lko}(a + b, ab) = 1$;
 - (b) $a \mid (a - 1)!$ akkor és csak akkor, ha $a \neq 4$ és a nem prím;
 - (c) $\text{lko}(ab, bc, ac) \cdot \text{lkt}(a, b, c) = abc$;
 - (d) ha $a = b^2 = c^3$, akkor van olyan d pozitív egész, amelyre $a = d^6$;
6. Általánosítsa az előző feladatból
 - a (c) állítást háromnál több pozitív egész számra,
 - a (d) állítást pedig az $m = 2$, $n = 3$ kitevők helyett tetszőleges m, n kitevőkre.