

Legnagyobb közös osztó, euklideszi algoritmus, lineáris diofantoszi egyenletek

1. Legyen $d = \text{lko}(1819, 3587)$.
 - (a) Számítsa ki d -t euklideszi algoritmussal, és
 - (b) keressen olyan u, v egészeket, amelyekre $d = 1819u + 3587v$.
 - (c) Adja meg az $1819x + 3587y = 170$ diofantoszi egyenlet általános megoldását.
2. Igazolja az alábbi állításokat tetszőleges a, b, c egész számokra:
 - (o) $\text{lko}(a - bc, b) = \text{lko}(a, b)$;
 - (a) $\text{lko}(11a + 5b, 13a + 6b) = \text{lko}(a, b)$;
 - (b) ha $\text{lko}(a, c) = 1$, akkor $\text{lko}(a, bc) = \text{lko}(a, b)$;
 - (c) ha $d = \text{lko}(a, b) \neq 0$ és u, v olyan egészek, hogy $au + bv = d$, akkor $\text{lko}(u, v) = 1$.
3. Igazolja, hogy a $(4a + 3)x - (7a + 5)y = b$ diofantoszi egyenletnek bármely a, b egészek esetén van megoldása.
4. Van-e az alábbi lineáris diofantoszi egyenleteknek megoldása a nemnegatív egész számok körében? Ha igen, keresse meg az összes nemnegatív egész megoldást.
 - (a) $12x + 7y = 65$;
 - (b) $12x + 7y = 66$;
 - (c) $12x + 20y + 32z = 2010$;
 - (d) $5x + 20y + 93z = 500$.
5. Az euklideszi algoritmus felhasználásával állítsa elő 3871-et minden lehetséges módon két pozitív egész szám összegeként úgy, hogy az első tag 37-tel, a második pedig 53-mal osztható legyen.
6. Legyenek a, b relatív prím pozitív egészek, és legyen $c_0 = ab - a - b$. Igazolja, hogy
 - (a) az $ax + by = c_0$ diofantoszi egyenletnek nincs megoldása a nemnegatív egészek körében;
 - (b) ha viszont $c > c_0$, akkor az $ax + by = c$ diofantoszi egyenletnek van megoldása a nemnegatív egészek körében.